вариант	ф. номер	група	спец.	курс	от предишна година?
А					
Име:					

Второ контролно по ДС (теория), 12.12.2014
спец. Информационни системи
(решения)

Зад. 1. Нека Z е множеството на целите числа. Вярно ли е, че множеството A по-долу е изброимо? Обосновете се!

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} Z \times \{2n, 2n+1\}$$

Решение: Знаем, че множеството Z е изброимо. Освен това $\{2n, 2n+1\}$ е крайно и в частност — изброимо. Но декартовото произведение на две изброими множества е изброимо, следователно $Z \times \{2n, 2n+1\}$ е изброимо.
Накрая, понеже изброимо обединение на изброими множества също е изброимо, получаваме окончателно, че $\bigcup_{n=0}^{\infty} Z \times \{2n, 2n+1\}$ е изброимо.

Зад. 2. Колко са нечетните четирицифрени числа, които могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, ако цифрите на всяко число са различни?
Решение: Нека $\overline{abcd}$ е едно такова число. Ясно е, че последната му цифра d може да бъде $1, 3, 5$ или 7, а за останалата част $\overline{abc}$ очевидно имаме V_6^3 възможности (защото цифрите не могат да се повтарят). Така получаваме, че всички такива числа са $4.V_6^3$.

Зад. 3. В една специалност на ФМИ има 80 човека и всеки от тях трябва да избере поне една от изборните дисциплини Реторика, Стенография и Машинопис. По 40 човека са се записали за всяка една от трите дисциплини, като едновременно за Реторика и Стенография има записани 20 студента, а за Реторика и Машинопис и Стенография и Машинопис - по 15. Колко студента са записали и трите курса?
Решение: Нека означим с P, C и M множествата на студентите, които са записали съответно реторика, стенография и машинопис. От принципа за включване и изключване имаме, че:

$$|P \cup C \cup M| = |P| + |C| + |M| - (|P \cap C| + |P \cap M| + |C \cap M|) + |P \cap C \cap M|.$$

Заместваме с числата от условието и получаваме:

$$80 = 40 + 40 + 40 - (20 + 15 + 15) + |P \cap C \cap M|,$$

откъдето $|P \cap C \cap M| = 10$.

Зад. 4. Формулирайте принципа за биекция.
Решение: може да се види например тук:
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/msoskova/LectureNotesDMA.pdf

вариант	ф. номер	група	спец.	курс	от предишна година?
Б					
Име:					

Второ контролно по ДС (теория), 12.12.2014
спец. Информационни системи
(решения)

Зад. 1. Нека Q е множеството на рационалите числа. Вярно ли е, че множеството B по-долу е изброимо? Обосновете се!

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q \times \{3n, 3n+1, 3n+2\}$$

Решение: Знаем, че множеството Q е изброимо. Освен това $\{3n, 3n+1, 3n+2\}$ е крайно и в частност — изброимо. Но декартовото произведение на две изброими множества е изброимо, следователно $Q \times \{3n, 3n+1, 3n+2\}$ е изброимо.
Накрая, понеже изброимо обединение на изброими множества също е изброимо, получаваме окончателно, че $\bigcup_{n=0}^{\infty} Q \times \{3n, 3n+1, 3n+2\}$ е изброимо.

Зад. 2. Колко са шестцифрените числа с различни цифри и без водеща нула, които могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7?
Решение: Нека $\overline{abcdef}$ е едно такова число. Ясно е, че първата му цифра a може да бъде всяка една от цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6$ и 7, а за останалата част $\overline{bcdef}$ очевидно имаме V_7^5 възможности (защото цифрите не могат да се повтарят). Така получаваме, че всички такива числа са $7.V_7^5$.

Зад. 3. В един клас има 30 ученика, като от тях 20 говорят английски, 15 говорят немски и петима - френски. Английски и немски говорят 6 човека, а по трима ученика владеят съответно английски+френски и немски+френски. Колко ученика говорят и трите езика, ако е известно, че в класа всеки говори поне един от тези три езика?
Решение: Нека означим с E, G и F множествата на учениците, които говорят съответно английски, немски и френски. От принципа за включване и изключване имаме, че:

$$|E \cup G \cup F| = |E| + |G| + |F| - (|E \cap G| + |E \cap F| + |G \cap F|) + |E \cap G \cap F|.$$

Заместваме с числата от условието и получаваме:

$$30 = 20 + 15 + 5 - (6 + 3 + 3) + |E \cap G \cap F|,$$

откъдето $|E \cap G \cap F| = 2$.

Зад. 4. Формулирайте принципа за умножение.
Решение: може да се види например тук:
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/msoskova/LectureNotesDMA.pdf

вариант	ф. номер	група	спец.	курс	от предишна година?
В					
Име:					

Второ контролно по ДС (теория), 12.12.2014
спец. Информационни системи
(решения)

Зад. 1. Нека Z е множеството на целите числа. Вярно ли е, че множеството C по-долу е изброимо? Обосновете се!

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{n, n+1, n+2\} \times Z$$

Решение: Знаем, че множеството Z е изброимо. Освен това $\{n, n+1, n+2\}$ е крайно и в частност — изброимо. Но декартовото произведение на две изброими множества е изброимо, следователно $\{n, n+1, n+2\} \times Z$ е изброимо.
Накрая, понеже изброимо обединение на изброими множества също е изброимо, получаваме окончателно, че $\bigcup_{n=0}^{\infty}\{n, n+1, n+2\} \times Z$ е изброимо.

Зад. 2. Колко са четните трицифрени числа, които могат да се образуват от цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, ако цифрите на всяко такова число са различни?
Решение: Нека $\overline{abc}$ е едно такова число. Ясно е, че последната му цифра d може да бъде $2, 4, 6$ или 8, а за останалата част $\overline{ab}$ очевидно имаме V_8^2 възможности (защото цифрите не могат да се повтарят). Така получаваме, че всички такива числа са $4.V_8^2$.

Зад. 3. В една специалност на ФМИ всеки студент трябва да запише поне една от изборните дисциплини Реторика, Стенография и Машинопис. По 35 човека са се записали за всяка една от трите дисциплини, като едновременно за Реторика и Стенография има записани 10 студента, за Реторика+Машинопис и Стенография+Машинопис - съответно по 15, а и трите курса са записали 5 човека. Колко са студентите в специалността?
Решение: Нека означим с P, C и M множествата на студентите, които са записали съответно реторика, стенография и машинопис. От принципа за включване и изключване имаме, че:

$$|P \cup C \cup M| = |P| + |C| + |M| - (|P \cap C| + |P \cap M| + |C \cap M|) + |P \cap C \cap M|.$$

Заместваме с числата от условието и получаваме:

$$|P \cup C \cup M| = 35 + 35 + 35 - (10 + 15 + 15) + 5,$$

откъдето $|P \cup C \cup M| = 70$. Понеже всеки студент е записал поне една от трите дисциплини, то и хората в тази специалност са 70.

Зад. 4. Формулирайте принципа за изваждане.
Решение: може да се види например тук:
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/msoskova/LectureNotesDMA.pdf

вариант	ф. номер	група	спец.	курс	от предишна година?
Г					
Име:					

Второ контролно по ДС (теория), 12.12.2014
спец. Информационни системи
(решения)

Зад. 1. Нека Q е множеството на рационалите числа. Вярно ли е, че множеството D по-долу е изброимо? Обосновете се!

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{n-1, n, n+1\} \times Q$$

Решение: Знаем, че множеството Q е изброимо. Освен това $\{n-1, n, n+1\}$ е крайно и в частност — изброимо. Но декартовото произведение на две изброими множества е изброимо, следователно $\{n-1, n, n+1\} \times Q$ е изброимо.
Накрая, понеже изброимо обединение на изброими множества също е изброимо, получаваме окончателно, че $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{n-1, n, n+1\} \times Q$ е изброимо.

Зад. 2. Колко са петцифрените числа с различни цифри и без водеща нула, които могат да се образуват от цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8?
Решение: Нека $\overline{abcde}$ е едно такова число. Ясно е, че първата му цифра a може да бъде всяка една от цифрите $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и 8, а за останалата част $\overline{bcde}$ очевидно имаме V_8^4 възможности (защото цифрите не могат да се повтарят). Така получаваме, че всички такива числа са $8.V_8^4$.

Зад. 3. В един клас има 25 ученика, като от тях 20 говорят английски, 10 говорят френски и петима - испански. Английски и френски говорят 8 човека, по двама ученика владеят съответно английски+испански и френски+испански, а само един човек говори и трите езика. Колко ученика не говорят нито един от тези езици?
Решение: Нека означим с E, F и S множествата на учениците, които говорят съответно английски, френски и испански. От принципа за включване и изключване имаме, че:

$$|E \cup F \cup S| = |E| + |F| + |S| - (|E \cap F| + |E \cap S| + |F \cap S|) + |E \cap F \cap S|.$$

Заместваме с числата от условието и получаваме:

$$|E \cup F \cup S| = 20 + 10 + 5 - (8 + 2 + 2) + 1,$$

откъдето $|E \cup F \cup S| = 24$, т.е. 24 човека от класа говорят поне един от трите езика. Следователно само един човек не говори нито един от тези езици.

Зад. 4. Формулирайте принципа на Дирихле.
Решение: може да се види например тук:
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/logic/msoskova/LectureNotesDMA.pdf