Второ контролно по Дискретни Структури, 04.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ А

Задача 1. Нека R е релация над $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, дефинирана чрез

$$aRb \leftrightarrow a = b \vee a = 5.$$

Докажете, че R е частична наредба и определете минималните и максималните елементи.

Решение: Релацията R е рефлексивна, защото за всяко $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ е вярно, че $a = a$ и следователно aRa. Релацията R е антисиметрична, защото за всяко $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ако aRb и $a \neq b$ то $a = 5$, следователно $b \neq a$ и $b \neq 5$, значи не е вярно, че bRa. Нека aRb и bRc за произволни $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ако $a = b$, то понеже bRc, ще имаме и че aRc. Иначе $a = 5$ и в този случай отново aRc по втората клауза на дефиницията.
Минимален елемент е 5, защото няма $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, различен от 5, такъв, че $bR5$. Всъщност 5 е дори най-малък елемент, защото за всяко $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ имаме, че $5Rb$. Максимални елементи са 1, 2, 3, 4, 6, 7 и 8. За кой да е елемент от тях не можем да намерим друг различен елемент, който да е по-голям по отношение на релацията R.

Задача 2. Дадена е функцията:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad f(n) = 1 - 3^{-n}$
Намерете $f([0, 4])$ и $f^{-1}([0, 1])$.
Решение:
$f([0, 4]) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \frac{80}{81}\}$.
$f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{N}$, защото за всяко $n \in \mathbb{N}$, имаме, че $f(n) = 1 - 3^{-n} \in [0, 1]$.

Задача 3. Дадени са функциите:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 + 9 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 - 1$
Проверете дали функциите f, g, $f \circ g$ (където $f \circ g(x) = g(f(x))$) са инекции, сюрекции, биекции. Ако обратната релация е функция, изразете я като функция на аргумент x.
Решение: Нека $x_1 \neq x_2$ са произволни различни реални числа. Тогава $x_1^3 + 9 \neq x_2^3 + 9$ и следователно, f е инекция. Нека $y \in \mathbb{R}$. Тогава $f(\sqrt[3]{y - 9}) = y$ и следователно f е сюрекция. Обратната функция на f е $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 9}$.
Функцията g не е инекция, защото $g(r) = g(-r)$ за всяко $r \in \mathbb{R}$. Тя не е и сюрекция, защото за всяко реално число r, имаме, че $g(r) \geqq -1$ и следователно g не покрива целия интервал $(-\infty, -1)$.
Функцията $f \circ g(x) = g(f(x)) = (x^3 + 9)^2 - 1 = (x^3 + 9 - 1)(x^3 + 9 + 1) = (x^3 + 8)(x^3 + 10)$. Тя не е инекция защото $f \circ g(-2) = f \circ g(-\sqrt[3]{10}) = 0$. Не е инекция, защото отново за всяко реално число r имаме, че $f \circ g(r) \geqq -1$

Задача 4. Дайте пример за множество, което е различно от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и равномощно с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Решение: Нека $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Множеството $\mathbb{N}^+$ е равномощно с $\mathbb{N}$, защото $f(n) = n - 1$ е биекция от $\mathbb{N}^+$ към $\mathbb{N}$. Така $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ е равномощно с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото функцията $h(x, y) = (f(x), f(y))$ е биекция от $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ към $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. (Проверете го!) Множеството $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ е различно $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото например $(0, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+)$.

Второ контролно по Дискретни Структури, 04.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Б

Задача 1. Нека R е релация над $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ дефинирана чрез

$$aRb \leftrightarrow a = b \vee b = 5.$$

Докажете, че R е частична наредба и определете минималните и максималните елементи.

Решение: Релацията R е рефлексивна, защото за всяко $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ е вярно, че $a = a$ и следователно aRa. Релацията R е антисиметрична, защото за всяко $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, ако aRb и $a \neq b$ то $b = 5$, следователно $b \neq a$ и $a \neq 5$, значи не е вярно, че bRa. Нека aRb и bRc за произволни $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ако $b = c$, то понеже aRb, ще имаме и че aRc. Иначе $c = 5$ и в този случай отново aRc по втората клауза на дефиницията.
Максимален елемент е 5, защото няма $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, различен от 5, такъв, че $5Rb$. Всъщност 5 е дори най-голям елемент, защото за всяко $b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, имаме, че $bR5$. Минимални елементи са 1, 2, 3, 4, 6, 7 и 8. Който и да изберем от тях, не можем да намерим друг различен елемент, който да е по-малък по отношение на релацията R.

Задача 2. Дадена е функцията:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad f(n) = 3^{-n}$
Намерете $f([0, 4])$ и $f^{-1}([0, 1])$.
Решение: $f([0, 4]) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}\}$.
$f^{-1}([0, 1]) = \mathbb{N}$, защото за всяко $n \in \mathbb{N}$, имаме, че $f(n) = 3^{-n} \in [0, 1]$.

Задача 3. Дадени са функциите:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 26 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 - 1$
Проверете дали функциите f, g, $f \circ g$ (където $f \circ g(x) = g(f(x))$) са инекции, сюрекции, биекции. Ако обратната релация е функция, изразете я като функция на аргумент x.
Решение: Нека $x_1 \neq x_2$ са произволни различни реални числа. Тогава $x_1^3 - 26 \neq x_2^3 - 26$ и следователно, f е инекция. Нека $y \in \mathbb{R}$. Тогава $f(\sqrt[3]{y + 26}) = y$ и следователно f е сюрекция. Обратната функция на f е $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 26}$.
Функцията g не е инекция, защото $g(r) = g(-r)$ за всяко $r \in \mathbb{R}$. Тя не е и сюрекция, защото за всяко реално число r имаме, че $g(r) \geqq -1$ и следователно g не покрива целия интервал $(-\infty, -1)$.
Функцията $f \circ g(x) = g(f(x)) = (x^3 - 26)^2 - 1 = (x^3 - 26 - 1)(x^3 - 26 + 1) = (x^3 - 27)(x^3 - 25)$. Тя не е инекция защото $f \circ g(3) = f \circ g(-\sqrt[3]{25}) = 0$. Не е инекция, защото отново за всяко реално число r, имаме, че $f \circ g(r) \geqq -1$

Задача 4. Дайте пример за множество, което е различно от $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ и равномощно с $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Обосновете отговора си.
Решение: Множеството $\mathbb{Z}$ е равномощно с $\mathbb{N}$, защото $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, такава, че $f(2k) = k$ и $f(2k + 1) = -k - 1$ е биекция. Така $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е равномощно с $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото функцията $h(x, y) = (f(x), f(y))$ е биекция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ към $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. (Проверете го!) Множеството $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ е различно $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото например $(-10, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Второ контролно по Дискретни Структури, 04.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ В

Задача 1. Нека R е релация над $\{5,6,7,8,9,10,11\}$ дефинирана чрез

$$aRb \leftrightarrow a = b \vee b = 8.$$

Докажете, че R е частична наредба и определете минималните и максималните елементи.

Решение: Релацията R е рефлексивна, защото за всяко $a \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$ е вярно, че $a = a$ и следователно aRa. Релацията R е антисиметрична, защото за всяко $a, b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, ако aRb и $a \neq b$ то $b = 8$, следователно $b \neq a$ и $a \neq 8$, значи не е вярно, че bRa. Нека aRb и bRc за произволни $a,b,c \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$. Ако $b = c$, то понеже aRb, ще имаме и че aRc. Иначе $c = 8$ и в този случай отново aRc по втората клауза на дефиницията.

Максимален елемент е 8, защото няма $b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, различен от 8, такъв, че $8Rb$. Всъщност 8 е дори най-голям елемент, защото за всяко $b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, имаме, че $bR8$. Минимални елементи са 5, 6, 7, 9, 10 и 11. Който и да изберем от тях, не можем да намерим друг различен елемент, който да е по-малък по отношение на релацията R.

Задача 2. Дадена е функцията:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad f(n) = 1 + 2^{-n}$
Намерете $f([0,4])$ и $f^{-1}([1,2])$.

Решение: $f([0,4]) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{2, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{9}{8}, \frac{17}{16}\}$.
$f^{-1}([1,2]) = \mathbb{N}$, защото за всяко $n \in \mathbb{N}$, имаме, че $f(n) = 1 + 2^{-n} \in [1,2]$.

Задача 3. Дадени са функциите:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 7 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = 4x^2 - 1$
Проверете дали функциите f, g, $f \circ g$ (където $f \circ g(x) = g(f(x))$) са инекции, сюрекции, биекции. Ако обратната релация е функция, изразете я като функция на аргумент x.

Решение: Нека $x_1 \neq x_2$ са произволни различни реални числа. Тогава $x_1^3 - 7 \neq x_2^3 - 7$ и следователно, f е инекция. Нека $y \in \mathbb{R}$. Тогава $f(\sqrt[3]{y+7}) = y$ и следователно f е сюрекция. Обратната функция на f е $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+7}$.

Функцията g не е инекция, защото $g(r) = g(-r)$ за всяко $r \in \mathbb{R}$. Тя не е и сюрекция, защото за всяко реално число r, имаме, че $g(r) \geqq -1$ и следователно g не покрива целия интервал $(-\infty, -1)$.

Функцията $f \circ g(x) = g(f(x)) = 4(x^3 - 7)^2 - 1 = (2(x^3 - 7) - 1)(2(x^3 - 7) + 1) = (2x^3 - 15)(x^3 - 13)$. Тя не е инекция защото $f \circ g(\sqrt[3]{15}) = f \circ g(-\sqrt[3]{13}) = 0$. Не е инекция, защото отново за всяко реално число r имаме, че $f \circ g(r) \geqq -1$

Задача 4. Дайте пример за множество, което е различно от $2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$ и равномощно с $2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$. Обосновете отговора си.

Решение: Множеството $2\mathbb{N}$ е равномощно с $\mathbb{N}$, защото $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, такава, че $f(n) = 2n$ е биекция. Така $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е равномощно с $2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$, защото функцията $h(x,y) = (f(x), f(y))$ е биекция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ към $2\ltimes \times 2\mathbb{N}$. (Проверете го!) Множеството $2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$ е различно $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото например $(1,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus (2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$.

Второ контролно по Дискретни Структури, 04.12.14
спец. Информационни системи
ВАРИАНТ Г

Задача 1. Нека R е релация над $\{5,6,7,8,9,10,11\}$ дефинирана чрез

$$aRb \leftrightarrow a = b \vee a = 8.$$

Докажете, че R е частична наредба и определете минималните и максималните елементи.

Решение: Релацията R е рефлексивна, защото за всяко $a \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$ е вярно, че $a = a$ и следователно aRa. Релацията R е антисиметрична, защото за всяко $a, b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, ако aRb и $a \neq b$ то $a = 8$, следователно $b \neq a$ и $b \neq 8$, значи не е вярно, че bRa. Нека aRb и bRc за произволни $a,b,c \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$. Ако $a = b$, то понеже bRc, ще имаме и че aRc. Иначе $a = 8$ и в този случай отново aRc по втората клауза на дефиницията.

Минимален елемент е 8, защото няма $b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, различен от 8, такъв, че $bR8$. Всъщност 8 е дори най-малък елемент, защото за всяко $b \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$, имаме, че $8Rb$. Максимални елементи са 5, 6, 7, 9, 10 и 11. Който и да изберем от тях, не можем да намерим друг различен елемент, който да е по-голям по отношение на релацията R.

Задача 2. Дадена е функцията:
$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \quad f(n) = 1 - 2^{-n}$
Намерете $f([0,4])$ и $f^{-1}([0,1])$.

Решение: $f([0,4]) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}\}$.
$f^{-1}([0,1]) = \mathbb{N}$, защото за всяко $n \in \mathbb{N}$, имаме, че $f(n) = 1 - 2^{-n} \in [0,1]$.

Задача 3. Дадени са функциите:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^3 - 26 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad g(x) = 4x^2 - 1$
Проверете дали функциите f, g, $f \circ g$ (където $f \circ g(x) = g(f(x))$) са инекции, сюрекции, биекции. Ако обратната релация е функция, изразете я като функция на аргумент x.

Решение: Нека $x_1 \neq x_2$ са произволни различни реални числа. Тогава $x_1^3 - 26 \neq x_2^3 - 26$ и следователно, f е инекция. Нека $y \in \mathbb{R}$. Тогава $f(\sqrt[3]{y+26}) = y$ и следователно f е сюрекция. Обратната функция на f е $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+26}$.

Функцията g не е инекция, защото $g(r) = g(-r)$ за всяко $r \in \mathbb{R}$. Тя не е и сюрекция, защото за всяко реално число r, имаме, че $g(r) \geqq -1$ и следователно g не покрива целия интервал $(-\infty, -1)$.

Функцията $f \circ g(x) = g(f(x)) = 4(x^3 - 26)^2 - 1 = (2(x^3 - 26) - 1)(2(x^3 - 26) + 1) = (2x^3 - 53)(x^3 - 51)$. Тя не е инекция защото $f \circ g(\sqrt[3]{53}) = f \circ g(-\sqrt[3]{51}) = 0$. Не е инекция, защото отново за всяко реално число r, имаме, че $f \circ g(r) \geqq -1$

Задача 4. Дайте пример за множество, което е различно от $(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$ и равномощно с $(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$. Обосновете отговора си.

Решение: Множеството $2\mathbb{N}+1$ е равномощно с $\mathbb{N}$, защото $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}+1$, такава, че $f(n) = 2n+1$ е биекция. Така $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е равномощно с $(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$, защото функцията $h(x,y) = (f(x), f(y))$ е биекция от $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ към $(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$. (Проверете го!) Множеството $(2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)$ е различно $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, защото например $(2,3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus (\ (2\mathbb{N}+1) \times (2\mathbb{N}+1)\ )$.