вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
1					
Име:					

ВТОРО КОНТРОЛНО ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ

спец. Информационни системи

15.01.2016 г.

Задача 1. Нека $\{0,1\}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1\}^n$. Докажете, че $\{0,1\}^*$ е изброимо.

Решение: Първо ще покажем, че $|\mathbb{N}| \leq |\{0,1\}^*|$. Действително, функцията $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}^*$ определена чрез $f(n) = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n})$ е инекция.

За да покажем пък, че $|\{0,1\}^*| \leq |\mathbb{N}|$, достатъчно е да забележим, че изображението $g : \{0,1\}^* \to \mathbb{N}$ определено чрез $g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 2^n p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$, където с p_k сме означили $k+1$-вото просто число, е инекция.

Следователно, $\{0,1\}^*$ е изброимо.

Задача 2. Нека U е крайно множество с n елемента, $n \geq 3$. Намерете броя на наредените двойки (A, B), където $A \subseteq B \subseteq U$ и $|A \cap B| \geq 2$.

Решение: Нека $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. На всяка наредена двойка (A, B) от подмножества на U еднозначно съпоставяме дума $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ с дължина n над азбуката $\Sigma = \{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{XY}\}$ по правилото:

$$a_k = \begin{cases} XY, & \text{ако } u_k \in A \cap B \\ X\overline{Y}, & \text{ако } u_k \in A \cap \overline{B} \\ \overline{X}Y, & \text{ако } u_k \in \overline{A} \cap B \\ \overline{XY}, & \text{ако } u_k \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases} .$$

Нека $\mathfrak{X} = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |A \cap B| \geq 2\}$, $\mathfrak{Y} = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |A \cap B| < 2\}$ и $\mathfrak{T} = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$. Ясно е, че $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = \varnothing$. Следователно, $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{T}| - |\mathfrak{Y}|$.

За да намерим броя на елементите на $\mathfrak{T}$ да забележим, че за всяка (A, B) в $\mathfrak{T}$ се характеризира с това, че който и да е елемент на U да вземем, той не може да е в A без да е в B. Следователно, думите които съпоставяме на елементите в $\mathfrak{T}$ са именно тези, в които буквата $X\overline{Y}$ не участва. Казано иначе, това са думите с дължина n, чиито букви са от триелементното множество $\{XY, \overline{X}Y, \overline{XY}\}$. Броят на тези думи е точно 3^n, откъдето $|\mathfrak{T}| = 3^n$.

За да намерим броя на елементите на $\mathfrak{Y}$ да забележим, че $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_0 \cup \mathfrak{Y}_1$, където $\mathfrak{Y}_0 = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |A \cap B| = 0\}$ и $\mathfrak{Y}_1 = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |A \cap B| = 1\}$. Понеже $\mathfrak{Y}_0 \cap \mathfrak{Y}_1 = \varnothing$, то $|\mathfrak{Y}| = |\mathfrak{Y}_0| + |\mathfrak{Y}_1|$.

Но $\mathfrak{Y}_0 = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |A| = 0\} = \{(\varnothing, B) \mid B \subseteq U\}$, откъдето $|\mathfrak{Y}_0| = 2^n$.

Аналогично, $\mathfrak{Y}_1 = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |A| = 1\}$. Следователно, думата които съпоставяме на елемент (A, B) на $\mathfrak{Y}_1$ трябва да съдържа точно една буква XY (защото $A \subseteq B \subseteq U$ и $|A| = 1$) и да не съдържа буквата $X\overline{Y}$ (защото $A \subseteq B \subseteq U$). Броят на различните такива думи е $n2^{n-1}$ (по n начина можем да изберем позиция за буквата XY, и при вече избрана тази позиция можем оставащите $n-1$ позиции да запълним с буквите $\overline{X}Y, \overline{XY}$ да запълним по $n2^{n-1}$ различни начина). Така $|\mathfrak{Y}_1| = n2^{n-1}$.

Окончателно, търсеният брой е $|\mathfrak{X}| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.

Задача 3. Представете в СДНФ функцията $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2}(x_1 \to x_3) \leftrightarrow \overline{x_3}$.

Решение: Не е трудно да се види, че $f = (01010001)$. Следователно,

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_3 \vee x_1\overline{x_2}x_3.$$

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
2					
Име:					

ВТОРО КОНТРОЛНО ПО ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ

спец. Информационни системи

15.01.2016 г.

Задача 1. Нека $\{0,1,2\}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{0,1,2\}^n$. Докажете, че $\{0,1,2\}^*$ е изброимо.

Решение: Първо ще покажем, че $|\mathbb{N}| \leq |\{0,1,2\}^*|$. Действително, функцията $f : \mathbb{N} \to \{0,1,2\}^*$ определена чрез $f(n) = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n})$ е инекция.

За да покажем пък, че $|\{0,1,2\}^*| \leq |\mathbb{N}|$, достатъчно е да забележим, че изображението $g : \{0,1,2\}^* \to \mathbb{N}$ определено чрез $g(a_1, a_2, \dots, a_n) = 2^n p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$, където с p_k сме означили $k+1$-вото просто число, е инекция.

Следователно, $\{0,1,2\}^*$ е изброимо.

Задача 2. Нека U е крайно множество с n елемента, $n \geq 3$. Намерете броя на наредените двойки (A, B), където $A \subseteq B \subseteq U$ и $|B \setminus A| \geq 2$.

Решение: Нека $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. На всяка наредена двойка (A, B) от подмножества на U еднозначно съпоставяме дума $\alpha = a_1a_2\dots a_n$ с дължина n над азбуката $\Sigma = \{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{XY}\}$ по правилото:

$$a_k = \begin{cases} XY, & \text{ако } u_k \in A \cap B \\ X\overline{Y}, & \text{ако } u_k \in A \cap \overline{B} \\ \overline{X}Y, & \text{ако } u_k \in \overline{A} \cap B \\ \overline{XY}, & \text{ако } u_k \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{cases}.$$

Нека $\mathfrak{X} = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |B \setminus A| \geq 2\}$, $\mathfrak{Y} = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |B \setminus A| < 2\}$ и $\mathfrak{T} = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$. Ясно е, че $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Y} = \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y} = \varnothing$. Следователно, $|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{T}| - |\mathfrak{Y}|$.

За да намерим броя на елементите на $\mathfrak{T}$ да забележим, че за всяка (A, B) в $\mathfrak{T}$ се характеризира с това, че който и да е елемент на U да вземем, той не може да е в A без да е в B. Следователно, думите които съпоставяме на елементите в $\mathfrak{T}$ са именно тези, в които буквата $X\overline{Y}$ не участва. Казано иначе, това са думите с дължина n, чиито букви са от триелементното множество $\{XY, \overline{X}Y, \overline{XY}\}$. Броят на тези думи е точно 3^n, откъдето $|\mathfrak{T}| = 3^n$.

За да намерим броя на елементите на $\mathfrak{Y}$ да забележим, че $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_0 \cup \mathfrak{Y}_1$, където $\mathfrak{Y}_0 = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |B \setminus A| = 0\}$ и $\mathfrak{Y}_1 = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \& \ |B \setminus A| = 1\}$. Понеже $\mathfrak{Y}_0 \cap \mathfrak{Y}_1 = \varnothing$, то $|\mathfrak{Y}| = |\mathfrak{Y}_0| + |\mathfrak{Y}_1|$.

Но $\mathfrak{Y}_0 = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ A = B\} = \{(B,B) \mid B \subseteq U\}$, откъдето $|\mathfrak{Y}_0| = 2^n$.

Имаме, че $\mathfrak{Y}_1 = \{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |B \setminus A| = 1\}$. Следователно, думата които съпоставяме на елемент (A, B) на $\mathfrak{Y}_1$ трябва да съдържа точно една буква $\overline{X}Y$ (съответстваща на единствения елемент, който е в B, но не е в A) и да не съдържа буквата $X\overline{Y}$ (защото $A \subseteq B \subseteq U$). Броят на различните такива думи е $n2^{n-1}$ (по n начина можем да изберем позиция за буквата $\overline{X}Y$, и при вече избрана тази позиция можем оставащите $n-1$ позиции да запълним с буквите $XY, \overline{XY}$ да запълним по $n2^{n-1}$ различни начина). Така $|\mathfrak{Y}_1| = n2^{n-1}$.

Окончателно, търсеният брой е $|\mathfrak{X}| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.

Задача 3. Представете в СКНФ функцията $f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2}(x_1 \to x_3) \leftrightarrow \overline{x_3}$.

Решение: Не е трудно да се види, че $f = (01010001)$. Следователно,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3).$$