1 Увод

Първата аксиоматична система е свързана с геометрията. В средата на миналия век А. Тарски и учениците му изследват различни аксиоматични системи от първи ред за геометрии със средствата и методите на математическата логика. Например Тарски доказва разрешимостта на елементарната геометрия. По редица причини изследвания на формални системи за геометрични обекти с релации между тях, които имат естествен, здрав геометричен смисъл, предизвикват интерес. Целите в тези изследвания са твърде разнообрани и далеч надхвърлят класическите математико-логически въпроси за аксиоматизируемост, разрешимост и т.н. Едно сравнително ново направление в тази насока е използването на модални езици, чиито модалности се интерпретират с релации, имащи геометричен смисъл. Например правите в Евклидовата равнина с релациите (строга) успоредност P и пресичане C са изследвани в [1]. В този език формалното равенство е изразимо и се оказва, че теорията от първи ред е всъщност еквивалентна на теорията на релациите на еквивалентност с безбройно много безкрайни класове на еквивалентност, нещо което не е учудващо. Теорията се оказва PSPACE-пълна. Интересното е, че модалната логика с унарни модалности за разглежданите две геометрични релации също има хубави моделни свойства, но тя е coNP-пълна. Този език е твърде беден и сравнително малко свойства могат да се изкажат в него.

Целта на настоящата работа е да се изследва същият универсум — правите в Евклидовата равнина — но с по-богата съвкупност от първични геометрични свойства: (строга) успоредност P, пресичане C и перпендикулярност L. И този език не е кой знае колко изразителен: например в него не може да се интерпретира двумерната Евклидова геометрия, защото понятието точка не би могло да се дефинира — ако допуснем противното, ще следва, че можем да дефинираме предиката „три прави се пресичат в една точка”, а, както ще докажем, това е невъзможно.

В първата част на дипломната работа се изследва теорията от първи ред за езика с предикатни символи P, C, L и $=$ на правите в Евклидовата равнина. Доказва се, че тя е консервативно разширение на езика без перпендикулярност, изброимо категорична е и в неизброимите мощности не е категорична. Доказва се, че проблемът за принадлежност към теорията е PSPACE-пълен.

Във втората част се разглежда модалната логика, свързана с успоредност, пресичане и перпендикулярност на правите в Евклидовата равнина, т.е. множеството от формулите в съждителен модален език с три унарни модални оператора — $[P]$, $[C]$ и $[L]$, който са верни в структурата на Крипке с универсум множеството на правите и очакваната интерпретация на $[P]$, $[C]$ и $[L]$. Тази логика има нестандартни модели и това създава проблеми с аксиоматичното й задаване. В дипломната работа е показана пълна аксиоматична система. Доказано е, че проблемът за принадлежност към модалната логика е coNP-пълен.

2 Теория от първи ред

Разглеждаме езика $\mathcal{L}$ с предикатни символи P,C,L и $=$, без константи и без функционални символи.

Разглеждаме следните формули:

$$IRREF \stackrel{def}{=} \forall x \neg P(x,x) \quad \forall x \neg C(x,x)$$
$$TRANS \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge C(y,z) \rightarrow C(x,z))$$
$$UNIV \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))$$

$DENS_n$:
$\forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (P(x,y_1) \wedge \ldots \wedge P(x,y_n) \rightarrow \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y_1) \wedge \ldots \wedge P(z,y_n))),\ n \geq 0$
$\forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (C(x,y_1) \wedge \ldots \wedge C(x,y_n) \rightarrow \exists z (C(x,z) \wedge C(z,y_1) \wedge \ldots \wedge C(z,y_n))),\ n \geq 0$

$SAP \stackrel{def}{=} \{IRREF,\ TRANS,\ UNIV\} \cup \{DENS_n :\ n \geq 0\}$

$$\lambda_1 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow L(y,x))$$
$$\lambda_2 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (L(z,x) \wedge L(z,y) \rightarrow (x = y) \vee P(x,y))$$
$$\lambda_3 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (L(x,y) \rightarrow C(x,y))$$
$$\lambda_4 \stackrel{def}{=} \forall x \exists y L(x,y)$$
$$\lambda_5 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge L(z,x) \rightarrow L(z,y))$$

$SAPP \stackrel{def}{=} SAP \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5\}$

Нека $\mathcal{A}$ е модел на $SAPP$. В частност е модел на SAP. В [1] е доказано, че в произволен модел на SAP $\neg C$ е релация на еквивалентност, която го разбива на безбройно много безкрайни класове на еквивалентност. Дефинираме релацията $R_{\mathcal{A}}$ така:

$$[a] R_{\mathcal{A}} [b] \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} aLb \quad \forall a, b \in A$$

Ще докажем, че дефиницията е коректна. Нека a, a_1, b и b_1 са елементи на A, такива че $[a] = [a_1]$ и $[b] = [b_1]$. Нека $[a] R_{\mathcal{A}} [b]$. Следователно aLb.

Лема 1 *За всяка затворена формула φ от езика $\mathcal{L}'$ с предикатни символи P, C и $=$ имаме:* $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$.

Доказателство: Нека φ е затворена формула от $\mathcal{L}'$. Обедняванията $\mathcal{F}'^2_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{A}'$ на $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{A}$ до $\mathcal{L}'$ са модели на SAP и SAP е пълна (това е доказано в [1]). Следователно $\mathcal{F}'^2_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{A}'$ са елементарно еквивалентни, откъдето: $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{F}'^2_{\mathbb{R}} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{A}' \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \quad \square$

$$\zeta_1 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y(\neg C(x,y) \leftrightarrow (x=y) \vee P(x,y))$$
$$\zeta_2 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z \forall t(((x=y) \vee P(x,y)) \wedge L(x,z) \wedge ((z=t) \vee P(z,t)) \rightarrow L(y,t))$$

$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \zeta_1 (1)$
(1) и лемата $\Longrightarrow \mathcal{A} \models \zeta_1 (2)$
Нека $X, Y, Z, T \in A$ и $((X = Y) \vee P(X,Y))(3)$, и $L(X,Z)(4)$, и $((Z = T) \vee P(Z,T))(5)$.
$(4), \mathcal{A} \models \lambda_1 \Longrightarrow L(Z,X)(6)$
$(3), (6), \mathcal{A} \models \lambda_5 \Longrightarrow L(Z,Y) \Longrightarrow L(Y,Z)(7)$
$(5), (7), \mathcal{A} \models \lambda_5 \Longrightarrow L(Y,T)$
Следователно $\mathcal{A} \models \zeta_2 (8)$.
$[a] = [a_1] \Longrightarrow \neg C(a, a_1)(9)$
$[b] = [b_1] \Longrightarrow \neg C(b, b_1)(10)$
$(9), (2) \Longrightarrow a = a_1$ или $P(a, a_1)(11)$
Аналогично $b = b_1$ или $P(b, b_1).(12)$
$(11), (8), aLb, (12) \Longrightarrow a_1 L b_1 \Longrightarrow [a_1] R_{\mathcal{A}} [b_1]$
Следователно дефиницията е коректна.

$\mathcal{A} \models \lambda_4 \Longrightarrow \forall a \in A \ \exists b \in A : [a] R_{\mathcal{A}} [b]$

Нека $a, b_1, b_2 \in A$ и $[a] R_{\mathcal{A}} [b_1], [a] R_{\mathcal{A}} [b_2]. \Longrightarrow L(a, b_1), L(a, b_2)(13)$
$\mathcal{A} \models \lambda_2 (14)$
$(13), (14) \Longrightarrow b_1 = b_2$ или $P(b_1, b_2)(15)$
$(2), (15) \Longrightarrow \neg C(b_1, b_2) \Longrightarrow [b_1] = [b_2]$
Следователно за всеки клас на еквивалентност $[a]$ съществува точно един клас на еквивалентност $[b]$, такъв че $[a] R_{\mathcal{A}} [b]$.

Твърдение 1 *Нека $\mathcal{A}$ е изброим модел на $SAPP$, $\mathcal{B}$ е модел на $SAPP$. Тогава $\mathcal{A}$ елементарно се влага в $\mathcal{B}$.*

Доказателство: $\mathcal{A}$ е изброим модел на $SAPP \Longrightarrow$A има изброимо много класове на еквивалентност. Нека $[a_1], [a_2], \dots [a_n] \dots ; [a'_1], [a'_2], \dots [a'_n] \dots$ са

класовете на еквивалентност на А, като $[a_1]R_{\mathcal{A}}[a'_1], [a_2]R_{\mathcal{A}}[a'_2]\dots$ Измежду класовете на еквивалентност на В, които са безбройно много, можем да изберем изброимо много. Нещо повече — съществуват изброимо много класове на еквивалентност на В: $[b_1], [b_2], \dots [b_n] \dots ; [b'_1], [b'_2], \dots [b'_n] \dots$, такива че: $[b_1]R_{\mathcal{B}}[b'_1], [b_2]R_{\mathcal{B}}[b'_2] \dots$
За всяко n $[a_n], [a'_n]$ са изброими, а $[b_n], [b'_n]$ са поне изброими $\Longrightarrow$ за всяко n съществуват инекции — $h_n : [a_n] \to [b_n]$ и $h'_n : [a'_n] \to [b'_n]$

$$f(a) \stackrel{def}{=} \begin{cases} h_n(a) & \text{ако } a \in [a_n] \text{ за някое } n \\ h'_n(a) & \text{ако } a \in [a'_n] \text{ за някое } n \end{cases}$$

Ще докажем, че: f е елементарно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. С индукция по φ ще докажем, че за всяка формула φ: ако φ има свободни променливи измежду $x_1, \dots, x_n$ и $a_1, \dots, a_n \in A$, то: $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \Longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[\overline{f(a)}]$
1)φ — атомарна
$(\bullet)\varphi = L(x_1, x_2)$ Нека $a_1, a_2 \in A$. $\mathcal{A} \models L(x_1, x_2)[a_1, a_2] \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} [a_1]R_{\mathcal{A}}[a_2] \Longleftrightarrow [f(a_1)]R_{\mathcal{B}}[f(a_2)] \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} f(a_1)Lf(a_2)$
$(\bullet)\varphi = P(x_1, x_2)$ Нека $a_1, a_2 \in A$. Нека $\mathcal{A} \models P(x_1, x_2)[a_1, a_2](1)$
$(1), \mathcal{A} \models \zeta_1 \Longrightarrow \neg C(a_1, a_2) \Longrightarrow [a_1] = [a_2] \Longrightarrow [f(a_1)] = [f(a_2)] \Longrightarrow \neg C(f(a_1), f(a_2))(2)$
$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \zeta_1, \mathcal{B} \models SAPP$ и лемата $\Longrightarrow \mathcal{B} \models \zeta_1(3)$
$(2), (3) \Longrightarrow f(a_1) = f(a_2)$ или $P(f(a_1), f(a_2))$
$a_1 \neq a_2$ и f е инекция $\Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
Следователно $P(f(a_1), f(a_2))$.
Аналогично: $\mathcal{B} \models P(x_1, x_2)[f(a_1), f(a_2)] \Longrightarrow \mathcal{A} \models P(x_1, x_2)[a_1, a_2]$
$(\bullet)\varphi = C(x_1, x_2)$ Нека $a_1, a_2 \in A$. $\mathcal{A} \models C(x_1, x_2)[a_1, a_2] \Longleftrightarrow [a_1] \neq [a_2] \Longleftrightarrow [f(a_1)] \neq [f(a_2)] \Longleftrightarrow C(f(a_1), f(a_2))$
$(\bullet)\varphi = (x_1 = x_2)$ Нека $a_1, a_2 \in A$. $a_1 = a_2 \Longleftrightarrow f(a_1) = f(a_2)$
2)$\varphi = \neg\varphi_1$ — доказателството е очевидно
3)$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ — доказателството е очевидно
4)$\varphi = \exists x \varphi_1$ Нека $a_1, \dots, a_n \in A$.
Нека $\mathcal{A} \models \exists x \varphi_1[a_1, \dots, a_n]$. $\Longrightarrow \exists a \in A :\ \mathcal{A} \models \varphi_1[a, a_1, \dots, a_n] \stackrel{\text{ИП}}{\Longrightarrow} \mathcal{B} \models \varphi_1[f(a), f(a_1), \dots, f(a_n)] \Longrightarrow \mathcal{B} \models \exists x \varphi_1[f(a_1), \dots, f(a_n)]$
Нека $\mathcal{B} \models \exists x \varphi_1[f(a_1), \dots, f(a_n)]$. $\Longrightarrow \exists b \in B :\ \ \mathcal{B} \models \varphi_1[b, f(a_1), \dots, f(a_n)]$
1 сл.) $b = f(a)$ за някое $a \in A$
От ИП $\mathcal{A} \models \varphi_1[a, a_1, \dots, a_n]$. $\Longrightarrow \mathcal{A} \models \exists x \varphi_1[a_1, \dots, a_n]$
2 сл.) $\forall a \in A :\ b \neq f(a)(4)$
2.1 сл.) $b \in [b_i]$ или $b \in [b'_i]$ за някое естествено число i
БОО $b \in [b_i]$ за някое естествено число i
$\exists b' \in [b_i] : b' = f(a)$ за някое $a \neq a_1, \dots, a_n(5)$

$b, b' \in [b_i] \Longrightarrow \neg C(b, b')(6)$
$(3), (6) \Longrightarrow b = b'$ или $P(b, b')$
$(4), (5) \Longrightarrow b \neq b'$
Следователно $P(b, b')$.
$\mathcal{B} \models \lambda_3 << $ вж.стр. $3 >>, (6) \Longrightarrow \neg L(b, b')$
Дефинираме функция $g:\ B \longrightarrow B$ така:

$$g(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} b' & \text{ако } x = b \\ b & \text{ако } x = b' \\ x & \text{иначе} \end{cases}$$

Очевидно g е биекция. Ще докажем, че g е автоморфизъм.
Нека $b_1, b_2 \in B$.
a сл.) $b_j \neq b, b_j \neq b' \quad j = 1, 2$
$b_1 R b_2 \Longleftrightarrow g(b_1) R g(b_2) \quad R = P, C, L, =$
b сл.) $b_1 \neq b, b',\ b_2 \in \{b, b'\}$ БОО $b_2 = b$
Нека $P(b_1, b)$.
$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z) \longrightarrow (x = z) \vee P(x, z))$
Понеже $P(b, b')$, от лема 1 следва $P(b_1, b')$. Следователно $P(g(b_1), g(b_2))$.
Аналогично: $P(g(b_1), g(b_2)) \Longrightarrow P(b_1, b_2)$
Нека $C(b_1, b)$.
$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \{TRANS,\ \forall x \forall y (P(x, y) \longrightarrow P(y, x)),\ \forall x \forall y (C(x, y) \longrightarrow C(y, x))\}$.
От $C(b_1, b), P(b, b')$, използвайки лема 1, заключаваме, че $C(b', b_1)$.
Следователно $C(b_1, b')$, откъдето $C(g(b_1), g(b_2))$.
Аналогично: $C(g(b_1), g(b_2)) \Longrightarrow C(b_1, b_2)$
Нека $L(b_1, b_2)$. Тъй като $P(b, b')$ и $\mathcal{B} \models \lambda_5 <<$ вж.стр. $3 >>$, то:
$L(g(b_1), g(b_2))$.
Аналогично $L(g(b_1), g(b_2)) \Longrightarrow L(b_1, b_2)$
c сл.) $b_2 \neq b, b',\ b_1 \in \{b, b'\}$
Понеже P,C,L са симетрични, доказателството е аналогично, както в случай b.
d сл.) $b_1, b_2 \in \{b, b'\}$ БОО $b_1 = b$ и $b_2 = b'$
Имаме: $P(b_1, b_2), P(g(b_1), g(b_2)); \neg C(b_1, b_2), \neg C(g(b_1), g(b_2))$(заради (3));
$\neg L(b_1, b_2), \neg L(g(b_1), g(b_2))$.
Следователно g е автоморфизъм. Освен това имаме $\mathcal{B} \models \varphi_1[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$. Следователно $\mathcal{B} \models \varphi_1[g(b), g(f(a_1)), \ldots, g(f(a_n))]$, т.е. $\mathcal{B} \models \varphi_1[b', f(a_1), \ldots, f(a_n)]$(тъй като f е инекция, $f(a) \neq f(a_1), \ldots, f(a_n)$). От ИП $\mathcal{A} \models \varphi_1[a, a_1, \ldots, a_n] \Longrightarrow \mathcal{A} \models \exists x \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$
2.2 сл.) $\forall i: \quad b \notin [b_i]$ и $b \notin [b'_i]$
Съществува $a \in A$, такова че не принадлежи на $[a_1], \ldots, [a_n], [a'_1], \ldots, [a'_n]$.
Добавяме към $\mathcal{L}$ константите $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$. Интерпретирайки новите константи с $b, f(a_1), \ldots, f(a_n)$ или с $f(a), f(a_1), \ldots, f(a_n)$, получаваме две структури за по-широкия език, които означаваме с $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, b, f(a_1), \ldots,$

$f(a_n))$ и $\mathcal{B}'' = (\mathcal{B}, f(a), f(a_1), \ldots, f(a_n))$ съответно. Нека $[m_1]$ е единственият клас на еквивалентност, за който $[b]R_{\mathcal{B}}[m_1]$, а $[m_2]$ е единственият клас на еквивалентност, за който $[f(a)]R_{\mathcal{B}}[m_2]$. Разглеждаме игра на Ehrenfeucht-Fraïssè с произволна крайна дължина s и следната стратегия за втория играч: ако първият играч избере b $(f(a))$, вторият избира $f(a)$ (b). В противен случай ако първият играч избере елемент извън $[b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$, то вторият играч избира същия елемент; ако първият избере нов елемент от $[b]$, вторият избира нов елемент от $[f(a)]$, различен от $f(a)$ и обратното; ако първият избере нов елемент от $[m_1]$, вторият избира нов елемент от $[m_2]$ и обратното; ако първият избере вече избран в съответната структура елемент x в $[b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$, вторият избира същия елемент, който тогава е бил избран в другата структура. Нека $b_1, \ldots, b_s$ и $b'_1, \ldots, b'_s$ са съответно от $\mathcal{B}'$ и от $\mathcal{B}''$ по реда на избирането им. $h \stackrel{def}{=} \{< b_i, b'_i > \mid i = 1, \ldots, s\} \cup \{< C^{\mathcal{B}'}, C^{\mathcal{B}''} > \mid C$ - константа от по-широкия език$\}$ Нека $\mathcal{B}'_1$ е подструктурата на $\mathcal{B}'$, породена от $b_1, \ldots, b_n$ и от интерпретациите на константите в $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''_1$ е подструктурата на $\mathcal{B}''$, породена от $b'_1, \ldots, b'_n$ и от интерпретациите на константите в $\mathcal{B}''$. Ще докажем, че h е изоморфизъм на $\mathcal{B}'_1$ върху $\mathcal{B}''_1$.

Лема 2 $\forall l \forall k$:
ако $k < l$ *и* $k, l \in \{1, \ldots, s\}$ *и* $b'_k, b'_l \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$, *то:* $(b'_k = b'_l) \iff (b_k = b_l)$

Доказателство: индукция по l
1)$l = 1$ — очевидно
2)$l > 1$
Нека k е произволно естествено число, такова че $(k < l) \wedge (k, l \in \{1, \ldots, s\}) \wedge (b'_k = b'_l) \wedge (b'_k, b'_l \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]))$. БОО $b'_k, b'_l \in [b]$
Допускаме, че $b_k \neq b_l$.
1 сл.) b_l е избрано от първия играч
1.1 сл.) $b_l \neq b_j \ \forall j < l$
Следователно b_l е избран от първи играч като нов елемент в $[f(a)]$, а вторият е избрал ненов елемент в $[b]$ — противоречие
1.2 сл.) $b_l = b_j$ за някое $j < l$
Разглеждаме най-малкото такова j.
Следователно $b'_l = b'_j$.
От ИП за по-голямото от k и j : $b_k = b_j$
Следователно $b_l \neq b_j$ — противоречие
2 сл.) b_l е избрано от втория играч
Нека j е най-малкото естествено число, такова че $b'_l = b'_j$.

Следователно $b_l = b_j$.
От ИП за по-голямото от k и j : $b_k = b_j$
Следователно $b_l = b_k$ — противоречие
В обратната посока доказателството е симетрично. $\square$

Допускаме, че съществуват $x, u, v : < x, u >, < x, v > \in h,\ u \neq v$
a сл.) $u, v \notin [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
Следователно $x = u = v$ — противоречие
b сл.) $u \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2];\ v \notin [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
Получаваме $x \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2];\ x \notin [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$ - противоречие
c сл.) $u, v \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
u и v са в един и същ клас на еквивалентност. $x \neq b, x \neq f(a)$(в противен случай $u = v$) От Лема 2 следва, че $u = v$ — противоречие
Следователно h е функция. Симетрично се доказва, че h е инекция. Очевидно h е сюрекция.
Нека $u, v \in B_1'$.
a сл.) $u, v \notin [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
$h(u) = u, h(v) = v$
Следователно: $\mathcal{B}_1' \models R(x, y)[u, v] \iff \mathcal{B}_1'' \models R(x, y)[h(u), h(v)]$ за $R = P, C, L$
b сл.) $u \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2];\ v \notin [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
$h(v) = v$
БОО $u \in [b]$. Следователно $h(u) \in [f(a)]$.
u и v са в различни класове на еквивалентност $\Longrightarrow \mathcal{B}_1' \models C(x, y)[u, v](7)$
$\mathcal{B} \models \zeta_1,\ \mathcal{B}_1'$ е подструктура на $\mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{B}_1' \models \zeta_1(8)$
$(7), (8) \Longrightarrow \mathcal{B}_1' \models \neg P(x, y)[u, v]$
Допускаме, че $\mathcal{B}_1' \models L(x, y)[u, v]. \Longrightarrow \mathcal{B} \models L(x, y)[u, v] \Longrightarrow [u]R_{\mathcal{B}}[v]$ — противоречие
Следователно $\mathcal{B}_1' \models \neg L(x, y)[u, v]$.
Аналогично $\mathcal{B}_1'' \models C(x, y)[h(u), h(v)],\ \mathcal{B}_1'' \models \neg P(x, y)[h(u), h(v)],\ \mathcal{B}_1'' \models \neg L(x, y)[h(u), h(v)]$
c сл.) $u, v \in [b] \cup [f(a)] \cup [m_1] \cup [m_2]$
Нека $\mathcal{B}_1' \models P(x, y)[u, v]$. Следователно u и v са в един и същи клас на еквивалентност, откъдето $h(u)$ и $h(v)$ също са в един и същи клас на еквивалентност. И тъй като h е инекция, $\mathcal{B}_1'' \models P(x, y)[h(u), h(v)]$. В обратната посока доказателството е аналогично.
Нека $\mathcal{B}_1' \models C(x, y)[u, v]$. Следователно $\mathcal{B}_1' \models \neg P(x, y)[u, v]$.
$\mathcal{B}_1'' \models \neg P(x, y)[h(u), h(v)]$. Следователно $h(u) = h(v)$ или $\mathcal{B}_1'' \models C(x, y)[h(u), h(v)]$.
$\mathcal{B}_1' \models C(x, y)[u, v]$ и h е инекция $\Longrightarrow h(u) \neq h(v)$
В обратната посока доказателството е аналогично.

Очевидно $\mathcal{B}_1' \models L(x,y)[u,v] \Longleftrightarrow \mathcal{B}_1'' \models L(x,y)[h(u),h(v)]$
Следователно h е изоморфизъм на $\mathcal{B}_1'$ върху $\mathcal{B}_1''$ и $\mathcal{B}', \mathcal{B}''$ са елементарно еквивалентни.

Доказахме, че $\mathcal{B} \models \varphi_1[b, f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.
Следователно $\mathcal{B}' \models \varphi_1(c, c_1, \ldots, c_n)$ и $\mathcal{B}'' \models \varphi_1(c, c_1, \ldots, c_n)$. $\Longrightarrow$
$\mathcal{B} \models \varphi_1[f(a), f(a_1), \ldots, f(a_n)]$
От ИП $\mathcal{A} \models \varphi_1[a, a_1, \ldots, a_n]$. $\Longrightarrow \mathcal{A} \models \exists x \varphi_1[a_1, \ldots, a_n]$
Следователно f е елементарно влагане на $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. $\square$

Следствие 1 *$SAPP$ е пълна.*

Доказателство: Ще док., че $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \lambda_4$ << вж.стр. 3 >> .
Нека a е правата, определена от точките $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \quad x_{1,2}, y_{1,2} \in \mathbb{Q}$
1 сл.) a не съвпада с и не е успоредна на ординатната ос
Нека b е произволна права в равнината, перпендикулярна на a и k е ъгловият коефициент на b. Нека β е ъгълът, който b сключва с положителната посока на абсцисната ос. Нека α е ъгълът, който a сключва с положителната посока на абсцисната ос. Правата m с уравнение $y = kx$ е перпендикулярна на a.
$k = -\cot \alpha$.
$-\cot \alpha = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \in \mathbb{Q}$
Следователно $k \in \mathbb{Q}$. Поне 2 от точките на правата m са с рационални координати - $(0,0)$ и $(1,k)$.
2 сл.) a съвпада с или е успоредна на ординатната ос
Очевидно абсцисната ос върши работа.
Следователно $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \lambda_4(1)$.

$\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$ е подструктура на $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5\} \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5\}(2)$
В [1] е доказано, че $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models SAP(3)$
$(1), (2), (3) \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models SAPP$
Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са произволни модели на $SAPP$. Тъй като $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$ е изброима, от Твърдение 1 следва, че $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$ елементарно се влага в $\mathcal{A}$ и в $\mathcal{B}$. Следователно $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$ е елементарно еквивалентна на $\mathcal{A}$ и на $\mathcal{B}$, откъдето $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са елементарно еквивалентни. Следователно $SAPP$ е пълна. $\square$

Твърдение 2 *(i)P не е определим с L, C във всеки модел на $SAPP$; (ii)L не е определим с P във всеки модел на $SAPP$; (iii)тернарният предикат $Co(a,b,c)$ (три прави се пресичат в една точка) не е определим във $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$.*

Доказателство: (i)Нека $\mathcal{A} \models SAPP$. Допускаме, че има формула $\varphi(x,y)$, в която участват само предикатните символи L, C, такава че $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow$

$\varphi(x,y))(1)$. Ще дефинираме изображение f от A в A, което не е инекция и запазва перпендикулярността и пресичането. Ще има две успоредни прави, които ще се изобразяват в една и съща права. Следователно върху тези две прави ще бъде вярна $\varphi(x,y)$, а върху образите им няма да е вярна, понеже те не са успоредни. Тъй като във $\varphi(x,y)$ участват само предикатните символи L и C и f запазва перпендикулярността и пресичането, то $\varphi(x,y)$ ще бъде еднакво вярна върху правите и техните образи, което ще бъде желаното противоречие.
Нека $a \in A$, $g : [a] \mapsto [a]$ е сюрекция, която не е инекция. Дефинираме $f : A \mapsto A$ така:

$$f(b) \overset{def}{=} \begin{cases} b & \text{ако } b \notin [a] \\ g(b) & \text{ако } b \in [a] \end{cases}$$

С индукция по ψ ще докажем, че: за всяка формула $\psi(x_1,\dots,x_n)$, в която не участват други предикатни символи освен L и C, имаме $\forall a_1,\dots,a_n \in A\ \mathcal{A} \models \psi(x_1,\dots,x_n)[a_1,\dots,a_n] \iff \mathcal{A} \models \psi(x_1,\dots,x_n)[f(a_1),\dots,f(a_n)]$.
1)ψ — атомарна формула
$(\bullet)\psi = L(x_1,x_2)$
Нека $a_1, a_2 \in A$.
Тъй като $\forall x \in A([x] = [f(x)])$,то: $a_1 L a_2 \iff [a_1] R_{\mathcal{A}} [a_2] \iff$
$\iff [f(a_1)] R_{\mathcal{A}} [f(a_2)] \iff f(a_1) L f(a_2)$
$(\bullet)\psi = C(x_1,x_2)$
Нека $a_1, a_2 \in A$.
$a_1 C a_2 \iff [a_1] \neq [a_2] \iff [f(a_1)] \neq [f(a_2)] \iff f(a_1) C f(a_2)$
2)$\psi = \neg\psi_1$ — доказателството е очевидно
3)$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ — доказателството е очевидно
4)$\psi = \exists x \psi_1$
Нека ψ има свободни променливи измежду $x_1,\dots,x_n$ и в ψ не участват други предикатни символи освен L и C. Нека $a_1,\dots,a_n \in A$.
Нека $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n]. \implies \exists a \in A :\ \mathcal{A} \models \psi_1[a,a_1,\dots,a_n] \overset{\text{ИП}}{\implies} \mathcal{A} \models \psi_1[f(a),f(a_1),\dots,f(a_n)] \implies \mathcal{A} \models \exists x\psi_1[f(a_1),\dots,f(a_n)]$
Нека $\mathcal{A} \models \exists x\psi_1[f(a_1),\dots,f(a_n)] \implies \exists a' \in A :\ \mathcal{A} \models \psi_1[a',f(a_1),\dots,f(a_n)]$
Тъй като f е сюрекция, има $a \in A :\ f(a) = a'$
От ИП следва, че $\mathcal{A} \models \psi_1[a,a_1,\dots,a_n]. \implies \mathcal{A} \models \exists x\psi_1[a_1,\dots,a_n]$
Следователно за всяка формула $\psi(x_1,\dots,x_n)$, в която участват само L, C, имаме $\forall a_1,\dots,a_n \in A\ \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n] \iff \mathcal{A} \models \psi[f(a_1),\dots,f(a_n)](2)$.
g не е инекция $\implies \exists c,d \in [a] :\ c \neq d$ и $g(c) = g(d)$
Следователно$\neg P(f(c),f(d))$.
$c,d \in [a], c \neq d \implies P(c,d)(3)$
$(1),(3) \implies \mathcal{A} \models \varphi[c,d](4)$

$(2), (4) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[f(c), f(d)](5)$
$(1), (5) \Longrightarrow \mathcal{A} \models P(x, y)[f(c), f(d)]$ — противоречие

(ii)Идеята е същата, както в доказателството на (i).
Нека $\mathcal{A} \models SAPP$.
Разглеждаме $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$. Нека a е права в равнината, на която поне две от точките имат рационални координати, и $[b]$ е единственият клас на еквивалентност, такъв че $[a]R_{\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}}[b]$. Нека $[c] \neq [a]$ и $[c] \neq [b]$. Нека $[a] = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, $[c] = \{c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$. Дефинираме функция $f : F^2_{\mathbb{Q}} \mapsto F^2_{\mathbb{Q}}$ така:

$$f(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x & \text{ако } x \notin [a] \text{ и } x \notin [c] \\ c_i & \text{ако } x = a_i \\ a_i & \text{ако } x = c_i \end{cases}$$

С индукция по ψ ще докажем, че: за всяка формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, в която участва само P, имаме $\forall a_1, \ldots, a_n \in F^2_{\mathbb{Q}} \quad \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[a_1, \ldots, a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \psi(x_1, \ldots, x_n)[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.
1)ψ — атомарна формула
$\psi = P(x_1, x_2)$
Нека $a_1, a_2 \in F^2_{\mathbb{Q}}$.
Нека $P(a_1, a_2)$. Следователно $\neg C(a_1, a_2)$, т.е. a_1, a_2 са в един и същи клас на еквивалентност $\Longrightarrow f(a_1), f(a_2)$ са в един и същи клас на еквивалентност. Следователно $f(a_1) = f(a_2)$ или $P(f(a_1), f(a_2))$, но f е инекция и затова $P(f(a_1), f(a_2))$.
Симетрично: $P(f(a_1), f(a_2)) \Longrightarrow P(a_1, a_2)$.
2)$\psi = \neg\psi_1$ — доказателството е очевидно
3)$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ — доказателството е очевидно
4)$\psi = \exists x \psi_1$ — доказателството е аналогично, както в (i).
Следователно за всяка формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, в която участва само P, имаме $\forall a_1, \ldots, a_n \in F^2_{\mathbb{Q}} \quad \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \psi[a_1, \ldots, a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \psi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.
Допускаме, че има формула $\varphi(x, y)$, в която участва само предикатният символ P, такава че $\mathcal{A} \models \forall x \forall y (L(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y))$. $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}$ елементарно се влага в $\mathcal{A}$, следователно $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \forall x \forall y (L(x, y) \leftrightarrow \varphi(x, y))(1)$.
Нека $x \in [a], y \in [b]$. $[a]R_{\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}}[b] \Longrightarrow L(x, y)(2)$
$(1), (2) \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \varphi[x, y]$
Следователно $\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models \varphi[f(x), f(y)](3)$
$(1), (3) \Longrightarrow \mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}} \models L[f(x), f(y)](4)$
$x \in [a] \Longrightarrow f(x) \in [c]$
$y \in [b] \Longrightarrow f(y) = y$
$(4) \Longrightarrow [f(x)]R_{\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}}[f(y)] \Longrightarrow [c]R_{\mathcal{F}^2_{\mathbb{Q}}}[b]$

Следователно $[a] = [c]$ — противоречие
Следователно L не е определим с P във всеки модел на $SAPP$.

(iii)Идеята е същата, както в доказателството на (i).
Допускаме, че има формула $\varphi(x, y, z)$ в езика $\mathcal{L}$ която дефинира Co във $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$.
За произволни прави в равнината a, b, c имаме: $Co(a, b, c) \iff \mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi(x, y, z)[a, b, c]$
Нека a, b и c се пресичат в една точка. Нека a' е успоредна на a. Имаме $Co(a, b, c)$ и $\neg Co(a', b, c)$. Оттук следва, че $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi(x, y, z)[a, b, c]$ и $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \not\models \varphi(x, y, z)[a', b, c]$
Дефинираме h — биекция от $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ във $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$:

$$h(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x & \text{ако } x \neq a, a' \\ a' & \text{ако } x = a \\ a & \text{ако } x = a' \end{cases}$$

Очевидно h е автоморфизъм. Следователно $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi(x, y, z)[h(a), h(b), h(c)]$, т.е. $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \varphi(x, y, z)[a', b, c]$, което е желаното противоречие. $\square$

Твърдение 3 *Проблемът дали една затворена формула логически следва от $SAPP$ е $PSPACE$ пълен.*

Доказателство:
Нека $EQ^\infty = \{\varphi : \ \varphi$ е затворена формула в езика $\mathcal{L}_1$ и φ е вярна във всички безкрайни структури$\}$, където $\mathcal{L}_1 = \langle ; ; = \rangle$.
За да докажем, че проблемът дали една затворена формула логически следва от $SAPP$ е в $PSPACE$, ще използваме, че проблемът за принадлежност към EQ^∞ е в $PSPACE$. Това е доказано в [1]. Достатъчно е на всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}$ да съпоставим затворена формула $\widehat{\varphi}$ в езика $\mathcal{L}_1$, така че $\widehat{\varphi}$ да може алгоритмично да се получава от φ с използване на клетки на паметта не повече от полином от дължината на φ и да бъде вярно следното: φ е вярна във всеки модел на $SAPP \iff \widehat{\varphi} \in EQ^\infty$. Нека $\mathcal{A}^*$ е подструктурата на $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ (разглеждаме езика $\mathcal{L}$), която се получава, като махнем правите, успоредни на ординатната ос, правите, успоредни на абсцисната ос, и тези с уравнение от вида $y = bx$. Нека $\mathcal{R}$ е структурата за езика $\mathcal{L}_1$ с универсум $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Най-напред ще докажем, че за всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}$ е вярно: φ е вярна във всеки модел на $SAPP \iff \mathcal{A}^* \models \varphi$. След това ще докажем, че за всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}_1$ е вярно: $\mathcal{R} \models \varphi \iff \varphi \in EQ^\infty$. Накрая на всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}$ ще съпоставим затворена формула $\widehat{\varphi}$ в езика $\mathcal{L}_1$, така че $\mathcal{A}^* \models \varphi \iff \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}$.

Ще докажем, че $\mathcal{A}^*$ е модел на $SAPP$.
Нека $x, y_1, \dots, y_n \in A^*$ и $P(x, y_1), \dots, P(x, y_n)$. Нека правите $x, y_1, \dots, y_n$ имат уравнения съответно $Y = aX + a',\ Y = aX + b_1, \dots, Y = aX + b_n$. Нека $b \neq 0, a', b_1, \dots, b_n$. Тогава правата z с уравнение $Y = aX + b$ принадлежи на A^* и е вярно: $P(x, z), P(z, y_1), \dots, P(z, y_n)$.
Нека $x, y_1, \dots, y_n \in A^*$ и $C(x, y_1), \dots, C(x, y_n)$. Нека правите $x, y_1, \dots, y_n$ имат уравнения съответно $Y = aX + a',\ Y = b_1X + b_1', \dots, Y = b_nX + b_n'$. Нека $b \neq 0, a, b_1, \dots, b_n$. Тогава правата z с уравнение $Y = bX + 1$ принадлежи на A^* и е вярно: $C(x, z), C(z, y_1), \dots, C(z, y_n)$.
Нека $x \in A^*$ и x има уравнение $Y = aX + b$. Правата y с уравнение $Y = \frac{-1}{a}X + 1$ принадлежи на A^* и е вярно: $L(x, y)$.
Останалите аксиоми на $SAPP$ са универсални формули, верни са в $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ и $\mathcal{A}^*$ е подструктура на $\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}}$ — тези аксиоми са верни и в $\mathcal{A}^*$. Следователно $\mathcal{A}^*$ е модел на $SAPP$.

$\mathcal{A}^*$ е модел на $SAPP$, $SAPP$ е пълна. Следователно $\mathcal{A}^*$ е елементарно еквивалентна на всеки модел на $SAPP$. Оттук заключаваме, че за всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}$ е вярно: φ е вярна във всеки модел на $SAPP \Longleftrightarrow \mathcal{A}^* \models \varphi$.

Лема 3 *Нека φ е затворена формула в езика $\mathcal{L}_1$. Тогава $\mathcal{R} \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in EQ^\infty$.*

Доказателство: Нека $\mathcal{R} \models \varphi(1)$ и $\mathcal{A}$ е безкрайна структура за езика $\mathcal{L}_1$. Ще докажем, че $\mathcal{A} \models \varphi$.
1 сл.) $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \Longrightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{R}(2)$
$(1), (2) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$
2 сл.) $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{\mathbb{R}}}$
Понеже $\mathcal{R}$ е безкрайна структура за $\mathcal{L}_1$, от теоремата на Льовенхайм-Скулем(нагоре) следва, че има структура $\mathcal{B}:\ \mathcal{R} \prec \mathcal{B}$ и $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$.
$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} \Longrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}(3)$
$\mathcal{R} \prec \mathcal{B} \Longrightarrow \mathcal{R} \equiv \mathcal{B}(4)$
$(3), (4) \Longrightarrow \mathcal{R} \equiv \mathcal{A}(5)$
$(1), (5) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$
3 сл.) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathbb{R}}}$
Нека $X \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{A}}$.
От теоремата на Льовенхайм-Скулем(надолу) следва, че има структура $\mathcal{B}$, такава че $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}},\ \mathcal{B} \prec \mathcal{R}$.
$\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}} \Longrightarrow \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$
Следователно $\mathcal{A} \models \varphi$.

Нека $\varphi \in EQ^{\infty}$.
Понеже $\mathcal{R}$ е безкрайна структура, следва че $\mathcal{R} \models \varphi$. $\square$

Нека a е права с уравнение $y = bx + c$; $a^1 \stackrel{def}{=} b,\ a^2 \stackrel{def}{=} -1/b,\ a^3 \stackrel{def}{=} c$

На всяка формула в езика $\mathcal{L}$ φ съпоставяме формула $\widehat{\varphi}$ в езика $\mathcal{L}_1$ така:
1)φ — атомарна
($\bullet$)$\varphi = P(x_1, x_2) \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \varphi_1$
($\bullet$)$\varphi = C(x_1, x_2) \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \varphi_2$
($\bullet$)$\varphi = L(x_1, x_2) \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \varphi_3$
($\bullet$)$\varphi = (x_1 = x_2) \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} (x_1^1 = x_2^1) \wedge (x_1^2 = x_2^2) \wedge (x_1^3 = x_2^3)$
2)$\varphi = \neg\varphi' \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \neg\widehat{\varphi'}$
3)$\varphi = \varphi' \wedge \varphi'' \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \widehat{\varphi'} \wedge \widehat{\varphi''}$
4)$\varphi = \exists x_n \varphi'$ и φ' има свободни променливи $x_1, \dots, x_n \quad \widehat{\varphi} \stackrel{def}{=} \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3 (\widehat{\varphi'} \wedge \kappa_n)$

,където:
$\varphi_1 \stackrel{def}{=} (x_1^1 = x_2^1) \wedge (x_1^3 \neq x_2^3)$
$\varphi_2 \stackrel{def}{=} x_1^1 \neq x_2^1$
$\varphi_3 \stackrel{def}{=} (x_1^1 = x_2^2) \wedge (x_2^1 = x_1^2)$
за всяко естествено число n κ_n е формула със свободни променливи $x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \dots, x_n^1, x_n^2$, дефинирана така:

$$\kappa_n \stackrel{def}{=} \bigwedge_{i<n} \left[(x_i^1 = x_n^1 \leftrightarrow x_i^2 = x_n^2) \wedge (x_i^1 = x_n^2 \leftrightarrow x_n^1 = x_i^2) \right] \wedge (x_n^1 \neq x_n^2)$$

С $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ ще означаваме $a_1^1, a_1^2, a_1^3, \dots, a_n^1, a_n^2, a_n^3$, с $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ ще означаваме $b_1^1, b_1^2, \mathbf{a_1^3}, \dots, b_n^1, b_n^2, \mathbf{a_n^3}$.

Лема 4 *За всяка формула φ в езика $\mathcal{L}$ е вярно:*
ако φ има свободни променливи измежду $x_1, \dots, x_n$, то:
за произволни $a_1, \dots, a_n \in A^*$ $\quad \mathcal{A}^* \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}]$

Доказателство: индукция по φ
1)φ — атомарна
Нека $a_1, \dots, a_n \in A^*$.
($\bullet$)$\varphi = P(x_1, x_2)$
$P(a_1, a_2) \iff a_1^1 = a_2^1 \wedge a_1^3 \neq a_2^3$
($\bullet$)$\varphi = C(x_1, x_2)$
$C(a_1, a_2) \iff a_1^1 \neq a_2^1$

$(\bullet)\varphi = L(x_1, x_2)$
$\overrightarrow{p}(1, a_1^1) \parallel a_1,\ \overrightarrow{q}(1, a_2^1) \parallel a_2$
Следователно $a_1 \perp a_2 \iff \overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q} \iff \overrightarrow{p}\,\overrightarrow{q} = 0 \iff 1 \cdot 1 + a_1^1 \cdot a_2^1 = 0 \iff a_1^1 \cdot a_2^1 = -1 \iff a_1^1 = a_2^2 \iff a_1^1 = a_2^2 \wedge a_1^2 = a_2^1$
$(\bullet)\varphi = (x_1 = x_2)$
$a_1 = a_2 \iff a_1^1 = a_2^1 \wedge a_1^2 = a_2^2 \wedge a_1^3 = a_2^3$
$2)\varphi = \neg\varphi'$ — доказателството е очевидно
$3)\varphi = \varphi' \wedge \varphi''$ — доказателството е очевидно
$4)\varphi = \exists x_n \varphi'$
Нека φ има свободни променливи измежду $x_1, \ldots, x_{n-1}$ и $a_1, \ldots, a_{n-1} \in A^*$.
Нека $\mathcal{A}^* \models \exists x_n \varphi'[a_1, \ldots, a_{n-1}]. \implies \exists a_n \in A^* : \quad \mathcal{A}^* \models \varphi'[a_1, \ldots, a_n]$
От тук и от ИП следва, че $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$.
$a_1, \ldots, a_n$ са прави $\implies \mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$
Следователно $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3 (\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n-1}}]$.
Нека $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3 (\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n-1}}]. \implies$ има реални числа, различни от 0 — $a_n^1, a_n^2, a_n^3 :\ \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}](1),\ \mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$
Възможно е $a_n^1 \cdot a_n^2 \neq -1$, затова не можем да приложим ИП и трябва да намерим b_n^1, b_n^2, b_n^3, такива че $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n-1}}, \overline{b_n}]$ и $b_n^1 \cdot b_n^2 = -1$. За целта за фиксиран брой тройки реални числа, удовлетворяващи определени условия, ще дефинираме съответни на тях същия брой тройки реални числа, такива че прозведението на първите два елемента на всяка тройка е -1. Ще докажем, че за всяка формула φ в езика $\mathcal{L}$ $\widehat{\varphi}$ е еднакво вярна върху реални числа и техните съответни (ако има такива).
За всяко естествено число n дефинираме формула ψ_n със свободни променливи $x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, \ldots, x_n^1, x_n^2$ по следния начин:

$$\psi_n \overset{def}{=} \bigwedge_{1 \le i < j \le n} \left[(x_i^1 = x_j^1 \leftrightarrow x_i^2 = x_j^2) \wedge (x_i^1 = x_j^2 \leftrightarrow x_j^1 = x_i^2)\right] \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i^1 \neq x_i^2)$$

Дефиниция 1 *Нека n е цяло положително число. Нека $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ са реални числа, различни от 0, такива че: $\mathcal{R} \models \psi_n[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$. Ще казваме,че реалните числа $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са сьответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$, ако:*
1)за всяко $i = 1, \ldots, n \quad b_i^1 \cdot b_i^2 = -1$
2)за всяко $i = 1, 2, 3$ и за вс. $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\},\ i_1 < i_2$ е вярно: $\mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{i_2}}] \iff \mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{i_2}}]$

Очевидно ако $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$, то за всяко $i = 1, 2, 3$ и за вс. $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, n\}$ е вярно: $\mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{i_2}}] \iff \mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{i_2}}]$

За да довършим доказателството ще ни бъде достатъчно да докажем следните две леми:

Лема 5 *Нека* $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ *са съответни на* $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ *и* $a^1_{n+1}, a^2_{n+1}, a^3_{n+1}$ *са реални числа, различни от 0, такива че* $\mathcal{R} \models \kappa_{n+1}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}]$. *Тогава съществуват реални числа* b^1_{n+1}, b^2_{n+1}, *такива че* $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n+1}}$ *са съответни на* $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$.

Лема 6 *За всяка формула* φ *в езика* $\mathcal{L}$ *е вярно: ако* $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ *са съответни на* $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$, *то* $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}] \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$.

$a_1, \dots, a_{n-1} \in A^* \Longrightarrow \overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}$ са съответни на себе си. От друга страна $\mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}]$. От Лема 5 следва, че съществуват реални числа b^1_n, b^2_n : $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{a_n}(2)$
От Лема 6,(1),(2) следва, че $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi'}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{b_n}]$.
Нека b_n е правата с уравнение $y = b^1_n x + a^3_n$.
От ИП: $\mathcal{A}^* \models \varphi'[a_1, \dots, a_{n-1}, b_n]. \Longrightarrow \mathcal{A}^* \models \exists x_n \varphi'[a_1, \dots, a_{n-1}]$ $\square$

Доказателство на Лема 5:
1 сл.) $n = 0$
$b^1_{n+1} \stackrel{def}{=} a^1_{n+1} \quad b^2_{n+1} \stackrel{def}{=} -1/b^1_{n+1}$
2 сл.) $n > 0$
$\mathcal{R} \models \psi_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}],\ \mathcal{R} \models \kappa_{n+1}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}] \Longrightarrow \mathcal{R} \models \psi_{n+1}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}]$
2.1 сл.) $a^1_{n+1} = a^1_j$ за някое $j \in \{1, \dots, n\}$
$a^1_{n+1} = a^1_j,\ \mathcal{R} \models \kappa_{n+1}[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}] \Longrightarrow a^2_{n+1} = a^2_j$
$b^1_{n+1} \stackrel{def}{=} b^1_j,\ b^2_{n+1} \stackrel{def}{=} b^2_j$
Нека $i \in \{1, \dots, n\}$.
$\mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}] \Longleftrightarrow a^1_i = a^1_{n+1} \wedge a^3_i \neq a^3_{n+1} \Longleftrightarrow a^1_i = a^1_j \wedge a^3_i \neq a^3_{n+1}(1)$
$a^1_i = a^1_j \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_i}, \overline{a_j}] \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_j}] \Longleftrightarrow b^1_i = b^1_j$
Следователно (1) $\Longleftrightarrow b^1_i = b^1_j \wedge a^3_i \neq a^3_{n+1} \Longleftrightarrow b^1_i = b^1_{n+1} \wedge a^3_i \neq a^3_{n+1} \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
$\mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}] \Longleftrightarrow a^1_i \neq a^1_{n+1} \Longleftrightarrow a^1_i \neq a^1_j \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{a_i}, \overline{a_j}] \Longleftrightarrow$ (защото $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$) $\mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_j}] \Longleftrightarrow b^1_i \neq b^1_j \Longleftrightarrow b^1_i \neq b^1_{n+1} \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
$\mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}] \Longleftrightarrow b^1_{n+1} = b^2_i \wedge b^2_{n+1} = b^1_i \Longleftrightarrow b^1_j = b^2_i \wedge b^2_j = b^1_i \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_j}] \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_j}] \Longleftrightarrow a^1_i = a^2_j \wedge a^1_j = a^2_i \Longleftrightarrow a^1_i = a^2_{n+1} \wedge a^1_{n+1} = a^2_i \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$.
2.2 сл.) за всяко $j \in \{1, \dots, n\} \quad a^1_{n+1} \neq a^1_j(2)$

Нека $i \in \{1, \ldots, n\}$.
$(2) \Longrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi_2[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}],\ \mathfrak{R} \models \neg\varphi_1[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}]$
2.2.1 сл.) за някое $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad a^1_{n+1} = a^2_j$ и $a^2_{n+1} = a^1_j$
$b^1_{n+1} \stackrel{def}{=} b^2_j \quad b^2_{n+1} \stackrel{def}{=} b^1_j$
Допускаме, че $b^1_i = b^1_{n+1}$.
Следователно $b^1_i = b^2_j$ и $b^2_i = b^1_j$. $\Longrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_j}]$ Следователно $\mathfrak{R} \models \varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_j}]$(защото $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$). $\Longrightarrow a^1_i = a^2_j$, т.е. $a^1_i = a^1_{n+1}$ — противоречие
Следователно $b^1_i \neq b^1_{n+1}$. $\Longrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}],\ \mathfrak{R} \models \neg\varphi_1[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
$\mathfrak{R} \models \varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}] \Longleftrightarrow a^1_{n+1} = a^2_i \wedge a^2_{n+1} = a^1_i \Longleftrightarrow a^2_j = a^2_i \wedge a^1_j = a^1_i \Longleftrightarrow \mathfrak{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_i}, \overline{a_j}] \Longleftrightarrow \mathfrak{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_j}] \Longleftrightarrow b^1_i = b^1_j \Longleftrightarrow b^1_i = b^1_j \wedge b^2_i = b^2_j \Longleftrightarrow b^1_i = b^2_{n+1} \wedge b^2_i = b^1_{n+1} \Longleftrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$.
2.2.2 сл.) за всяко $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\quad a^1_{n+1} \neq a^2_j$ или $a^2_{n+1} \neq a^1_j \Longrightarrow \mathfrak{R} \models \neg\varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_{n+1}}]$
Полагаме b^1_{n+1} да бъде число, различно от $0, b^1_1, b^1_2, \ldots, b^1_n, b^2_1, b^2_2, \ldots, b^2_n$.
$b^2_{n+1} \stackrel{def}{=} -1/b^1_{n+1}$
$b^1_{n+1} \neq b^1_i \Longrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi_2[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}],\ \mathfrak{R} \models \neg\varphi_1[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
$b^1_{n+1} \neq b^2_i \Longrightarrow \mathfrak{R} \models \neg\varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$. $\square$

За да докажем Лема 6, е необходимо да докажем най-напред следната лема:

Лема 7 *Нека $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$ и $b^1_{n+1}, b^2_{n+1}, b^3_{n+1}$ са реални числа, различни от 0 и такива че $b^1_{n+1} \cdot b^2_{n+1} = -1$. Тогава съществуват реални числа $a^1_{n+1}, a^2_{n+1}, a^3_{n+1}$, такива че $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$.*

Доказателство: $a^3_{n+1} \stackrel{def}{=} b^3_{n+1}$
1 сл.) за някое $i = 1, \ldots, n$ $\quad b^1_{n+1} = b^1_i$
$a^1_{n+1} \stackrel{def}{=} a^1_i,\ a^2_{n+1} \stackrel{def}{=} a^2_i$
Нека $j \in \{1, \ldots, n\}$.
Нека $a^1_j = a^1_{n+1}$. Следователно $a^1_j = a^1_i(1)$
$\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \Longrightarrow \mathfrak{R} \models \psi_n[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}](2)$
$i, j \in \{1, \ldots, n\}, (1), (2) \Longrightarrow a^2_j = a^2_i$, т.е. $a^2_{n+1} = a^2_j$
Аналогично — $a^2_{n+1} = a^2_j \Longrightarrow a^1_j = a^1_{n+1}$
Нека $a^1_j = a^2_{n+1}$. Следователно $a^1_j = a^2_i(3)$
$i, j \in \{1, \ldots, n\}, (3), (2) \Longrightarrow a^1_i = a^2_j$ Следователно $a^1_{n+1} = a^2_j$.

Аналогично — $a^1_{n+1} = a^2_j \Longrightarrow a^1_j = a^2_{n+1}$
$i \in \{1, \ldots, n\}, (2) \Longrightarrow a^1_i \neq a^2_i \quad a^1_{n+1} \neq a^2_{n+1}$
Следователно $\mathcal{R} \models \psi_{n+1}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}]$.
$\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \Longrightarrow$ за всяко $i = 1, 2, 3$ и за вс. $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ е вярно: $\mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_i}] \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_i}]$
Следователно за $i = 2, 3$ и за вс. $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$ е вярно: $\mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{n+1}}]$
$\Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_i[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{n+1}}](4)$
Нека $i_1 \in \{1, \ldots, n\}$.
Нека $\mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{n+1}}]. \Longrightarrow a^1_{i_1} = a^1_{n+1}, a^3_{i_1} \neq a^3_{n+1}$
$a^1_{i_1} = a^1_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{n+1}}](5)$
$(4), (5) \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{n+1}}] \Longrightarrow b^1_{i_1} = b^1_{n+1}(6)$
$(6), a^3_{i_1} \neq a^3_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{n+1}}]$
Нека $\mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{b_{i_1}}, \overline{b_{n+1}}]$.
Аналогично: $a^1_{i_1} = a^1_{n+1}$
Следователно $\mathcal{R} \models \varphi_1[\overline{a_{i_1}}, \overline{a_{n+1}}]$.
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$.
2 сл.) за всяко $i = 1, \ldots, n \quad b^1_{n+1} \neq b^1_i$
Нека $j \in \{1, \ldots, n\}$.
$b^1_j \neq b^1_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{b_j}, \overline{b_{n+1}}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{b_j}, \overline{b_{n+1}}]$
2.1 сл.) за всяко $i = 1, \ldots, n \quad b^1_{n+1} \neq b^2_i$
Нека $a \neq a^1_1, \ldots, a^1_n, a^2_1, \ldots, a^2_n, 0$ и $b \neq a, a^1_1, \ldots, a^1_n, a^2_1, \ldots, a^2_n, 0$.
$a^1_{n+1} \stackrel{def}{=} a, a^2_{n+1} \stackrel{def}{=} b$
$a^1_j \neq a^1_{n+1}, a^2_j \neq a^2_{n+1}, a^1_j \neq a^2_{n+1}, a^1_{n+1} \neq a^2_j$
Следователно $\mathcal{R} \models \psi_{n+1}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}]$.
$a^1_j \neq a^1_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}]$
$a^1_j \neq a^2_{n+1} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}]$
$b^1_{n+1} \neq b^2_j \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{b_j}, \overline{b_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$.
2.2 сл.) за някое $i \in \{1, \ldots, n\} \quad b^1_{n+1} = b^2_i$
Следователно $b^1_i = b^2_{n+1}$.
$a^1_{n+1} \stackrel{def}{=} a^2_i, a^2_{n+1} \stackrel{def}{=} a^1_i$
Допускаме, че $a^1_{n+1} = a^2_{n+1}. \Longrightarrow a^2_i = a^1_i$ — противоречие с (2)$\Longrightarrow a^1_{n+1} \neq a^2_{n+1}$
Заради (2) $a^1_i = a^1_j \Longleftrightarrow a^2_i = a^2_j$ и $a^1_i = a^2_j \Longleftrightarrow a^1_j = a^2_i$
Следователно $a^2_{n+1} = a^1_j \Longleftrightarrow a^1_{n+1} = a^2_j$ и $a^1_{n+1} = a^1_j \Longleftrightarrow a^2_j = a^2_{n+1}$
Следователно $\mathcal{R} \models \psi_{n+1}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}]$.
Допускаме, че $a^1_{n+1} = a^1_j. \Longrightarrow a^2_i = a^1_j$ Следователно $a^2_j = a^1_i$ и $\mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{a_i}, \overline{a_j}]$.
Следователно $\mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{b_i}, \overline{b_j}]. \Longrightarrow b^2_i = b^1_j$

$b^1_{n+1} = b^1_j$ — противоречие
Следователно $a^1_{n+1} \neq a^1_j. \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_2[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}]$
2.2.1 сл.) $b^1_{n+1} = b^2_j(7)$
Следователно $b^1_j = b^2_{n+1}(8)$
$(7), (8) \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{b_j}, \overline{b_{n+1}}]$
$b^1_i = b^1_j \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_j}, \overline{b_i}]$, но $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \Longrightarrow$ $\mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_j}, \overline{a_i}] \Longrightarrow a^1_i = a^1_j(9)$
$(2), (9), i, j \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow a^2_i = a^2_j$
Следователно $a^1_{n+1} = a^2_j, a^2_{n+1} = a^1_j. \Longrightarrow \mathcal{R} \models \varphi_3[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$.
2.2.2 сл.) $b^1_{n+1} \neq b^2_j \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{b_j}, \overline{b_{n+1}}]$
Допускаме, че $a^2_{n+1} = a^1_j$. Следователно $a^1_i = a^1_j. \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_j}, \overline{a_i}]$, но $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n} \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_j}, \overline{b_i}] \Longrightarrow b^1_i = b^1_j$
Следователно $b^2_i = b^2_j = b^1_{n+1}$ — противоречие
Следователно $a^2_{n+1} \neq a^1_j. \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{a_j}, \overline{a_{n+1}}]$
Следователно $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n+1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n+1}}$. $\square$

Доказателство на Лема 6:
индукция по φ
1)φ — атомарна
Нека $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$.
$(\bullet)\varphi = P(x_1, x_2)$ или $\varphi = C(x_1, x_2)$ или $\varphi = L(x_1, x_2)$
$\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}] \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}]$, защото $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$
$(\bullet)\varphi = (x_1 = x_2)$
Нека $a^1_1 = a^1_2, a^2_1 = a^2_2, a^3_1 = a^3_2. \Longrightarrow \mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{a_1}, \overline{a_2}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_1}, \overline{a_2}]$
$\mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{a_1}, \overline{a_2}]$
Понеже $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}$, имаме $\mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{b_1}, \overline{b_2}](1),\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{b_1}, \overline{b_2}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{b_1}, \overline{b_2}] \Longrightarrow b^1_1 = b^1_2(2)$
$(1), (2) \Longrightarrow b^3_1 = b^3_2$
Следователно $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}]$.
Нека $b^1_1 = b^1_2, b^2_1 = b^2_2, b^3_1 = b^3_2$.
Следователно $\mathcal{R} \models \neg\varphi_1[\overline{a_1}, \overline{a_2}](4),\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_2[\overline{a_1}, \overline{a_2}],\ \mathcal{R} \models \neg\varphi_3[\overline{a_1}, \overline{a_2}]. \Longrightarrow$ $a^1_1 = a^1_2(5)$
$\mathcal{R} \models \psi_n[a_1, \ldots, a_n](6)$
$(5), (6) \Longrightarrow a^2_1 = a^2_2(7)$
$(4), (5), (7) \Longrightarrow \mathcal{R} \models \widehat{\varphi}[\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n}]$
2)$\varphi = \neg\varphi'$ — доказателството е очевидно
3)$\varphi = \varphi' \wedge \varphi''$ — доказателството е очевидно
4)$\varphi = \exists x_n \varphi'$ и φ' има свободни променливи измежду $x_1, \ldots, x_n$
Нека $\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_{n-1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_{n-1}}$.

Нека $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3(\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}]$. $\Longrightarrow$ има реални числа, различни от 0 — a_n^1, a_n^2, a_n^3, такива че $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}]$
Понеже $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}$ и $\mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}]$, от Лема 5 следва, че съществуват реални числа b_n^1, b_n^2 : $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$
От ИП: $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$
$\mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$
Следователно $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3(\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}]$.
Нека $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3(\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}]$. $\Longrightarrow$ има реални числа, различни от 0 — b_n^1, b_n^2, a_n^3 : $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$
Понеже $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}$ са съответни на $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}$ и $\mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$, от Лема 5 следва, че съществуват B_n^1, B_n^2 : $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}, B_n^1, B_n^2, a_n^3$ са съответни на $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n} \Longrightarrow B_n^1 \cdot B_n^2 = -1$
Тъй като $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_n}]$, от ИП следва, че $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}, \overline{B_n}]$.
Тъй като $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_{n-1}}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}$ и $B_n^1 \cdot B_n^2 = -1$, от Лема 7 следва, че съществуват A_n^1, A_n^2 : $\overline{b_1}, \dots, \overline{B_n}$ са съответни на $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{A_n}$.
Следователно $\mathcal{R} \models \widehat{\varphi}'[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{A_n}]$(от ИП)
$\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{A_n}$ имат съответни $\Longrightarrow \mathcal{R} \models \psi_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{A_n}] \Longrightarrow \mathcal{R} \models \kappa_n[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}, \overline{A_n}]$
Следователно $\mathcal{R} \models \exists x_n^1 \exists x_n^2 \exists x_n^3(\widehat{\varphi}' \wedge \kappa_n)[\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n-1}}]$. $\square$

κ_n има дължина $P_1(n)$, където $P_1(n) = 70n - 64$
$P_2(n) \stackrel{def}{=} 70n^2 + 13n$
Дължината на една формула φ означаваме с $d(\varphi)$.

Лема 8 *За всяка формула φ в езика $\mathcal{L}$ е вярно: ако φ има дължина n, то $\widehat{\varphi}$ има дължина $\leq P_2(n)$.*

Доказателство: индукция по φ
1)φ — атомарна — доказателството е очевидно
2)$\varphi = \neg\varphi'$
Нека $d(\varphi) = n$.
$d(\widehat{\varphi}) = 1 + d(\widehat{\varphi}')$
$d(\varphi') = n - 1$
От ИП: $d(\widehat{\varphi}') \leq P_2(n-1)$
Следователно $d(\widehat{\varphi}) \leq 1 + P_2(n-1) < P_2(n)$.
3)$\varphi = \varphi' \wedge \varphi''$
Нека $d(\varphi') = k'$, $d(\varphi'') = k''$.
$d(\widehat{\varphi}) = 1 + d(\widehat{\varphi}') + d(\widehat{\varphi''}) \leq 1 + P_2(k') + P_2(k'') = 1 + 70(k'^2 + k''^2) + 13(k' + k'') < P_2(k' + k'' + 1)$

4)$\varphi = \exists x_n \varphi'$ и φ' има свободни променливи $x_1, \ldots, x_k \Longrightarrow k \leq d(\varphi')$
Следователно $k < n$.
$\widehat{\varphi} = \exists x_k^1 \exists x_k^2 \exists x_k^3 (\widehat{\varphi'} \wedge \kappa_k)$
Нека $d(\varphi) = n$.
От ИП: $d(\widehat{\varphi'}) \leq P_2(n-2)$
$d(\widehat{\varphi}) \leq 9 + P_1(k) + P_2(n-2) < 9 + P_1(n) + P_2(n-2) < P_2(n)$ $\square$

За всяка затворена формула φ в езика $\mathcal{L}$ е вярно: φ е вярна във всеки модел на $SAPP \Longleftrightarrow \mathcal{A}^* \models \varphi \Longleftrightarrow \mathcal{R} \models \widehat{\varphi} \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} \in EQ^\infty$
Проблемът за принадлежност към EQ^∞ е в $PSPACE$. Следователно има полином P и алгоритъм $\mathcal{A}$, който по дадена формула φ с дължина n използва пространство с размер $\leq P(n)$ и разпознава дали $\varphi \in EQ^\infty$. Разглеждаме алгоритъма $\mathcal{B}$: $\mathcal{B}(\varphi) \stackrel{def}{=} \mathcal{A}(\widehat{\varphi})$. Нека φ е формула в езика $\mathcal{L}$ с дължина n. За генерирането на $\widehat{\varphi}$ $\mathcal{B}$ използва пространство с размер $\leq P^*(n)$(Лема 8), където P^* е някакъв полином. Нека $d(\widehat{\varphi}) = k$. Имаме $n \leq k \leq P_2(n)$. За достатъчно големи n $P(k) \leq P(P_2(n))$ — следователно $\mathcal{B}$ използва пространство с размер $\leq P^*(n) + P(P_2(n))$ и разпознава дали φ е вярна във всеки модел на $SAPP$. Следователно проблемът дали една затворена формула логически следва от $SAPP$ е в $PSPACE$.

За да докажем, че проблемът дали една затворена формула логически следва от $SAPP$ е $PSPACE$-hard, е достатъчно да докажем следната лема:

Лема 9 *$SAPP$ е консервативно разширение на SAP.*

В статията Line-based affine reasoning in Euclidean plane на Ф. Балбиани и Т. Тинчев е доказано, че SAP е консервативно разширение на EQ^∞. Оттук и от лема 9 следва, че $SAPP$ е консервативно разширение на EQ^∞(1). Разглеждаме полинома $P(x) = x$ и алгоритъм $\mathcal{B}$, който по дадена затворена формула в езика $\mathcal{L}_1$ дава същата формула. Нека χ е произволна затворена формула в езика $\mathcal{L}_1$.
$d(\mathcal{B}(\chi)) \leq P(d(\chi))$
(1) $\Longrightarrow (\chi \in EQ^\infty \Longleftrightarrow \chi$ е вярна във всеки модел на $SAPP)$
Следователно проблемът за принадлежност към $SAPP$ е $PSPACE$-hard. $\square$

Доказателство на Лема 9: Нека $\mathcal{A}$ е произволен модел на SAP. Можем да го обогатим до модел на $SAPP$ по следния начин: понеже $\mathcal{A} \models SAP$, A има безбройно много безкрайни класове на еквивалентност по отношение на релацията $\neg C$. Има кардинал, с елементите на който можем да индексираме тези класове на еквивалентност. Дефинираме два

елемента на A да бъдат перпендикулярни тогава и само тогава, когато единият е в клас с четен индекс β, а другият е в клас с индекс — наследника на β.
Множеството от класовете на еквивалентност X е равномощно с някакъв кардинал α. Нека f е биекция между X и α.
$L(a,b) \overset{def}{\longleftrightarrow}$ ($f([a])$ е четен ординал и $f([b]) = s(f([a]))$ или ($f([b])$ е четен ординал и $f([a]) = s(f([b]))$ за произволни $a, b \in A$
Очевидно L е симетрична.
Нека $x, y, z \in A$ и $L(z,x), L(z,y), x \neq y \quad ?P(x,y)$
БОО $f([z])$ е четен ординал и $f([x]) = f([y]) = s(f([z]))$.
Следователно $[x] = [y]$ и $P(x,y)$.
λ_3 и λ_4 << вж.стр. 3 >> очевидно са верни в обогатената структура $\mathcal{A}$.
Нека $x, y, z \in A$ и $P(x,y), L(z,x)$.Следователно $[x] = [y]$.
БОО $f([z])$ е четен ординал и $f([x]) = s(f([z]))$.
Следователно $L(z,y)$.
Получихме, че произволен модел на SAP може да се обогати до структура за езика $\mathcal{L}$, която е модел на $SAPP$.

Нека φ е затворена формула в езика $\mathcal{L}'$ с предикатни символи P, C и $=$. Нека φ е вярна във всеки модел на $SAPP$. Нека $\mathcal{A} \models SAP$. Ще докажем, че $\mathcal{A} \models \varphi$.
$\mathcal{A}$ може да се обогати до структура $\mathcal{A}'$ за езика $\mathcal{L}$, която е модел на $SAPP$.
$\mathcal{A}' \models \varphi \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$
Нека φ е вярна във всеки модел на SAP. Тъй като всеки модел на $SAPP$ е също и модел на SAP, φ е вярна във всеки модел на $SAPP$. $\square$

Твърдение 4 *$SAPP$ е ω-категорична.*

Доказателство: Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са изброими модели на $SAPP$. $\Longrightarrow$ A има изброимо много класове на еквивалентност, B — също. Нека $[a_1], [a_2], \ldots [a_n] \ldots ; [a'_1], [a'_2], \ldots [a'_n] \ldots$ са класовете на еквивалентност на A, като $[a_1]R_{\mathcal{A}}[a'_1], [a_2]R_{\mathcal{A}}[a'_2] \ldots$ Нека $[b_1], [b_2], \ldots [b_n] \ldots ;\ [b'_1], [b'_2], \ldots [b'_n] \ldots$ са класовете на еквивалентност на B, като $[b_1]R_{\mathcal{B}}[b'_1], [b_2]R_{\mathcal{B}}[b'_2] \ldots$ Нека $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots$ са елементите на $[a_1]$. Аналогично номерираме елементите на останалите класове на еквивалентност. Дефинираме функция $f : A \mapsto B$ така:

$$f(x) \overset{def}{=} \begin{cases} b_{ij} & \text{ако } x = a_{ij} \text{ за някои } i, j \\ b'_{ij} & \text{ако } x = a'_{ij} \text{ за някои } i, j \end{cases}$$

Очевидно f е изоморфизъм. $\square$

Твърдение 5 *$SAPP$ не е α-категорична за всяка неизброима мощност α.*

Доказателство: Нека α е произволен неизброим кардинал.
$L_1 \stackrel{def}{=} \alpha \times \mathbb{N},\ L_2 \stackrel{def}{=} \mathbb{N} \times \alpha$
$P \stackrel{def}{=} \{((a,i),(b,j)) :\ a = b \text{ и } i \neq j\}$
$P' \stackrel{def}{=} \{((i,a),(j,b)) :\ i = j \text{ и } a \neq b\}$
$C \stackrel{def}{=} \{((a,i),(b,j)) :\ a \neq b\}$
$C' \stackrel{def}{=} \{((i,a),(j,b)) :\ i \neq j\}$
Структурите $\mathcal{F} = (L_1, P, C)$ и $\mathcal{F}' = (L_2, P', C')$ са модели на SAP. Това е доказано в [1].
Нека $(\beta,i),(\gamma,j) \in L_1$. $L((\beta,i),(\gamma,j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} \beta$ е четен ординал и $\gamma = s(\beta)$ или γ е четен ординал и $\beta = s(\gamma)$
Нека $(i,\beta),(j,\gamma) \in L_2$ $L'((i,\beta),(j,\gamma)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} i$ е четно и $j = i+1$ или симетричното.
По същия начин, както в доказателството на Лема 9, се доказва, че обогатените $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ са модели на $SAPP$. $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ не са изоморфни. Това е доказано в статията Line-based affine reasoning in Euclidean plane на Ф. Балбиани и Т. Тинчев. Следователно обогатените $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ не са изоморфни. Очевидно L_1 и L_2 имат мощност α. Следователно $SAPP$ не е α категорична. $\square$

3 Модална логика за правите

Вместо $\{\lambda_1, \dots, \lambda_5\}$ разглеждаме следните формули, които са модално определими със Салквистови формули и са "почти същите"(на някои места са разменени местата на аргументите на атомарните формули):

$$\mu_1 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (L(x,y) \to L(y,x))$$
$$\mu_2 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (L(x,z) \wedge L(z,y) \to (x = y) \vee P(x,y))$$
$$\mu_3 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (L(x,y) \to C(x,y))$$
$$\mu_4 \stackrel{def}{=} \forall x \exists y L(x,y)$$
$$\mu_5 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (P(y,x) \wedge L(x,z) \to L(y,z))$$

Съответните Салквистови формули са:

$$\mu_1' \stackrel{def}{=} \langle L \rangle [L] Q \to Q$$
$$\mu_2' \stackrel{def}{=} Q \wedge [P] Q \to [L][L] Q$$
$$\mu_3' \stackrel{def}{=} \langle L \rangle Q \to \langle C \rangle Q$$
$$\mu_4' \stackrel{def}{=} [L] Q \to \langle L \rangle Q$$
$$\mu_5' \stackrel{def}{=} [L] Q \to [P][L] Q$$

μ_i' модално определя условието от първи ред, зададено чрез μ_i, за всяко $i = 1, \dots, 5$.
Формулите на SAP без $IRREF$ и $UNIV$ също са модално определими със Салквистови формули. С γ_4 означаваме формулата $TRANS$, с γ_{6n}, γ_{7n} — формулите $DENS_n$ за $n \geq 1$, с γ_8, γ_9 — формулите $DENS_0$. За да намерим модална логика, която е пълна в класа на моделите на $SAPP$, освен модално определимите със Салквиствови формули формули на $SAPP$ разглеждаме също формулите μ_6, γ_1, γ_2, γ_3, γ_5, които логически следват от $SAPP$ и са модално определими със Салквистови формули.

$$\mu_6 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z \forall t (L(x,y) \wedge C(y,z) \wedge L(z,t) \to C(x,t))$$
$$\gamma_1 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (P(x,y) \to P(y,x))$$
$$\gamma_2 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y (C(x,y) \to C(y,x))$$

$$\gamma_3 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z) \to x = z \vee P(x,z))$$

$$\gamma_4 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge C(y,z) \to C(x,z))$$

$$\gamma_5 \stackrel{def}{=} \forall x \forall y \forall z (C(x,y) \wedge C(y,z) \to x = z \vee P(x,z) \vee C(x,z))$$

$$\gamma_{6n} \stackrel{def}{=} \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (P(x,y_1) \wedge \ldots \wedge P(x,y_n) \to \exists z (P(x,z) \wedge P(z,y_1) \wedge \ldots \wedge P(z,y_n)))$$

$$\gamma_{7n} \stackrel{def}{=} \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_n (C(x,y_1) \wedge \ldots \wedge C(x,y_n) \to \exists z (C(x,z) \wedge C(z,y_1) \wedge \ldots \wedge C(z,y_n)))$$

$$\gamma_8 \stackrel{def}{=} \forall x \exists y P(x,y)$$

$$\gamma_9 \stackrel{def}{=} \forall x \exists y C(x,y)$$

μ'_6 модално определя μ_6.
γ'_i модално определя условието от първи ред, зададено чрез γ_i, за всяко $i = 1, \ldots, 9$.

$$\mu'_6 \stackrel{def}{=} \langle L \rangle \langle C \rangle \langle L \rangle Q \to \langle C \rangle Q$$

$$\gamma'_1 \stackrel{def}{=} Q \to [P] \langle P \rangle Q$$

$$\gamma'_2 \stackrel{def}{=} Q \to [C] \langle C \rangle Q$$

$$\gamma'_3 \stackrel{def}{=} Q \wedge [P]Q \to [P][P]Q$$

$$\gamma'_4 \stackrel{def}{=} [C]Q \to [P][C]Q$$

$$\gamma'_5 \stackrel{def}{=} Q \wedge [P]Q \wedge [C]Q \to [C][C]Q$$

$$\gamma'_{6n} \stackrel{def}{=} \langle P \rangle Q_1 \ldots \langle P \rangle Q_n \langle P \rangle (\langle P \rangle Q_1 \wedge \ldots \wedge \langle P \rangle Q_n)$$

$$\gamma'_{7n} \stackrel{def}{=} \langle C \rangle Q_1 \ldots \langle C \rangle Q_n \langle C \rangle (\langle C \rangle Q_1 \wedge \ldots \wedge \langle C \rangle Q_n)$$

$$\gamma'_8 \stackrel{def}{=} [P]Q \to \langle P \rangle Q$$

$$\gamma'_9 \stackrel{def}{=} [C]Q \to \langle C \rangle Q$$

От теоремата на Салквист следва, че $ML(SAPP) \stackrel{def}{=} K \cup \{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_9, \mu'_1, \ldots, \mu'_6\}$ е пълна в класа на моделите на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$.
Преднормална равнина ще наричаме всеки модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6, \forall x \forall y (x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))\}$.
Всеки модел на $SAPP$ е преднормална равнина и всяка преднормална равнина е модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$.
За да докажем, че $ML(SAPP)$ е пълна в класа на моделите на $SAPP$,

трябва да докажем, че ако една формула е вярна във всички модели на $SAPP$, то тя е вярна във всички модели на $\{\gamma_1, \dots, \gamma_9, \mu_1, \dots, \mu_6\}$. Най напред ще докажем, че ако една формула е вярна във всички модели на $SAPP$, то тя е вярна във всички преднормални равнини. За целта ще докажем следните две твърдения:

Твърдение 6 *Нека $\mathcal{W} = (W, P, C, L)$ е преднормална равнина. Тогава съществува преднормална равнина $\mathcal{W}' = (W', P', C', L')$, в която P' е ирефлексивна, и копиране I на (W, P, C, L) върху (W', P', C', L').*

Твърдение 7 *Нека $\mathcal{W} = (W, P, C, L)$ е преднормална равнина, в която P е ирефлексивна. Тогава съществува модел на $SAPP$ $\mathcal{W}' = (W', P', C', L')$ и копиране I на (W, P, C, L) върху (W', P', C', L').*

След това ще докажем, че ако една формула е вярна във всички преднормални равнини, то тя е вярна във всички модели на $\{\gamma_1, \dots, \gamma_9, \mu_1, \dots, \mu_6\}$. За целта ще докажем, че всеки модел на $\{\gamma_1, \dots, \gamma_9, \mu_1, \dots, \mu_6\}$ за произволна своя точка има породена от нея подструктура, която е преднормална равнина.

Доказателство на Твърдение 6:
$W' \stackrel{def}{=} \{(a, 0) : a \in W\} \cup \{(a, i) : a \in W,\ i \geq 1$ и $P(a, a)\}$
За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $P'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} P(a, b)$ и ($a \neq b$ или $i \neq j$)
За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $C'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} C(a, b)$
За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $L'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} L(a, b)$

$?\mathcal{W}' \models \mu_1$
Нека $(a, i), (b, j) \in W'$ и $L'((a, i), (b, j)). \Longrightarrow a, b \in W$ и $L(a, b)(1)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \mu_1(2)$
$(1), (2) \Longrightarrow L(b, a) \Longrightarrow L'((b, j), (a, i))$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_1$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_2$
Нека $(a, i)L'(b, j)(3),\ (b, j)L'(c, h)(4)$
$?(a, i) = (c, h)$ или $(a, i)P'(c, h)$

1 сл.) $(a,i) = (c,h)$
2 сл.) $(a,i) \neq (c,h)$
$(3) \Longrightarrow aLb$
$(4) \Longrightarrow bLc$
Следователно $a = c$ или $P(a,c)(5)$.
2.1 сл.) $a = c$
2.1.1 сл.) $i \neq h$
$P(a,a)$
Следователно $P(a,c)$ и $i \neq h. \Longrightarrow P'((a,i),(c,h))$
2.1.2 сл.) $i = h$
$(a,i) = (c,h)$ — противоречие

$$\left.\begin{array}{l} \text{2.2 сл.) } a \neq c(6) \\ (5),(6) \Longrightarrow P(a,c) \end{array}\right\} \Longrightarrow P'((a,i),(c,h))$$

Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_2$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_3$
Нека $(a,i)L'(b,j). \Longrightarrow aLb$
Следователно $aCb. \Longrightarrow (a,i)C'(b,j)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_3$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_4$
Нека $(a,i) \in W' \quad ?\exists(b,j) : \ (a,i)L'(b,j)$
$\exists b \in W : \ aLb \Longrightarrow (a,i)L'(b,0)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_4$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_5$
Нека $P'((b,j),(a,i))(7), \ (a,i)L'(c,h)(8) \quad ?(b,j)L'(c,h)$
$(7) \Longrightarrow P(b,a)$
$(8) \Longrightarrow aLc$
Следователно $bLc. \Longrightarrow (b,j)L'(c,h)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_5$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_6$
Нека $(a,i)L'(b,j)(9), \ (b,j)C'(c,h)(10), \ (c,h)L'(d,k)(11) \quad ?(a,i)C'(d,k)$
$(9) \Longrightarrow aLb$
$(10) \Longrightarrow C(b,c)$
$(11) \Longrightarrow cLd$
Следователно $C(a,d). \Longrightarrow (a,i)C'(d,k)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_6$.

В [1] е доказано, че обедняването на $\mathcal{W}'$ до езика с предикатни символи P, C, = модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \forall x \forall y(x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))\}$ и в него P' е ирефлексивна. Следователно в $\mathcal{W}'$ P' е ирефлексивна и $\mathcal{W}' \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \forall x \forall y(x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))\}$
Следователно $\mathcal{W}'$ е преднормална равнина.

$I \stackrel{def}{=} \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}$, където за всяко i f_i е функция от W в W', дефинирана по следния начин:
$f_i(a) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (a,0) & \text{ако } \neg P(a,a) \\ (a,i) & \text{ако } P(a,a) \end{cases}$

Нека $(a,i) \in W'. \Longrightarrow a \in W$
1 сл.) $i = 0$
$f_0(a) = (a,i)$
2 сл.) $i > 0$
$P(a,a)$
$f_i(a) = (a,i)$

Нека $f_i(a) = f_j(b)$.
Нека $f_i(a) = (a,m),\ f_j(b) = (b,n)$ за някои $m, n \in \{0, 1, \ldots\}$.
$(a,m) = (b,n) \Longrightarrow a = b$

Нека $P(a,b),\ f_i(a) = (a,k) \quad ?\exists j :\ P'((a,k), f_j(b))$
1 сл.) $a \neq b$
$f_0(b) = (b,0)$
$P'((a,k), f_0(b))$
2 сл.) $a = b$
Нека $i \neq k$.
$f_i(a) = (a,i)$
$P'((a,k),(a,i))$

Нека $C(a,b),\ f_i(a) = (a,k) \quad ?\exists j :\ C'((a,k), f_j(b))$
$f_0(b) = (b,0)$
$C'((a,i), f_0(b))$
Аналогично се доказва, че ако $L(a,b),\ f_i(a) = (a,k)$, то $\exists j :\ L'((a,k), f_j(b))$

Нека $f_i(a) P' f_j(b)$.
Нека $f_i(a) = (a,k),\ f_j(b) = (b,l)$ за някои $k, l \in \{0, 1, \ldots\}$.

От дефиницията на P' следва, че aPb.
Аналогично се доказва, че ако $f_i(a)R'f_j(b)$, то aRb за $R = C, L$.
Следователно I е копиране на (W, P, C, L) върху (W', P', C', L'). $\square$

Доказателство на твърдение 7:

$W' \stackrel{def}{=} \{(a, 0) : a \in W\} \cup \{(a, i) : a \in W, i \geq 1 \text{ и } C(a, a)\}$

За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $P'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} P(a, b)$ и $i = j$

За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $C'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} C(a, b)$ и ($a \neq b$ или $i \neq j$) и ($\neg P(a, b)$ или $i \neq j$)

За произволни $a, b \in W$ и за произволни $i, j \geq 0$, $L'((a, i), (b, j)) \stackrel{def}{\longleftrightarrow} L(a, b)$ и (($a \neq b$ и $\neg P(a, b)$ и $i = j$) или ($P(a, b)$ и $\epsilon(i, j)$) или ($a = b$ и $\epsilon(i, j)$))), където $\epsilon(i, j)$ е следното условие:
(i — четно и $j = i + 1$) или (j — четно и $i = j + 1$)

$?\mathcal{W}' \models \mu_1$
Нека $(a, i)L'(b, j)$. $\Longrightarrow L(a, b)$ и (($a \neq b$ и $\neg P(a, b)$ и $i = j$) или ($P(a, b)$ и $\epsilon(i, j)$) или ($a = b$ и $\epsilon(i, j)$)))
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \gamma_1$, $\mathcal{W} \models \mu_1$
Следователно $L(b, a)$ и (($b \neq a$ и $\neg P(b, a)$ и $j = i$) или ($P(b, a)$ и $\epsilon(j, i)$) или ($b = a$ и $\epsilon(j, i)$))). $\Longrightarrow (b, j)L'(a, i)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_1$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_2$
Нека $(a, i)L'(b, j)(1)$ и $(b, j)L'(c, h)(2)$
$?(a, i) = (c, h)$ или $P'((a, i), (c, h))$
$(1) \Longrightarrow L(a, b)(11)$ и (($a \neq b$ и $\neg P(a, b)$ и $i = j$) или ($P(a, b)$ и $\epsilon(i, j)$) или ($a = b$ и $\epsilon(i, j)$)))
$(2) \Longrightarrow L(b, c)(12)$ и (($b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$) или ($P(b, c)$ и $\epsilon(j, h)$) или ($b = c$ и $\epsilon(j, h)$)))
1 сл.) $(a, i) = (c, h)$
2 сл.) $(a, i) \neq (c, h)$ $\quad ?P'((a, i), (c, h))$
2.1 сл.) $a = c(3)$
2.1.a сл.) $a \neq b$ и $\neg P(a, b)$ и $i = j$
2.1.a.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$i = j = h$ и $a = c \Longrightarrow (a, i) = (c, h)$ — противоречие
2.1.a.2 сл.) $P(b, c)(4)$ и $\epsilon(j, h)$
$(3), (4) \Longrightarrow P(b, a)(5)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \gamma_1(6)$
$(5), (6) \Longrightarrow P(a, b)$ — противоречие

2.1.a.3 сл.) $b = c$ и $\epsilon(j, h)$
$b = c = a$ и $a \neq b$ — противоречие
2.1.b сл.) $P(a, b)(7)$ и $\epsilon(i, j)$
2.1.b.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$\neg P(b, c)$
$(3), (7) \Longrightarrow P(c, b)(8)$
$(6), (8) \Longrightarrow P(b, c)$ — противоречие
2.1.b.2 сл.) $(P(b, c)$ и $\epsilon(j, h))$ или $(b = c$ и $\epsilon(j, h))$
$\epsilon(i, j)$ и $\epsilon(j, h) \Longrightarrow i = h(9)$
$(3), (9) \Longrightarrow (a, i) = (c, h)$ — противоречие
2.1.c сл.) $a = b(10)$ и $\epsilon(i, j)$
2.1.c.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$(3), (10) \Longrightarrow b = c$ — противоречие
2.1.c.2 сл.) $(P(b, c)$ и $\epsilon(j, h))$ или $(b = c$ и $\epsilon(j, h))$
$\epsilon(i, j)$ и $\epsilon(j, h) \Longrightarrow i = h$
Следователно $(a, i) = (c, h)$ — противоречие
Следователно 2.1 случай не е възможен.
2.2 сл.) $a \neq c(14)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \mu_2(13)$
$(11), (12), (13) \Longrightarrow a = c$ или $P(a, c)(15)$
$(14), (15) \Longrightarrow P(a, c)(16)$
За да докажем, че $P'((a, i), (c, h))$, е достатъчно да докажем, че $i = h$.
2.2.a сл.) $a \neq b$ и $\neg P(a, b)$ и $i = j$
2.2.a.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$i = j = h$
2.2.a.2 сл.) $P(b, c)(17)$ и $\epsilon(j, h)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \gamma_1(18)$
$(17), (18) \Longrightarrow P(c, b)(19)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \gamma_3(20)$
$(16), (19), (20) \Longrightarrow a = b$ или $P(a, b)$ — противоречие
2.2.a.3 сл.) $b = c(21)$ и $\epsilon(j, h)$
$(16), (21) \Longrightarrow P(a, b)$ — противоречие
2.2.b сл.) $P(a, b)$ и $\epsilon(i, j)$
2.2.b.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$P(b, a), (16), \mathcal{W} \models \gamma_3 \Longrightarrow b = c$ или $P(b, c)$ — противоречие
2.2.b.2 сл.) $(P(b, c)$ и $\epsilon(j, h))$ или $(b = c$ и $\epsilon(j, h))$
$\epsilon(i, j)$ и $\epsilon(j, h) \Longrightarrow i = h$
2.2.c сл.) $a = b(22)$ и $\epsilon(i, j)$
2.2.c.1 сл.) $b \neq c$ и $\neg P(b, c)$ и $j = h$
$(16) \Longrightarrow P(b, c)$ — противоречие
2.2.c.2 сл.) $(P(b, c)$ и $\epsilon(j, h))$ или $(b = c$ и $\epsilon(j, h))$

$\epsilon(i,j)$ и $\epsilon(j,h) \Longrightarrow i = h$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_2$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_3$
Нека $(a,i)L'(b,j)(25). \Longrightarrow aLb$
Следователно $aCb(23)$.
1 сл.) $i \neq j(24)$
$(23),(24) \Longrightarrow (a,i)C'(b,j)$
2 сл.) $i = j(26)$
$(25),(26) \Longrightarrow a \neq b(27),\ \neg P(a,b)(28)$
$(23),(27),(28) \Longrightarrow (a,i)C'(b,j)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_3$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_4$
Нека $(x,i) \in W'. \Longrightarrow x \in W$
Следователно $\exists y:\ xLy$
Следователно $xCy(29)$
1 сл.) $P(x,y)$ или $x = y$
$P(y,x)$ или $x = y(30)$
$\mathcal{W}$ е преднормална равнина $\Longrightarrow \mathcal{W} \models \gamma_4(31)$
$(29),(30),(31) \Longrightarrow C(y,y) \Longrightarrow (y,j) \in W'$ за всяко $j \geq 0$
1.1 сл.) i — четно $\quad j \stackrel{def}{=} i+1$
$\epsilon(i,j)$
$(x,i)L'(y,j)$
1.2 сл.) i — нечетно $\quad j \stackrel{def}{=} i-1$
$\epsilon(i,j)$
$(x,i)L'(y,j)$
2 сл.) $\neg P(x,y)$ и $x \neq y$
2.1 сл.) $i = 0$
$(x,i)L'(y,0)$
2.2 сл.) $i > 0$
Следователно $C(x,x)$.
$yLx,\ C(x,x),\ xLy$ и $C(y,y) \Longrightarrow (y,i) \in W'$
$(x,i)L'(y,i)$
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_4$.

$?\mathcal{W}' \models \mu_5$
Нека $P'((b,j),(a,i))(32)$ и $(a,i)L'(c,h)(33)$
$?(b,j)L'(c,h)$

$(32) \Longrightarrow P(b,a)(34)$ и $j = i(37)$
$(33) \Longrightarrow aLc(35)$
$(34), (35), \mathcal{W} \models \mu_5 \Longrightarrow bLc(39)$
1 сл.) $P(a,c)(36)$
$(34), (36), \mathcal{W} \models \gamma_3 \Longrightarrow b = c$ или $P(b,c)(40)$
$(33), (36) \Longrightarrow \epsilon(i,h)(38)$
$(37), (38) \Longrightarrow \epsilon(j,h)(41)$
$(39), (40), (41) \Longrightarrow (b,j)L'(c,h)$
2 сл.) $a = c(42)$
$(33), (42) \Longrightarrow \epsilon(i,h)$
$\epsilon(j,h)$
$(34), (42) \Longrightarrow P(b,c)$
Следователно $(b,j)L'(c,h)$.
3 сл.) $\neg P(a,c),\ a \neq c$
$i = h$
Допускаме, че $b = c$.
Следователно $P(c,a)$ — противоречие
Следователно $b \neq c$.
Допускаме, че $P(b,c)$.
Имаме $P(a,b)$. Следователно $a = c$ или $P(a,c)$ — противоречие
Следователно $\neg P(b,c)$.
$i = j = h$
Следователно $(b,j)L'(c,h)$.
Следователно $\mathcal{W}' \models \mu_5$.

В [1] е доказано, че обедняването на $\mathcal{W}'$ до езика с предикатни символи $P, C, =$ е модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \forall x \forall y(x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))\}$ и P', C' са ирефлексивни в него. Следователно в $\mathcal{W}'$ P', C' са ирефлексивни и $\mathcal{W}' \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \forall x \forall y(x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))\}$
Следователно $\mathcal{W}'$ е модел на SAP.
$\mathcal{W}' \models \{\gamma 1, \mu_1, \ldots, \mu_5\} \Longrightarrow \mathcal{W}' \models \{\lambda_1, \ldots, \lambda_5\}$
Следователно $\mathcal{W}'$ е модел на $SAPP$.

$I \stackrel{def}{=} \{f_0, f_1 \ldots, f_n, \ldots\}$, където за всяко i f_i е функция от W в W', дефинирана по следния начин:
$$f_i(a) \stackrel{def}{=} \begin{cases} (a,i) & \text{ако } C(a,a) \\ (a,0) & \text{иначе} \end{cases}$$

Нека $(a,i) \in W'$. $\Longrightarrow a \in W$
1 сл.) $i = 0$

$f_0(a) = (a, i)$
2 сл.) $i > 0$
$C(a, a)$
$f_i(a) = (a, i)$

Нека $f_i(a) = f_j(b)$.
Нека $f_i(a) = (a, m),\ f_j(b) = (b, n)$, за някои $m, n \in \{0, 1, \ldots\}$
$(a, m) = (b, n) \Longrightarrow a = b$

Нека $P(a, b),\ f_i(a) = (a, k)$. $\quad ?\exists j:\ P'((a, k), f_j(b))$
1 сл.) $k > 0$
Следователно $C(a, a)$.
$P(b, a),\ C(a, a),\ \mathcal{W} \models \gamma_4 \Longrightarrow C(b, a)$
Следователно $C(a, b)$, но имаме и $P(b, a)$, следователно $C(b, b)$. $\Longrightarrow (b, k) \in W'$ за всяко $k = 0, 1, \ldots$
$f_k(b) = (b, k)$
$P'((a, k), (b, k))$
2 сл.) $k = 0$
$f_0(b) = (b, 0)$
$P'((a, k), f_0(b))$

Нека $C(a, b),\ f_i(a) = (a, k)$. $\quad ?\exists j:\ C'((a, k), f_j(b))$
$f_0(b) = (b, 0)$
1 сл.) $k > 0$
$C'((a, k), (b, 0))$
2 сл.) $k = 0$
2.1 сл.) $a \neq b \wedge \neg P(a, b)$
$C'((a, k), (b, 0))$
2.2 сл.) $a = b$ или $P(a, b)$
Следователно $C(b, b)$. $\Longrightarrow (b, 1) \in W'$
$f_1(b) = (b, 1)$
$C'((a, k), (b, 1))$

Нека $aLb,\ f_i(a) = (a, k)$ $\quad ?\exists j:\ (a, k)L'f_j(b)$
1 сл.) $a = b$
$C(a, a) \Longrightarrow (b, k) \in W'$ за всяко $k = 0, 1, \ldots$
1.1 сл.) k — четно $\quad k' \stackrel{def}{=} k + 1$
$f_{k'}(b) = (b, k')$
$(a, k)L'(b, k')$

1.2 сл.) k — нечетно $\quad k' \stackrel{def}{=} k-1$
$f_{k'}(b) = (b, k')$
$(a, k)L'(b, k')$
2 сл.) $P(a, b)$
Освен това имаме aLb. Следователно bLb, откъдето bCb.
$(b, n) \in W'$ за всяко $n = 0, 1, \ldots$
2.1 сл.) k — четно $\quad k' \stackrel{def}{=} k+1$
$f_{k'}(b) = (b, k')$
$(a, k)L'(b, k')$
1.2 сл.) k — нечетно $\quad k' \stackrel{def}{=} k-1$
$f_{k'}(b) = (b, k')$
$(a, k)L'(b, k')$
3 сл.) $a \neq b$ и $\neg P(a, b)$
3.1 сл.) $k > 0$
Следователно $C(a, a)$.
$bLa,\ C(a, a),\ aLb$ Следователно $C(b, b)$. $\Longrightarrow$ $(b, n) \in W'$ за всяко $n = 0, 1, \ldots$
$f_k(b) = (b, k)$
$(a, k)L'(b, k)$
3.2 сл.) $k = 0$
$f_0(b) = (b, 0)$
$(a, 0)L'(b, 0)$

Очевидно ако $f_i(a)R'f_j(b)$, то aRb за $R = P, C, L$.

Следователно I е копиране на (W, P, C, L) върху (W', P', C', L'). $\square$

Нека φ е теорема на $ML(SAPP)$. Следователно φ е вярна във всеки модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$
Нека $\mathcal{W} \models SAPP$.
$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$
$\mathcal{F}^2_{\mathbb{R}} \equiv \mathcal{W}$
Следователно $\mathcal{W} \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$.
φ е вярна в $\mathcal{W}$.

Нека φ е вярна във всеки модел на $SAPP$.
Нека $\mathcal{W}$ е преднормална равнина, $x \in W,\ v$ е оценка в $\mathcal{W}$.
Ще докажем, че $v(x, \varphi) = 1$.
От Твърдение 6 следва, че съществува преднормална равнина $\mathcal{W}' = (W',$

$P', C', L')$, в която P' е ирефлексивна, и копиране I на (W, P, C, L) върху (W', P', C', L'). Следователно съществува оценка v', такава че I е копиране на модела $(\mathcal{W}, v)$ върху модела $(\mathcal{W}', v')$.
Нека $f \in I$.
$v(x, \varphi) = 1 \longleftrightarrow v'(f(x), \varphi) = 1(1)$
От Твърдение 6 следва, че съществува модел на $SAPP$ $\mathcal{W}''$ и копиране I' на (W', P', C', L') върху (W'', P'', C'', L''). Следователно съществува оценка v'', такава че I' е копиране на модела $(\mathcal{W}', v')$ върху модела $(\mathcal{W}'', v'')$.
Нека $g \in I'$.
$v'(f(x), \varphi) = 1 \longleftrightarrow v''(g(f(x)), \varphi) = 1(2)$
$v''(g(f(x)), \varphi) = 1, (2), (1) \Longrightarrow v(x, \varphi) = 1.$
Следователно φ е вярна във всяка преднормална равнина.
Нека $\mathcal{W}''' = (W''', P''', C''', L''')$ е модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$.
$aRb \overset{def}{\longleftrightarrow} a = b$ или $P'''(a, b)$ или $C'''(a, b)$ за произволни $a, b \in W'''(3)$
R е релация на еквивалентност.
Нека $a \in W'''$, v е оценка в $\mathcal{W}'''$.
$\mathcal{W}'''_a \overset{def}{=} ([a]_R, P'''_a, C'''_a, L'''_a)$, където P'''_a, C'''_a, L'''_a са рестрикциите съответно на P''', C''', L''' върху $[a]_R$.
$v'(y, Q) = 1 \overset{def}{\longleftrightarrow} v(y, Q) = 1$ за всяко $y \in [a]_R$ и за всяка променлива Q
Нека $b \in [a]_R. \Longrightarrow aRb$
Нека $bP'''c.\quad ?c \in [a]_R$
$(3) \Longrightarrow bRc$
Следователно aRc, т.е. $c \in [a]_R$.
Аналогично: ако $bC'''c$, то $c \in [a]_R$.
Нека $bL'''c. \Longrightarrow bC'''c \Longrightarrow c \in [a]_R$
Следователно $\mathcal{W}'''_a$ е породена подструктура на $\mathcal{W}'''$.
Следователно $v'(a, \varphi) = 1 \longleftrightarrow v(a, \varphi) = 1$
Ще докажем, че за всяко n $\mathcal{W}'''_a \models \gamma_{6n}$.
Нека n е произволно цяло положително число.
Нека $x, y_1, \ldots, y_n \in [a]_R$ и $xP'''_a y_1, \ldots, xP'''_a y_n. \Longrightarrow xP''' y_1, \ldots, xP''' y_n$
Следователно $\exists z:\ P'''(x, z), P'''(z, y_1) \ldots, P'''(z, y_n)$
$P'''(x, z) \Longrightarrow xRz$ Следователно $z \in [a]_R$.
Имаме $P'''_a(x, z), P'''_a(z, y_1) \ldots, P'''_a(z, y_n)$.
Аналогично се доказва, че за всяко n $\mathcal{W}'''_a \models \gamma_{7n}$.
Ще докажем, че $\mathcal{W}'''_a \models \mu_4$.
Нека $x \in [a]_R$
Тъй като $\mathcal{W}''' \models \mu_4$, то $\exists y : xL'''y$
$xC'''y \Longrightarrow xRy$
Следователно $y \in [a]_R$ и $xL'''_a y$.
Аналогично се доказва, че $\mathcal{W}'''_a \models \{\gamma_8, \gamma_9\}$.

$\mathcal{W}''' \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6\}$ и $\mathcal{W}'''_a$ е подструктура на $\mathcal{W}''' \Longrightarrow \mathcal{W}'''_a \models \{\gamma_1, \ldots, \gamma_5, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6\}$
Ще докажем, че $\mathcal{W}'''_a \models \forall x \forall y (x = y \vee P(x,y) \vee C(x,y))$.
Нека $x, y \in [a]_R$. $\Longrightarrow xRy \Longrightarrow x = y$ или $P'''(x,y)$ или $C'''(x,y) \Longrightarrow x = y$ или $P'''_a(x,y)$ или $C'''_a(x,y)$
Следователно $\mathcal{W}'''_a$ е преднормална равнина и φ е вярна в $\mathcal{W}'''_a$.
Следователно $v'(a, \varphi) = 1. \Longrightarrow v(a, \varphi) = 1$
Следователно φ е вярна във всеки модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$, откъдето φ е теорема на $ML(SAPP)$.
Получихме, че $ML(SAPP)$ е пълна в класа на моделите на $SAPP$.

Лема 10 *$ML(SAPP)$ е пълна в класа на изброимите модели на $SAPP$.*

Доказателство: Нека φ е вярна във всички изброими модели на $SAPP$. Нека $\mathcal{W} = (W, P, C, L)$ е произволен модел на $SAPP$ и V е оценка в $\mathcal{W}$. Ще докажем, че φ е вярна в модела $(\mathcal{W}, V)$. Идеята на доказателството е следната: ще се ограничим до разглеждане само на променливите, които участват във φ; ще дефинираме функции γ и δ, като γ на всеки клас на еквивалентност ще съпоставя оценките, които се срещат само по веднъж в него, а δ на всеки клас на еквивалентност ще съпоставя оценките, които се срещат повече от веднъж в него. Във всяка двойка класове на еквивалентност, които са в релация, ще приемем единия клас за първи, другия — за втори и ще им съпоставим наредената четворка — γ върху първия, δ върху първия, γ върху втория, δ върху втория. Тъй като променливите на φ са краен брой, възможните четворки, които можем да получим са краен брой. От $\mathcal{W}$ ще построим един изброим модел на $SAPP$ $\mathcal{W}''$ по следния начин: когато на неизброимо много двойки класове им съответства една и съща четворка, ще включим в W'' само изброимо много от тях, когато една четворка съответства на една единствена двойка, ще включим тази двойка, когато една четворка съответства на краен брой или изброимо много двойки класове, ще включим всички тези класове. Така се ограничаваме само до разглеждане на изброимо много от класовете на еквивалентност. За всеки разглеждан клас на еквивалентност, когато една оценка се среща в него неизброимо много пъти, избираме изброимо много елементи, с такава оценка и останалите не ги разглеждаме. Така си осигуряваме класовете на еквивалентност на $\mathcal{W}''$ да бъдат изброими. Ще казваме, че елемент на W и елемент на W'' са съответни, ако на двойките класове, в които се срещат, им съответства една и съща четворка и за двата класа, в които се намират съответно двата елемента, стойностите на γ и δ са едни и същи. Ще докажем, че върху два съответни елемента са верни едни и същи подформули на φ. Оттук ще следва, че φ е вярна в $(\mathcal{W}, V)$.

Нека $Q_1, \ldots, Q_k$ са променливите на φ. Нека α е мощността на множеството от класовете на еквивалентност(по отношение на релацията $\neg C$) на W. Нека тези класове на еквивалентност са $[b_0], \ldots, [b_n], \ldots;\ [b'_0], \ldots, [b'_n], \ldots,\ n < \alpha$, като $[b_n]R_{\mathcal{W}}[b'_n]$ за всяко $n < \alpha$. Нека $\mathcal{V} = \mathcal{P}^2\{Q_1, \ldots, Q_k\}$. Дефинираме функции γ и δ от разбиването на W във $\mathcal{V}$ така:

$$\gamma([a]) = \{V(b) :\ \neg C(a,b) \text{ и } V(b) \neq V(c) \text{ за всяко } c\text{, такова че } P(b,c)\}$$
$$\delta([a]) = \{V(b) :\ \neg C(a,b) \text{ и } V(b) = V(c) \text{ за някое } c\text{, такова че } P(b,c)\}$$

Дефинираме функция f от α в $\mathcal{V}^4$ така:

$$f(\xi) = \langle \gamma([b_\xi]), \delta([b_\xi]), \gamma([b'_\xi]), \delta([b'_\xi]) \rangle$$

Понеже $\mathcal{V}$ е крайно, $f(\alpha)$ също е крайно. Нека $f(\alpha) = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$.
Нека $\{\delta_1, \ldots, \delta_i\} = \{x \in f(\alpha) :\ f(\xi) = x$ за едно единствено $\xi\}$
Нека $\{\delta_{i+1}, \ldots, \delta_m\} = \{x \in f(\alpha) :\ f(\xi) = x$ за повече от едно $\xi\}$
Евентуално може $\{\delta_1, \ldots, \delta_i\}$ да е празното множество. Нека $f(\xi_1) = \delta_1, \ldots, f(\xi_i) = \delta_i,\ A_p = \{\xi < \alpha :\ f(\xi) = \delta_p\}$ за $p = i+1, \ldots, m$. Нека $A'_p = A_p$, ако A_p е крайно или изброимо безкрайно, и A'_p е изброимо безкрайно подмножество на A_p в противен случай $(p = i+1, \ldots, m)$. Нека $\mathcal{W}'$ е подструктурата на $\mathcal{W}$, която се получава като вземем класовете $[b_{\xi_1}], [b'_{\xi_1}], \ldots, [b_{\xi_i}], [b_{\xi_i}]'$ и $[b_s], [b'_s]$ за всяко $s \in A'_{i+1} \cup \ldots \cup A'_m$. Нека $[a]$ е клас на еквивалентност на $\mathcal{W}'$, $\gamma([a]) = \{t_1, \ldots, t_r\}$, $\delta([a]) = \{q_1, \ldots, q_l\}$. От $[a]$ избираме елементите с оценка t_1 или $t_2, \ldots,$ или t_r, за всяко $q \in \delta([a])$ избираме изброимо много от елементите с оценка q, ако те са безбройно много, или всички елементи с оценка q, ако те са краен брой. Така отделяме изброимо много от елементите на всеки клас на еквивалентност. Получената изброима подструктура на $\mathcal{W}'$ означаваме с $\mathcal{W}''$. $\mathcal{W}''$ е модел на $SAPP$. Дефинираме оценка V' в $\mathcal{W}''$ така: $V'(p) = V(p)$ за всяко $p \in W''$. Дефинираме γ', δ', f' за W'' по същия начин, както γ, δ, f. Ако $[x']$ е клас на еквивалентност на W'', получен от класа на еквивалентност $[x]$ на W, то $\gamma([x]) = \gamma'([x'])$ и $\delta([x]) = \delta'([x'])$.
Нека $x \in [b_j], y \in [B_z]([B_z]$ е клас на екв. на W'', получен от $[b_z])$ или $x \in [b'_j], y \in [B'_z]([B'_z]$ е клас на екв. на W'', получен от $[b'_z])$ за някои $j, z < \alpha$. Ще казваме, че x и y са съответни, ако $f(j) = f'(z)$ и $V(x) = V'(y)$. За всяко $x \in W$ има $y \in W''$, такова че x и y са съответни. Обратно — нека $y \in W''$. Тогава y и y са съответни. С индукция по ψ ще докажем, че за

всяка подформула на φ ψ е вярно следното: ако a и a' са съответни и $a' \in W''$, то $(\mathcal{W}, V), a \models \psi \longleftrightarrow (\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$.
1)$\psi = Q$
Тъй като a и a' са съответни, то $V(a) = V'(a')$. Следователно $Q \in V(a) \Longleftrightarrow Q \in V'(a')$.
2)$\psi = \neg\psi_1$— очевидно
3)$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$— очевидно
4)$\psi = [P]\psi_1$
Нека $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
Допускаме, че $(\mathcal{W}'', V'), a' \not\models \psi. \Longrightarrow \exists b' :\ P''(a', b')$ и $(\mathcal{W}'', V'), b' \not\models \psi_1$
$\exists b \in [a] : b$ и b' са съответни
Понеже $(\mathcal{W}, V), a \models [P]\psi_1$, то $b = a$ и $\forall t \in [a](t \neq a \longrightarrow V(t) \neq V(a))$.
Но в W'' в $[a']$ има поне два елемента, съответни на a — a' и b'. Това е абсурд.
Следователно $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$.
Аналогично се доказва, че ако $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$, то $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
5)$\psi = [C]\psi_1$
Нека $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
Допускаме, че $(\mathcal{W}'', V'), a' \not\models \psi \Longrightarrow \exists b' :\ C''(a', b')$ и $(\mathcal{W}'', V'), b' \not\models \psi_1$
БОО $[a] = [b_{\xi_1}],\ [a'] = [b_{\xi_2}]$ за някои $\xi_1, \xi_2 \in \alpha$.
Допускаме, че за всяко b, такова че b и b' са съответни, $b \in [a]$. Следователно $[b'] = [a]$ и за всяко $\xi \neq \xi_1$ $f(\xi) \neq f(\xi_1)$. Но $f(\xi_1) = f'(\xi_2)$, защото a и a' са съответни. Следователно $\xi_2 = \xi_1$, откъдето $b' \in [a']$ — противоречие. Следователно има b, такова че b и b' са съответни и $b \notin [a]$.
От ИП $(\mathcal{W}, V), b \not\models \psi_1$ — противоречие. Следователно $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$.
Аналогично се доказва, че ако $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$, то $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
6)$\psi = [L]\psi_1$
Нека $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
Допускаме, че $(\mathcal{W}'', V'), a' \not\models \psi. \Longrightarrow \exists b' :\ L''(a', b')$ и $(\mathcal{W}'', V'), b' \not\models \psi_1$
Нека $[a] = [b_{\xi_1}],\ [a'] = [b_{\xi_2}]$ за някои $\xi_1, \xi_2 \in \alpha$. Понеже a и a' са съответни, имаме, че $f(\xi_1) = f'(\xi_2)$. Следователно има $b \in [b'_{\xi_1}] :\ b$ и b' са съответни.
$[b_{\xi_1}]R_{\mathcal{W}}[b'_{\xi_1}],\ a \in [b_{\xi_1}],\ b \in [b'_{\xi_1}] \Longrightarrow aLb$
Следователно $(\mathcal{W}, V), b \models \psi_1$.
От ИП $(\mathcal{W}'', V'), b' \models \psi_1$ — противоречие. Следователно $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$.
Аналогично се доказва, че ако $(\mathcal{W}'', V'), a' \models \psi$, то $(\mathcal{W}, V), a \models \psi$.
Нека $a \in W$.
Допускаме, че $(\mathcal{W}, V), a \not\models \varphi$.
Нека $a' \in W''$ и a, a' са съответни.
Следователно $(\mathcal{W}'', V'), a' \not\models \varphi$ — противоречие
Следователно φ е вярна във всеки модел на $SAPP$ и е теорема на

$ML(SAPP)$.
Очевидно ако φ е теорема на $ML(SAPP)$, то тя е вярна във всички изброими модели на $SAPP$. $\square$

Твърдение 8 *Всеки два модела на $SAPP$ са модално еквивалентни.*

Доказателство: Нека $\mathcal{W} = (W, P, C, L)$ и $\mathcal{W}' = (W', P', C', L')$ са модели на $SAPP$. Ще докажем, че $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ са модално еквивалентни.
БОО $\mathcal{W}$ е изброима. Допускаме, че $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ не са модално еквивалентни.
1 сл.) Има формула φ, която е вярна в $\mathcal{W}$ и не е вярна в $\mathcal{W}'$. Понеже всеки два изброими модела на $SAPP$ са изоморфни и φ е вярна в изброим модел на $SAPP$, то φ е вярна във всички изброими модели на $SAPP$ и следователно е теорема на $ML(SAPP)$. Това е противоречие с факта, че φ не е вярна в $\mathcal{W}'$.
2 сл.) Има формула φ, която е вярна в $\mathcal{W}'$ и не е вярна в $\mathcal{W}$. Нека $Q_1, \ldots, Q_k$ са променливите на φ и $\mathcal{V} = \mathcal{P}^2\{Q_1, \ldots, Q_k\}$. Дефинираме функции γ и δ от разбиването на W във $\mathcal{V}$ по същия начин, както в предишната лема. Нека класовете на еквивалентност на W са $[b_0], \ldots, [b_n], \ldots;$ $[b'_0], \ldots, [b'_n], \ldots,\ n < \omega$, като $[b_n]R_{\mathcal{W}}[b'_n]$ за всяко $n < \omega$. Дефинираме функция f от ω във $\mathcal{V}^4$ по същия начин, както в предишната лема. Има оценка V в $\mathcal{W}$ и точка $x \in W$, такива че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \varphi$. От Твърдение 1 следва, че има елементарно влагане f на $\mathcal{W}$ в $\mathcal{W}'$. Нека α е мощността на множеството от класовете на еквивалентност(по отношение на релацията $\neg C'$) на W'. Нека тези класове на еквивалентност са $[a_0], \ldots, [a_n], \ldots;\ [a'_0], \ldots, [a'_n], \ldots,\ n < \alpha$, като $[a_n]R_{\mathcal{W}'}[a'_n]$ за всяко $n < \alpha$ и освен това за всяко $n < \omega$ е вярно: $f([b_n]) \subseteq [a_n],\ f([b'_n]) \subseteq [a'_n]$. Нека $a' \in W'$. Ако $a' \in f(W)$, то има $a \in W:\ f(a) = a'$ и дефинираме $V'(a') = V(a)$. Иначе има два случая: или $P'(a', f(a))$ за някоя $a \in W$, или $C'(a', f(a))$ за всяко $a \in W$. В първия случай нека $\lambda \in \delta([a])$. Дефинираме $V'(a') = \lambda$. Във втория случай нека $\delta^* \in f(\alpha)$ е такова, че $f(\xi) = \delta^*$ за безбройно много $\xi \in \omega$. Нека $\delta^* = \langle\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{s_1}\}, \{\delta_1, \ldots, \delta_{s_2}\}, \{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{s_3}\}, \{\delta'_1, \ldots, \delta'_{s_4}\}\rangle$.
a сл.) $[a'] = [a_n]$ за някое n
Фиксираме $c_1, \ldots, c_{s_1} \in [a_n]$ и дефинираме $V(c_1) = \gamma_1, \ldots, V(c_{s_1}) = \gamma_{s_1}$. Нека $B_1, \ldots, B_{s_2}$ са безкрайни подмножества на W', такива че $B_1 \cup \ldots \cup B_{s_2} = [a'] \backslash \{c_1, \ldots, c_{s_1}\}$. Дефинираме $V'(y) = \delta_1$ за всяко $y \in B_1, \ldots, V'(y) = \delta_{s_2}$ за всяко $y \in B_{s_2}$.
b сл.) $[a'] = [a'_n]$ за някое n. Дефинираме V' аналогично на a случай, само че използваме $\{\gamma'_1, \ldots, \gamma'_{s_3}\}, \{\delta'_1, \ldots, \delta'_{s_4}\}$ вместо $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{s_1}\}, \{\delta_1, \ldots, \delta_{s_2}\}$.
Дефинираме γ', δ', f' за W' по аналогичен начин, както γ, δ, f. Нека $x \in [b_j], y \in [a_z]$ или $x \in [b'_j], y \in [a'_z]$ за някои $j, z < \alpha$. Ще казваме, че x и y са съответни, ако $f(j) = f'(z)$ и $V(x) = V'(y)$. Тъй като $\mathcal{W}'$ се отнася

към $\mathcal{W}$, така както в предишната лема $\mathcal{W}$ се отнася към $\mathcal{W}''$, то за всяка подформула на φ ψ е вярно следното: ако m и m' са съответни, то $(\mathcal{W}, V), m \models \psi \longleftrightarrow (\mathcal{W}', V'), m' \models \psi$.
Тъй като $(\mathcal{W}, V), x \not\models \varphi$, x и $f(x)$ са съответни, то $(\mathcal{W}', V'), f(x) \not\models \varphi$ — противоречие с това, че φ е вярна в $\mathcal{W}'$.
Следователно $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ са модално еквивалентни. $\square$

Твърдение 9 *$ML(SAPP)$ има polysize frame свойството по отношение на множеството от всички крайни модели на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$.*

Proof: Нека $\mathcal{W}$ е модел на $SAPP$, V е оценка в $\mathcal{W}$, такава че $(\mathcal{W}, V), a \models \varphi$. $Q_1, \ldots, Q_k$; α; $[b_0], \ldots, [b_n], \ldots$; $[b'_0], \ldots, [b'_n], \ldots$, $n < \alpha$; $\mathcal{V}$, V^* използваме за същите неща, както в доказателството на лема 10. Дефинираме функции γ, δ, f по същия начин, както в доказателството на лема 10. Нека $\lambda \in \delta([a])$ и $a^* \in [a]$, $V^*(a^*) = \lambda$. Нека b е такова, че aOb. Нека $\mu \in \delta([b])$ и $b^* \in [b]$, $V^*(b^*) = \mu$. Нека $\sigma \in f(\alpha)$ и $f(\xi) = \sigma$ за безкрайно много $\xi \in \alpha$. Нека $[b_\xi]$ е такова, че $f(\xi) = \sigma$. Нека $\lambda_1 \in \delta([b_\xi])$ и $w_1^* \in [b_\xi]$, $V^*(w_1^*) = \lambda_1$; $\lambda_2 \in \delta([b'_\xi])$ и $w_2^* \in [b'_\xi]$, $V^*(w_2^*) = \lambda_2$. Нека W' е $\{a, a^*, b^*, w_1^*, w_2^*\}$.

За всяка подформула $[C]\psi$ на φ правим следното:
$\bullet$) Ако има два елемента на W в различни класове на еквивалентност x, y, такива че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \psi$ и $(\mathcal{W}, V), y \not\models \psi$, тогава избираме два такива елемента и ги добавяме към W'. Иначе, ако има x, такова че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \psi$, тогава избираме един такъв елемент и го добавяме към W'.

Нека $[b_{i_1}], [b'_{i_1}], \ldots, [b_{i_n}], [b'_{i_n}]$ са класовете на еквивалентност на W, такива че съдържат всичките елементи на W' и за всяко $j = 1, \ldots, n$ $[b_{i_j}]$ или $[b'_{i_j}]$ съдържа елемент на W'.

За всяка подформула на φ $[P]\psi$ и за всеки клас сред $[b_{i_1}], [b'_{i_1}], \ldots, [b_{i_n}], [b'_{i_n}]$ правим следното:
$\bullet$) Ако има два различни елемента x и y в класа, такива че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \psi$ и $(\mathcal{W}, V), y \not\models \psi$, тогава избираме два такива елемента и ги добавяме към W'. Ако има само един елемент x в класа, такъв че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \psi$, добавяме го към W'.

За всяка подформула на φ $[L]\psi$ и за всеки клас сред $[b_{i_1}], [b'_{i_1}], \ldots, [b_{i_n}], [b'_{i_n}]$ правим следното:
$\bullet$) Ако има x в класа, такова че $(\mathcal{W}, V), x \not\models \psi$, тогава избираме един такъв елемент и го добавяме към W'.

За всеки клас $[x]$ сред $[b_{i_1}], [b'_{i_1}], \ldots, [b_{i_n}], [b'_{i_n}]$ и различен от $[a], [b], [b_\xi], [b'_\xi]$, правим следното:
$\bullet$) Ако има y в $[x]$, такова че $V^*(y) \in \delta([x])$, тогава добавяме към името на y една $*$. Иначе нека $\lambda \in \delta([x])$; избираме елемент d^* в $[x]$, такъв че $V^*(d^*) = \lambda$, и добавяме d^* към W'.

$|W'| \leq 16m^2 + 2m + 5$, където m е дължината на φ. За всяко x в W' и за всяка $R = P, C, L$ и за всяка подформула на φ $[R]\psi$ имаме: ако $(\mathcal{W}, V), x \not\models [R]\psi$, тогава има x' в W', такова че xRx' и $(\mathcal{W}, V), x' \not\models \psi$. За всеки клас сред $[b_{i_1}], [b'_{i_1}], \ldots, [b_{i_n}], [b'_{i_n}]$ има в W' елемент със $*$ от класа.

$\mathcal{W}' = (W', P', C', L')$ е модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$, където:

$P'(b, c)$, ако $P(b, c)$ или b и c са един и същи елемент със $*$,
$C'(b, c)$, ако $C(b, c)$ или $b \in [w_1^*] \cup [w_2^*]$, или $c \in [w_1^*] \cup [w_2^*]$,
$L'(b, c)$, ако $L(b, c)$.

Нека $x \in [b_\xi],\ y \in [b_\eta] (x \in [b'_\xi],\ y \in [b'_\eta])$ за някакви $\xi, \eta \in \alpha$. Ще казваме, че x и y са съответни ако $f(\xi) = f(\eta)$ и $V^*(x) = V^*(y)$.

Ако x и y са съответни и $x' \in [x]$, тогава има y' в $[y]$, такова че x' и y' са съответни.

За всяка подформула на φ ψ имаме: ако x и y са съответни, то $(\mathcal{W}, V), x \models \psi \longleftrightarrow (\mathcal{W}, V), y \models \psi$. Доказателството е просто.

С индукция по ψ ще докажем, че за всяка подформула на φ ψ имаме: ако $y \in W'$, x и y са съответни, то $(\mathcal{W}, V), x \models \psi \longleftrightarrow (\mathcal{W}', V'), y \models \psi$. Ясно е, че базата на индукцията е вярна. Ако ψ е отрицание или конюнкция, то резултатът следва от индукционната хипотеза.

Сега нека ψ е $[R]\psi_1$, където $R = P,\ C$ или L. Нека ψ е подформула на φ, $y \in W'$, x и y са съответни. Ще докажем, че $(\mathcal{W}, V), x \models \psi \longleftrightarrow (\mathcal{W}', V'), y \models \psi$. Доказателството, че ако $(\mathcal{W}, V), x \models \psi$, то $(\mathcal{W}', V'), y \models \psi$, се оставя на читателя. Нека $(\mathcal{W}', V'), y \models \psi$. Нека xRx' за някакво x'. Можем да намерим y', такова че x' и y' са съответни и yRy' - доказателството се оставя на читателя. Допускаме, че $(\mathcal{W}, V), x' \not\models \psi_1$. Следователно $(\mathcal{W}, V), y' \not\models \psi_1$. Така имаме $(\mathcal{W}, V), y \not\models [R]\psi_1$, $y \in W'$ и оттук има y'' в W', такова че yRy'' и $(\mathcal{W}, V), y'' \not\models \psi_1$. Чрез индукционната хипотеза, $(\mathcal{W}', V'), y'' \not\models \psi_1$; така че $(\mathcal{W}', V'), y \not\models [R]\psi_1$, противоречие. Следователно $(\mathcal{W}, V), x' \models \psi_1$.

Тъй като $a \in W'$, a и a са съответни, $(\mathcal{W}, V), a \models \varphi$, имаме $(\mathcal{W}', V'), a \models \varphi$. $\square$

Твърдение 10 *Проблемът дали една формула е $ML(SAPP)$-удовлетворима е NP-пълен.*

Proof: В [2] е доказано следното твърдение:
Нека A е непротиворечива модална логика с polysize model свойството по отношение на някакъв клас от модели M. Ако проблемът за решаване дали $\mathfrak{M} \in M$ е разрешим за време, полиномиално на $|\mathfrak{M}|$, тогава проблемът дали формула е A-удовлетворима е NP-пълен.

Нашето твърдение следва оттук, от твърдение 9 и от факта, че проблемът дали един краен модел $\mathfrak{M}$ е модел на $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_9, \mu_1, \ldots, \mu_6\}$ е разрешим за време, полиномиално на $|\mathfrak{M}|$. $\square$

Литература

[1] Ph. Balbiani, T. Tinchev, Line-based affine reasoning in Euclidean plane. Journal of Applied Logic, vol. 5, No. 3 (2007), 421–434.

[2] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal Logic. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 53. Cambridge University Press, 2001.