Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по математика и информатика
Катедра „Математическа логика и приложенията ѝ“

Дипломна работа

на тема

Видимост между радарчета

Николай Иванов Белухов
Специалност „Логика и алгоритми“, фн 23917

Научен ръководител: проф. д-р Тинко Тинчев

София, 2014

Увод

Настоящият текст се оформи в резултат на работата над следната задача:

Задача. *Радарче* a наричаме наредена двойка, състояща се от краен отворен интервал I_a върху реалната права (*област на видимост* на радарчето a) и точка E_a от този интервал (*оченце* на радарчето a). Казваме, че радарчето a *вижда* радарчето b, и пишем $a \rhd b$, ако областта на видимост на a съдържа оченцето на b.

Да разгледаме множеството $\mathcal{U}$, състоящо се от всички верни универсални затворени формули, отнасящи се до радарчета и изказани в езика от първи ред с предикатен символ за видимост $\rhd$. Възможно ли е $\mathcal{U}$ да се аксиоматизира с крайно множество от аксиоми?

„Радарчетата“ от условието представляват един естествен начин да се моделира чрез геометрични обекти многоагентна среда, агентите в която могат да си взаимодействат по различни начини – в случая, като се „виждат“ един друг. Тази идея поражда голямо разнообразие от въпроси, които все още са слабо изследвани. Основни резултати по някои от тях – като например разрешимост и сложност на съответните логики – са представени в статиите на Ф. Балбиани, О. Гаске и Ф. Шварцентрубер [1] и [2], О. Гаске и Ф. Шварцентрубер [4] и Ф. Шварцентрубер [10] и [11]. Подходът в тези статии, обаче, се различава съществено от настоящото изложение.

За разлика от радарчетата, жителите на Линоландия (наречена така по аналогия с Едуин Абътовия фантастичен свят Флатландия от едноименния роман) могат да виждат безкрайно далеч – но само в едната посока. С други думи, техните области на видимост представляват полуправи, а оченцата им са разположени в съответните начални точки. Както ще видим в параграф 3.1, това съществено облекчава аксиоматизацията на разглеждания тук универсален фрагмент.

Нещо повече – тази аксиоматизация е засегната в изброените работи само бегло. На централно място вместо това стои надграждането на геометричната логика с епистемична (Какво агентът x знае, че агентът y знае, че x вижда?) и нейното изследване от гледна точка на теорията на изчислимостта.

Настоящата работа е организирана, както следва. В глава 1 ще въведем един набор от основни инструменти, които ще ни служат през останалата част от текста. След като сме подготвили почвата по този начин, първоначалната задача за радарчетата ще решим още в параграф 2.1. Оттам нататък, усилията ни ще бъдат посветени на различни нейни обобщения и вариации.

Глава 2 третира различни видове радарчета с крайни области на видимост. В две или повече измерения съществува голямо разнообразие от естествени обобщения на първоначалните едномерни радарчета. За едно от тях – радарчета с области на видимост – кръгове – е възможно да се проведе технически по-деликатен вариант на разсъждението от едномерния случай; съответните резултати са представени в параграф 2.2. За повечето други естествени обобщения, поставеният от нас въпрос или се решава твърде лесно (като например за радарчета с области на видимост – изпъкнали ограничени множества), или на автора не е известно решение (като например за радарчета с области на видимост – Декартови произведения на интервали). Параграф 2.3 съдържа обзор на получените частични резултати и отворени въпроси.

Глава 3 разглежда радарчета с безкрайни области на видимост. В параграф 3.1 са разгледани радарчета, подобни на жителите на Линоландия, както и самите жители. Параграф 3.2 е посветен на радарчета с области на видимост – полуравнини. Този въпрос се оказва тясно свързан с добре изследвания проблем за изправимостта на подреждания от псевдоправи; същият параграф съдържа обзор на съответните резултати и преглед на връзката между двата проблема. Нови интересни задачи възникват, когато области на видимост на радарчетата могат да бъдат не произволни полуравнини, а само тези, отговарящи на определени условия. Частични резултати по няколко проблема от този вид са представени в параграф 3.3. Възникналите по пътя отворени въпроси са систематизирани в параграф 3.4.

Благодаря на научния си ръководител проф. д-р Тинко Тинчев за поставянето на първоначалната задача и помощта в работата над настоящия текст, както и на всички членове на катедра „Математическа логика и приложенията ѝ“ към ФМИ на СУ.

Съдържание

1 Предварителни бележки

1.1 Абстрактни радарчета и области

Дефиниция 1.1. *Област в Евклидовото пространство* $\mathbb{R}^n$, или, накратко, просто *област*, наричаме произволно подмножество на $\mathbb{R}^n$.

Нека $\mathcal{F}$ бъде фиксирана фамилия от области в $\mathbb{R}^n$. Няколко примера за фамилии, които ще разгледаме в детайл по-нататък, са фамилията на крайните отворени интервали в $\mathbb{R}^1$, фамилията на затворените кръгове в $\mathbb{R}^2$, фамилията на изпъкналите ограничени затворени области в $\mathbb{R}^n$ и фамилията на полупространствата в $\mathbb{R}^n$.

Дефиниция 1.2. *Абстрактно радарче*, или, накратко, просто *радарче*, наричаме наредена двойка от вида $a = (E_a, S_a)$, в която E_a е точка от $\mathbb{R}^n$ (око на радарчето a) и S_a е област от $\mathcal{F}$ (област на видимост на радарчето a).

Дефиниция 1.3. Казваме, че радарчето a *вижда* радарчето b, ако областта на видимост на a съдържа оченцето на b.

Дефиниция 1.4. *Структура на радарчетата* наричаме структурата $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}$

- за езика $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ с единствен нелогически символ двуместният предикатен символ $\rhd$,
- с универсум множеството на всички радарчета, и
- с интерпретация на $\rhd$ – релацията на видимост, $\{(a, b) \mid a \text{ вижда } b\}$.

Дефиниция 1.5. *Универсален фрагмент* на една теория от първи ред наричаме множеството на всички универсални затворени формули в теорията.

Универсалния фрагмент на теорията от първи ред $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{rad}})$ на структурата на радарчетата ще означаваме с $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$.

Дефиниция 1.6. *Аксиоматизация* на едно множество от универсални затворени формули $\mathcal{U}$ от езика $\mathcal{L}$ наричаме такова множество от универсални затворени формули A от $\mathcal{L}$, че множеството от универсалните затворени формули, които са логически следствия на формулите от A, съвпада с $\mathcal{U}$. С други думи, A е аксиоматизация на $\mathcal{U}$, ако за всяка структура $\mathcal{A}$, която е модел за A, е изпълнено, че универсалният фрагмент на $\mathrm{Th}(\mathcal{A})$ съвпада с $\mathcal{U}$.

Да забележим, че ако φ е безкванторна формула от един език на предикатното смятане от първи ред $\mathcal{L}$ и $\varphi^\forall$ е нейното универсално затваряне, то φ и $\varphi^\forall$ имат едни и същи модели. Оттук следва, че въпросът за аксиоматизируемостта на универсалния фрагмент на теорията на една структура е еквивалентен с въпроса за аксиоматизируемостта на множеството на безкванторните формули, верни в структурата. В много случаи, изпускането на универсалните кванторни префикси е удобно и естествено.

Задача за радарчетата. Притежава ли $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$ крайна аксиоматизация?

Когато задачата за радарчетата се формулира по толкова абстрактен начин, нейните специфични особености, оправдаващи названието „радарчета“, почти изцяло се губят. Тази особености ние ще възстановим в параграф 1.3. Преди това, обаче, да отбележим, че в този си вид задачата допуска и една по-удобна еквивалентна формулировка.

Дефиниция 1.7. *Структура на областите* наричаме двусортовата структура $\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$

- за езика $\mathcal{L}_{\mathrm{reg}}$ с
  - променливи x, y, z, ... за сорта P (сорт на точките),
  - променливи X, Y, Z, ... за сорта R (сорт на областите), и
  - единствен нелогически символ предикатният символ $\in$ с местност (P, R), с
- универсум за P – множеството на точките от $\mathbb{R}^n$,
- универсум за R – фамилията $\mathcal{F}$, и
- интерпретация на $\in$ – релацията на принадлежност, $\{(a, A) \mid a \text{ лежи в } A\}$.

Универсалният фрагмент на теорията от първи ред $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$ на структурата на областите означаваме с $\mathcal{U}_{\mathrm{reg}}$.

Задача за областите. Притежава ли $\mathcal{U}_{\mathrm{reg}}$ крайна аксиоматизация?

Теорема 1.1. *Задачата за радарчетата има решение точно когато задачата за областите има такова. С други думи, $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$ има крайна аксиоматизация точно когато $\mathcal{U}_{\mathrm{reg}}$ има такава.*

Доказателство. Нека h е изображението от универсалните затворени формули над $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$ в универсалните затворени формули над $\mathcal{L}_{\mathrm{reg}}$, определено, както следва:

$$h(\forall x_1 \ldots \forall x_k \varphi) = \forall y_1 \ldots \forall y_k \forall Y_1 \ldots \forall Y_k \varphi',$$

където φ е безкванторна и φ' се получава от φ чрез замяната на всяка поддума от вида $x_i \rhd x_j$ с $y_j \in Y_i$.

Нека g е изображението от универсалните затворени формули над $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ в универсалните затворени формули над $\mathcal{L}_{\text{rad}}$, определено, както следва:

$$g(\forall x_1 \dots \forall x_k \forall X_1 \dots \forall X_l \varphi) = \forall y_1 \dots \forall y_k \forall z_1 \dots \forall z_l \varphi'',$$

където φ е безкванторна и φ'' се получава от φ чрез замяната на всяка поддума от вида $x_i \in X_j$ със $z_j \rhd y_i$.

Нека A е крайна аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\text{rad}}$. Ще покажем, че в такъв случай $h[A]$ е крайна аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\text{reg}}$.

Наистина, нека φ е произволна формула от $\mathcal{U}_{\text{reg}}$. Както g, така и h запазват „смисъла“ на формулите в съответните им структури, а следователно и тяхната вярност. Оттук, $g(\varphi)$ принадлежи на $\mathcal{U}_{\text{rad}}$. Следователно, $g(\varphi)$ е логическо следствие от A.

Да забележим, че ако ψ е предикатна тавтология, то и $h(\psi)$ също е такава. Оттук следва, че h запазва релацията на логическо следване и следователно $h(g(\varphi))$ е логическо следствие от $h[A]$.

Най-накрая, да забележим, че за произволна формула φ от дефиниционната област на g, φ следва логически от $h(g(\varphi))$. С това показахме, че φ е логическо следствие от $h[A]$, както се искаше.

Аналогично се доказва и че ако A е крайна аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\text{reg}}$, то $g[A]$ е крайна аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\text{rad}}$. $\square$

1.2 Компактност и аксиоматизируемост

Сега ще въведем няколко дефиниции и ще формулираме един критерий за съществуване на крайна аксиоматика в задачите за радарчетата и за областите.

Дефиниция 1.8. *Конфигурация* наричаме крайна редица от области от фамилията $\mathcal{F}$.

Дефиниция 1.9. *Разположение* наричаме наредена k-орка от вида $(e_1, e_2, \dots, e_k)$, в която $e_i \in \{+, -\}$ за $1 \le i \le k$. Числото k наричаме *размерност* на разположението.

Нека R е разположението $(e_1, e_2, \dots, e_k)$. За $1 \le i \le k$, с $R(i) = e_i$ означаваме i-тата координата на R, и за $e \in \{+, -\}$ с (R, e) означаваме разположението $(e_1, e_2, \dots, e_k, e)$.

Нека още $\overline{+} = -$ и $\overline{-} = +$. Тогава с $\overline{R}$ означаваме разположението $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k})$.

Дефиниция 1.10. *Разположение на точката P относно конфигурацията X_1, X_2, ..., X_k* наричаме разположението $(e_1, e_2, \dots, e_k)$, в което $e_i = +$ ако $P \in X_i$ и $e_i = -$ ако $P \notin X_i$ за $1 \le i \le k$.

Дефиниция 1.11. Казваме, че конфигурацията $\mathcal{X}$ *реализира* разположението R, ако има точка P, такава, че разположението на P относно $\mathcal{X}$ е точно R.

Дефиниция 1.12. *Район* с разположение R, породен от конфигурацията $\mathcal{X}$, наричаме множеството на всички точки, чието разположение относно $\mathcal{X}$ е R.

Дефиниция 1.13. Казваме, че конфигурацията $\mathcal{X}$ е *оптимална*, ако тя реализира най-големия възможен брой разположения (или, което е същото, поражда най-големия възможен брой райони) измежду всички конфигурации, съставени от същия брой области.

Дефиниция 1.14. *Набор* наричаме крайно множество от разположения с една и съща размерност.

Дефиниция 1.15. Казваме, че конфигурацията $\mathcal{X}$ *реализира* набора $\mathcal{R}$, ако тя реализира всеки негов елемент. Ако наборът $\mathcal{R}$ се състои от разположенията R_1, R_2, ..., R_m и точките P_1, P_2, ..., P_m са такива, че разположението на P_i относно $\mathcal{X}$ е точно R_i за $1 \leq i \leq m$, то казваме, че точките P_1, P_2, ..., P_m *реализират* набора $\mathcal{R}$ по отношение на конфигурацията $\mathcal{X}$.

Дефиниция 1.16. Казваме, че наборът $\mathcal{R}$ е *реализируем*, ако съществува конфигурация, която го реализира.

Дефиниция 1.17. Казваме, че разположението R' се получава от разположението R чрез премахване на позициите i_1, i_2, ..., i_l, ако R' се получава от R чрез изтриване на компонентите, разположени на позиции i_1, i_2, ..., i_l. Обратно, казваме, че позициите i_1, i_2, ..., i_l от разположението R дават разположението R', ако R' се получава от R чрез изтриване на всички компоненти, разположени на позиции, различни от i_1, i_2, ..., i_l.

Дефиниция 1.18. Казваме, че наборът $\mathcal{R}'$ се получава от набора $\mathcal{R}$ чрез премахване на позициите i_1, i_2, ..., i_l, ако

$$\mathcal{R}' = \{R' \mid R' \text{ се получава от } R \text{ с премахване на позициите } i_1, i_2, \ldots, i_l \text{ за някое } R \in \mathcal{R}\}.$$

Обратно, казваме, че позициите i_1, i_2, ..., i_l от набора $\mathcal{R}$ дават набора $\mathcal{R}'$, ако

$$\mathcal{R}' = \{R' \mid \text{ Позициите } i_1, i_2, \ldots, i_l \text{ от } R \text{ дават } R' \text{ за някое } R \in \mathcal{R}\}.$$

Дефиниция 1.19. Казваме, че наборът $\mathcal{R}$ е N*-некомпактен*, ако $\mathcal{R}$ не е реализируем, но кои да са N различни позиции от $\mathcal{R}$ дават реализируем набор. Когато N е с единица по-малко от размерността на $\mathcal{R}$ (тоест, когато при премахването на произволна позиция от $\mathcal{R}$ се получава реализируем набор), казваме просто, че $\mathcal{R}$ е *некомпактен*.

Теорема 1.2. *Нека фамилията $\mathcal{F}$ е такава, че над нея съществуват N-некомпактни набори за произволно големи естествени числа N. Тогава $\mathcal{U}_{\text{reg}}$ не притежава крайна аксиоматизация. Обратно, ако за някое N над $\mathcal{F}$ не съществува N-некомпактен набор, то тогава $\mathcal{U}_{\text{reg}}$ притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Нека над $\mathcal{F}$ съществуват N-некомпактни набори за произволно големи естествени числа N. Да допуснем, че $\mathcal{U}_{\text{reg}}$ притежава крайна аксиоматизация A.

Нека N бъде естествено число, толкова голямо, че всяка формула в A съдържа не повече от N променливи, обозначаващи области. Нека $\mathcal{R}$ бъде N-некомпактен набор над $\mathcal{F}$ от размерност k, съдържащ l елемента.

Да разгледаме структурата $\mathcal{B}$ за $\mathcal{L}_{\text{reg}}$ с

- универсум за сорта на областите R, който съдържа по един елемент S_i за всяка позиция i, $1 \leq i \leq k$, на набора $\mathcal{R}$,
- универсум за сорта на точките P, който съдържа по един елемент p_j за всяко разположение R_j в $\mathcal{R}$, $1 \leq j \leq l$, и
- интерпретация на $\in$ –

$$\{(p_u, S_v) \mid v\text{-тата координата на разположението } R_u \text{ има стойност } +\}.$$

Понеже всяка формула от A съдържа не повече от N променливи, обозначаващи области, и произволни N позиции в набора $\mathcal{R}$ дават реализируем набор, то структурата $\mathcal{B}$ е модел за A.

Нека $\varphi_{u,v}$ е формулата $x_u \in X_v$, ако v-тата координата на разположението R_u има стойност $+$, и $\neg(x_u \in X_v)$ в противен случай. Да разгледаме формулата

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall X_1 \ldots \forall X_k \neg \bigwedge_{u,v} \varphi_{u,v}.$$

Тази формула принадлежи на $\mathcal{U}_{\text{reg}}$, защото наборът $\mathcal{R}$ е нереализируем; в същото време, тя не е вярна в $\mathcal{B}$. Получихме противоречие; следователно, първоначалното допускане е невярно и $\mathcal{U}_{\text{reg}}$ не притежава крайна аксиоматизация.

Нека сега над $\mathcal{F}$ не съществуват N-некомпактни набори за някое естествено число N. Нека $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, ..., $\mathcal{R}_s$ са всички нереализируеми набори с размерност N; техният брой е краен, понеже всеки от тях е подмножество на $\{+,-\}^N$. Нека $R_{i,1}$, $R_{i,2}$, ..., R_{i,l_i} са всички разположения в $\mathcal{R}_i$ за $1 \leq i \leq s$. Нека $\varphi_{i,u,v}$ е формулата $x_u \in X_v$, ако v-тата координата на разположението $R_{i,u}$ има стойност $+$, и $\neg(x_u \in X_v)$ в противен случай. Най-накрая, нека A е множеството на всички формули от вида

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{l_i} \forall X_1 \ldots \forall X_N \neg \bigwedge_{u,v} \varphi_{i,u,v}$$

за всевъзможните i, u, v. Ще покажем, че A е аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\text{reg}}$.

Понеже $A \subset \mathcal{U}_{\text{reg}}$, всички логически следствия от A принадлежат на $\mathcal{U}_{\text{reg}}$.

Да допуснем сега, че има формула $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_l \forall X_1 \ldots \forall X_k \psi$ от $\mathcal{U}_{\text{reg}}$, която не е логическо следствие от A. Тогава множеството от формули $A \cup \{\neg\varphi\}$ има модел $\mathcal{B}$.

В този модел ще бъде вярна формулата $\exists x_1 \ldots \exists x_l \exists X_1 \ldots \exists X_k \neg\psi$. Нека обектите p_1, ..., p_l от сорт P и обектите S_1, ..., S_k от сорт R са свидетели за това съществуване.

Да образуваме набора $\mathcal{R}$, както следва: за всяко $1 \leq i \leq l$, $\mathcal{R}$ съдържа едно разположение $(R_{i,1}, R_{i,2}, \ldots, R_{i,k})$, чиято j-та координата $R_{i,j}$ е равна на $+$, ако наредената двойка (p_i, S_j) приндалежи на интерпретацията на $\in$ в $\mathcal{B}$, и на $-$ в противен случай.

Наборът $\mathcal{R}$ е нереализируем, понеже φ е вярна в $\mathcal{A}_{\mathrm{reg}}$. В същото време, понеже $\mathcal{B}$ е модел за A, всеки N позиции от $\mathcal{R}$ дават реализируем набор. Следователно, наборът $\mathcal{R}$ е N-некомпактен.

Достигнахме до противоречие. Следователно, допускането е невярно и всички формули в $\mathcal{U}_{\mathrm{reg}}$ са логически следствия на A. □

Следствие 1.1. *Нека фамилията $\mathcal{F}$ е такава, че над нея съществуват N-некомпактни набори за произволно големи естествени числа N. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$ не притежава крайна аксиоматизация. Обратно, ако за някое N над $\mathcal{F}$ не съществува N-некомпактен набор, то тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$ притежава крайна аксиоматизация.*

Теорема 1.2 и нейното следствие свеждат задачата за абстрактните радарчета и задачата за областите до чисто комбинаторно-геометричния въпрос за съществуването на некомпактни набори.

1.3 Специални радарчета

Дефиниция 1.20. Нека C е условие над точката x и подмножеството X на $\mathbb{R}^n$; или, с други думи, нека C е подмножество на Декартовото произведение $\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Казваме, че a е *специално* радарче, *отговарящо на условието* C, ако оченцето на a и областта на видимост на a изпълняват условието C; или, с други думи, ако $(E_a, S_a) \in C$.

Няколко типични условия, които ще разгледаме в детайл по-нататък, са следните: E_a лежи в S_a (както в първоначалната задача, представена в Увода), E_a е край на отсечката S_a, E_a е среда на отсечката S_a, и E_a е център на кръга S_a.

Дефиниция 1.21. Структура на специалните радарчета, отговарящи на условието C, наричаме подструктурата $\mathcal{A}^C_{\mathrm{rad}}$ на структурата на радарчетата $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}$ с универсум – множеството на всички специални радарчета, отговарящи на условието C.

Универсалния фрагмент на теорията от първи ред $\mathrm{Th}(\mathcal{A}^C_{\mathrm{rad}})$ на структурата на специалните радарчета, отговарящи на условието C, означаваме с $\mathcal{U}^C_{\mathrm{rad}}$.

Дефиниция 1.22. Казваме, че N-некомпактният набор $\mathcal{R}$ с размерност k е *стабилен*, ако има конфигурация X_1, X_2, ..., X_k, такава, че за всеки N позиции $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_N$ от $\mathcal{R}$, наборът, образуван от тези позиции, се реализира от конфигурацията X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_N}. Конфигурацията X_1, X_2, ..., X_k наричаме *свидетелска конфигурация* за $\mathcal{R}$.

Интуитивно, посочването на свидетели за положителната част от дефиницията на N-некомпактен набор е особено лесно за стабилни набори.

Дефиниция 1.23. Казваме, че N-некомпактният набор $\mathcal{R}$ с размерност k е *удобен* над фамилията $\mathcal{F}$ и условието C, ако $\mathcal{R}$ е стабилен над $\mathcal{F}$ и има свидетелска конфигурация $\mathcal{X}$ за $\mathcal{R}$ (състояща се от областите X_1, X_2, ..., X_k и реализираща l на брой различни разположения R_1, R_2, ..., R_l), точки P_1, P_2, ..., P_k и Q_1, Q_2, ..., Q_l от $\mathbb{R}^n$, елементи α_1, α_2, ..., α_k, β и γ на множеството $\{+, -\}$, и области Y_1, Y_2, ..., Y_l от $\mathcal{F}$, за които са изпълнени следните условия:

(i) За всяко $1 \leq i \leq k$, P_i и X_i удовлетворяват C.

(ii) За всяко $1 \leq j \leq l$, Q_j и Y_j удовлетворяват C.

(iii) За всяко $1 \leq j \leq l$, разположението на Q_j относно конфигурацията $\mathcal{X}$ е R_j.

(iv) За всяко $1 \leq j \leq l$,

  (а) разположението на P_i относно Y_j е α_i за всяко $1 \leq i \leq k$,

  (б) разположението на Q_j относно Y_m е β за всяко $1 \leq m \leq l$, $m \neq j$, и

  (в) разположението на Q_j относно Y_j е γ.

Конфигурацията $\mathcal{X}$ наричаме *шаблонна конфигурация* за $\mathcal{R}$, а разположенията α_1, α_2, ..., α_k, β и γ – *шаблонни разположения.*

Въпреки трудността на тази дефиниция, за много естествени фамилии $\mathcal{F}$ и условия C стабилните набори, които можем да конструираме, се оказват също така и удобни, без за това да сме полагали допълнителни усилия. (Основна причина за това е „гъстотата“ на съответните фамилии.) Няколко такива набора ще разгледаме в параграфи 2.1 и 2.2. Във всеки от случаите, за шаблонни разположения ще могат да ни послужат просто $\alpha_1 = ... = \alpha_k = \beta = -$ и $\gamma = +$; тук, обаче, предпочитаме да дадем дефиницията в по-общ вид.

Многобройните свойства, които един удобен набор притежава по дефиниция, ни позволяват да пренасяме различни конструкции от по-свободния свят на областите в по-ограничения свят на специалните радарчета. Това се вижда достатъчно ясно в доказателството на следващата теорема.

Теорема 1.3. *Нека фамилията $\mathcal{F}$ и условието C са такива, че над тях съществуват удобни N-некомпактни набори за произволно големи естествени числа N. Тогава $\mathcal{U}^C_{\mathrm{rad}}$ не притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Нека над $\mathcal{F}$ и C съществуват удобни N-некомпактни набори за произволно големи естествени числа N. Да допуснем, че $\mathcal{U}^C_{\mathrm{rad}}$ притежава крайна аксиоматизация A.

Нека N бъде естествено число, толкова голямо, че всяка формула в A съдържа не повече от N променливи. Нека $\mathcal{R}$ бъде удобен N-некомпактен набор над $\mathcal{F}$ с размерност k и шаблонна конфигурация X_1, X_2, ..., X_k, съдържащ s елемента R_1, R_2, ..., R_s.

Нека P_1, ..., P_k, Q_1, ..., Q_l, Y_1, ..., Y_l, α_1, ..., α_k, β и γ са избрани както в дефиницията на удобен набор.

Да разгледаме структурата $\mathcal{B}$ за $\mathcal{L}_{\mathrm{rad}}$, определена, както следва:

- Универсумът на $\mathcal{B}$ съдържа $k+s$ елемента: по един елемент a_i за всяка координата i в $\mathcal{R}$ и по един елемент b_j за всеки елемент R_j на $\mathcal{R}$.
- Предикатният символ $\rhd$ интерпретираме, както следва:
    - $a_i \rhd a_j$ точно когато $P_j \in X_i$;
    - $a_i \rhd b_j$ точно когато i-тата координата на разположението R_j е равна на $+$;
    - $b_i \rhd b_j$ точно когато $i \neq j$ и $\beta = +$ или $i = j$ и $\gamma = +$; и
    - $b_i \rhd a_j$ точно когато $\alpha_j = +$.

Ще покажем, че $\mathcal{B}$ е модел за A.

За тази цел, достатъчно е да се убедим, че за произволни N елемента на универсума на $\mathcal{B}$ x_1, x_2, ..., x_N има N специални радарчета y_1, y_2, ..., y_N от универсума на $\mathcal{A}^C_{\mathrm{rad}}$, такива, че за $1 \leq i, j \leq N$ имаме $x_i \rhd x_j$ точно когато y_i вижда y_j.

Настина, нека, без загуба на общност, $x_1 = a_1$, ..., $x_u = a_u$, $x_{u+1} = b_1$, ..., $x_N = b_v$, където $v = N - u$, са елементи на универсума на $\mathcal{B}$.

Понеже $u \leq N$, наборът, образуван от позициите 1, 2, ..., u в $\mathcal{R}$, се реализира от конфигурацията X_1, X_2, ..., X_u. Без загуба на общност, нека точките Q_1, Q_2, ..., Q_v реализират разположенията, образувано от позициите 1, 2, ..., u съответно в разположенията R_1, R_2, ..., R_v.

Нека за $1 \leq i \leq u$, y_i бъде радарчето с оченце P_i и област на видимост X_i, и, за $1 \leq j \leq v$, y_{u+j} бъде радарчето с оченце Q_j и област на видимост Y_j. Непосредствено се проверява, че така дефинираните радарчета y_1, y_2, ..., y_N притежават исканото свойство.

И така, $\mathcal{B}$ е модел за A.

Нека сега $\varphi_{u,v}$ е формулата $x_u \rhd y_v$, ако u-тата координата на разположението R_v има стойност $+$, и $\neg(x_u \rhd y_v)$ в противен случай. Да разгледаме формулата

$$\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_s \neg \bigwedge_{u,v} \varphi_{u,v}.$$

Тази формула принадлежи на $\mathcal{U}^C_{\text{rad}}$, защото наборът $\mathcal{R}$ е нереализируем; в същото време, тя не е вярна в $\mathcal{B}$. Получихме противоречие; следователно, първоначалното допускане е невярно и $\mathcal{U}^C_{\text{reg}}$ не притежава крайна аксиоматизация. □

1.4 Графи

Дефиниция 1.24. Казваме, че графът H е *подграф* на графа G, ако всеки връх на H е връх и на G и всяко ребро на H е ребро и на G. Ако всеки два върха в H са свързани с ребро точно когато същите два върха са свързани с ребро в G, то казваме, че H е *породен* подграф на G. Ако, освен това, V е множеството от върховете на H, то казваме, че H е подграфът на G, породен от V.

Дефиниция 1.25. Казваме, че графът G *покрива* графа H, ако H е подграф на G.

Дефиниция 1.26. *Пътека* в графа G наричаме свързан ацикличен подграф на G, в който всеки връх е инцидентен с не повече от две ребра.

Пътеката в G с върхове v_1, v_2, ... v_k, в която върховете v_i и v_{i+1} са свързани с ребро за $1 \leq i < k$ (и която, като следствие от този факт, не съдържа други ребра), означаваме с $v_1 v_2 \ldots v_k$.

Дефиниция 1.27. Графа с

- върхове – всевъзможните k-мерни разположения, и
- ребра – двойките (R', R'') от k-мерни разположения, които се различават точно в една координата i,

наричаме *k-мерен хиперкуб* и означаваме с C_k. Индекса i наричаме *направление* на реброто $R'R''$.

Дефиниция 1.28. Граф на набора $\mathcal{R}$ наричаме произволен подграф на C_k с върхове – елементите на $\mathcal{R}$.

Дефиниция 1.29. Един подграф G на C_k наричаме *реализируем* (*некомпактен*, *стабилен*, *удобен*), ако наборът, съставен от върховете му, е реализируем (некомпактен, стабилен, удобен).

По-нататък ще разледаме няколко фамилии $\mathcal{F}$, разсъжденията ни за които са построени върху различни необходими и достатъчни условия за реализируемост, изказани на езика на теория на графите.

Дефиниция 1.30. *Проекция* на подграфа G на C_k по направленията d_1, d_2, ..., d_l наричаме подграфа на C_{k-l} с

- върхове – разположенията, които се получават при премахване на позициите d_1, d_2, ..., d_l от върховете на G, и

- ребра – двойките (R', R'') от $(k-l)$-мерни разположения, за които $R' \neq R''$ и има ребро $S'S''$ в G, такова, че R' и R'' се получават чрез премахване на позициите d_1, d_2, ..., d_l от S' и S'', съответно.

С други думи, проекцията на G се получава, като отъждествим всички върхове на G, различаващи се само в позициите d_1, d_2, ..., d_l, и премахнем новообразуваните примки.

Проектирането на графи ни предоставя един по-нагледен подход към некомпактните набори. Негови приложения ще разгледаме в параграфи 2.1 и 3.2.

Дефиниция 1.31. Нека при проектирането на подграфа G на C_k по направлението d се получава подграфът G' на C_{k-1}. За всеки връх v на G', поне едно от разположенията $(v, -)$ и $(v, +)$ е връх на G. Върховете v на G', за които точно едно от тези разположения е връх на G, наричаме *единични*, а тези, за които и двете разположения са върхове на G – *двойни*.

2 Радарчета с крайни области на видимост

2.1 Отсечки в $\mathbb{R}^1$

В рамките на този параграф, нека $\mathcal{F}$ е фамилията на крайните отворени интервали в $\mathbb{R}^1$.

Нека N е естествено число. Ще конструираме стабилен некомпактен набор с размерност N над $\mathcal{F}$.

Лема 2.1. *Всеки реализируем набор $\mathcal{R}$ над $\mathcal{F}$ се реализира от конфигурация $\mathcal{I}$ и точки, които не са гранични за интервалите, съставящи $\mathcal{I}$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{R}$ е реализируем набор и нека конфигурацията $\mathcal{I} = I_1$, I_2, ..., I_k и точките P_1, P_2, ..., P_m реализират $\mathcal{R}$. За всеки интервал $I_i = (a_i, b_i)$ в $\mathcal{I}$, нека $l_i > a_i$ и $r_i < b_i$ са съответно най-лявата и най-дясната точка измежду P_1, P_2, ..., P_m, които се съдържат в I_i. (Ако I_i не съдържа нито една от точките P_1, P_2, ..., P_m, то полагаме $l_i = r_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$.)

Нека $\mathcal{I}' = I'_1$, I'_2, ..., I'_k е произволна конфигурация, чиито елементи $I'_i = (a'_i, b'_i)$ удовлетворяват условията $a_i < a'_i < l_i$ и $r_i < b'_i < b_i$ за $1 \leq i \leq k$. Тогава точките P_1, P_2, ..., P_m няма да бъдат гранични за елементите на $\mathcal{I}'$ и разположенията им спрямо $\mathcal{I}'$ ще съвпадат с разположенията им спрямо $\mathcal{I}$. $\square$

Теорема 2.1. *Нека $\mathcal{R}$ е реализируем набор над $\mathcal{F}$ с размерност N. Тогава $\mathcal{R}$ съдържа не повече от $2N$ елемента.*

Доказателство. Нека конфигурацията $\mathcal{I}$ и точките P_1, P_2, ..., P_m, които не са гранични за елементите на $\mathcal{I}$, реализират $\mathcal{R}$.

Нека L е множеството на граничните точки на интервалите, съставящи $\mathcal{I}$. Тогава множеството $\mathbb{R} \setminus L$ се състои от не повече от $2N + 1$ свързани компоненти. Всеки две измежду точките P_1, P_2, ..., P_m, които попадат в една и съща измежду тези компоненти, реализират едно и също разположение. Освен това, всички точки в двете крайни компоненти също реализират едно и също разположение – $(-, -, \ldots, -)$. $\square$

Теорема 2.2. *Нека $G = R_1 R_2 \ldots R_{2N}$ е цикъл (може би съдържащ повтарящи се върхове или повтарящи се ребра) в N-мерния хиперкуб, такъв, че* *(i) един от върховете му е разположението $(-,-,\ldots,-)$, и*

(ii) за всяко от направленията $1 \leq d \leq N$, редицата от ребра R_1R_2, R_2R_3, ..., $R_{2N}R_1$ съдържа точно два елемента от направление d.

Тогава G е реализируем.

Доказателство. Нека, без загуба на общност, $R_1 = (-,-,\ldots,-)$. Нека $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2N}$ са реални числа и нека, за всяко $1 \leq d \leq 2N$, индексите $l(d)$ и $r(d)$ са такива, че $l(d) < r(d)$ и ребрата $R_{l(d)}R_{l(d)+1}$ и $R_{r(d)}R_{r(d)+1}$ имат направление d. (Тук $R_{2N+1} \equiv R_1$.) Тогава конфигурацията от интервали

$$(a_{l(1)}, a_{r(1)}), (a_{l(2)}, a_{r(2)}), \ldots, (a_{l(N)}, a_{r(N)})$$

реализира G. □

Сега вече сме готови да начертаем един план за конструирането на стабилен некомпактен набор с размерност N над $\mathcal{F}$.

Именно, нека първо намерим подходящ реализируем граф G с $2N$ върха, реализиран от конфигурацията $\mathcal{I}$. Да добавим към него един допълнителен връх v, който при проекция на новообразувания граф G' по кое да е направление се оказва „засенчен“ – тоест, се отъждествява с някой от върховете на G.

Тогава G' ще бъде нереализируем съгласно теорема 2.1. В същото време, всяка от неговите проекции ще съвпада със съответната проекция на G – и следователно ще се реализира от съответната подконфигурация на $\mathcal{I}$!

Търсенето на подходящ граф G е най-удобно е да започнем от условието за засенчване: всеки от съседите на v в C_N трябва да принадлежи на G. Това условие е толкова силно, че в определен смисъл форсира конструкцията, изложена по-долу.

Теорема 2.3. *Има стабилен некомпактен набор с размерност N над $\mathcal{F}$.*

Доказателство. Нека v е произволен връх на C_N. За всяко $1 \leq i \leq N$, нека u_i е неговият съсед в направление i. (С други думи, u_i се различава от v точно в позиция i.) За всеки $1 \leq i < j \leq N$, нека w_{ij} е вторият общ съсед на u_i и u_j. (С други думи, w_{ij} се различава от v точно в позиции i и j.)

Да изберем v по такъв начин, че един от върховете u_1, u_2, ..., u_N, w_{12}, w_{23}, ..., w_{N1} да бъде разположението $(-,-,\ldots,-)$, и да разгледаме цикъла

$$u_1 w_{12} u_2 w_{23} u_3 \ldots u_N w_{N1}.$$

Съгласно теорема 2.2, този цикъл е реализируем. Нека I_1, I_2, ..., I_N бъде конфигурацията, която го реализира, конструирана в доказателството на теоремата.

Да разгледаме набора, съставен от разположенията

$$v, u_1, u_2, \ldots, u_N, w_{12}, w_{23}, \ldots, w_{N1}.$$

Този набор съдържа $2N+1$ различни разположения и следователно е нереализируем съгласно теорема 2.1. В същото време, при премахването от него на коя да е позиция i, $1 \leq i \leq N$, се получава същият резултат, както при премахването на тази позиция от набора u_1, u_2, ..., u_N, w_{12}, w_{23}, ..., w_{N1} – и, следователно, този резултат се реализира от конфигурацията I_1, ..., I_{i-1}, I_{i+1}, ..., I_N. □

Следствие 2.1. *Когато фамилията $\mathcal{F}$ се състои от крайните отворени интервали в $\mathbb{R}^1$, нито в задачата за радарчетата, нито в задачата за областите е възможна крайна аксиоматизация.*

Построеният от нас стабилен набор се оказва също така и удобен за няколко естествени условия.

Теорема 2.4. *Нека* In *е условието оченцето на едно радарче да принадлежи на неговата област на видимост. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$ не притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Действително, наборът и свидетелската конфигурация, построени в доказателството на теорема 2.3, удовлетворяват дефиницията за удобен набор и шаблонна конфигурация с шаблонни разположения $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = -$, $\beta = -$ и $\gamma = +$: достатъчно е само, в означенията на тази дефиниция, за $1 \leq j \leq l$ да изберем точките Q_j различни от точките P_1, P_2, ..., P_k и една от друга, и областите Y_j – достатъчно малки. □

Теорема 2.5. *Нека* Mid *е условието оченцето на едно радарче да е среда на отворения интервал, който е негова област на видимост. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{Mid}}$ не притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на теорема 2.4. □

Дефиниция 2.1. Специалните радарчета, отговарящи на условието оченцето да бъде гранична точка за отворения интервал, който е областта на видимост, наричаме *прожекторчета.*

Прожекторчета могат да се дефинират и с област на видимост – интервал, затворен откъм оченцето. По този начин, всяко прожекторче ще вижда и себе си. Следващият резултат и неговото доказателство се пренасят и за такива „прожекторчета със себепознание“.

Теорема 2.6. *Нека* Lim *е условието оченцето на едно радарче да бъде гранична точка за неговата област на видимост. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{Lim}}$ не притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на теорема 2.4. □

2.2 Кръгове в $\mathbb{R}^2$

На засенчения връх в конструкцията от предишния параграф може да се придаде нагледен геометричен смисъл.

По-нататък, пространството $\mathbb{R}^n$ ще отъждествяваме с естественото му влагане $\mathbb{R}^n \times \{0\}^{m-n}$ в $\mathbb{R}^m$.

Нека $\mathcal{D} = D_1, D_2, \ldots, D_N$ е конфигурация от отворени кълба в $\mathbb{R}^n$. Нека още I е фиксирана точка в $\mathbb{R}^{n+1}$ извън $\mathbb{R}^n$, f е инверсия в $\mathbb{R}^{n+1}$ с център I и радиус единица, и s е образът на $\mathbb{R}^n$ под f. Тогава s е хиперсфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, съдържаща I.

За всяко $1 \leq i \leq N$, да разгледаме хиперравнината h_i в $\mathbb{R}^{n+1}$, в която лежи образът под f на границата ∂D_i на D_i. Тази хиперравнина разделя $\mathbb{R}^{n+1}$ на две полупространства. Нека $g(D_i)$ е отвореното полупространство измежду тези две, което не съдържа I. (Тази дефиниция е коректна, защото $I \notin h_i$.) Тогава f изобразява отворения кръг D_i в сечението на s и $g(D_i)$.

Да разгледаме районите, които конфигурацията от полупространства $g(\mathcal{D}) = g(D_1)$, $g(D_2)$, ..., $g(D_N)$ поражда в $\mathbb{R}^{n+1}$. (С точност до гранични точки, тези райони ще съвпадат със свързаните компоненти на множеството $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup\limits_i h_i$.) Всеки един от тях ще бъде изпъкнало едносвързано множество. При това, едно разположение R, реализирано от конфигурацията $g(\mathcal{D})$, се реализира също така и от конфигурацията $\mathcal{D}$ точно когато съответният му район има обща точка с s.

Когато премахваме области от една конфигурация, новото разделяне на пространството на породени райони винаги представлява уедряване на старото. С други думи, всеки нов район е обединение на няколко (може би един) стари райони.

На основата на тези предварителни бележки можем да съставим следния план за конструиране на стабилен некомпактен набор с размерност N над фамилията на отворените кълба в $\mathbb{R}^n$:

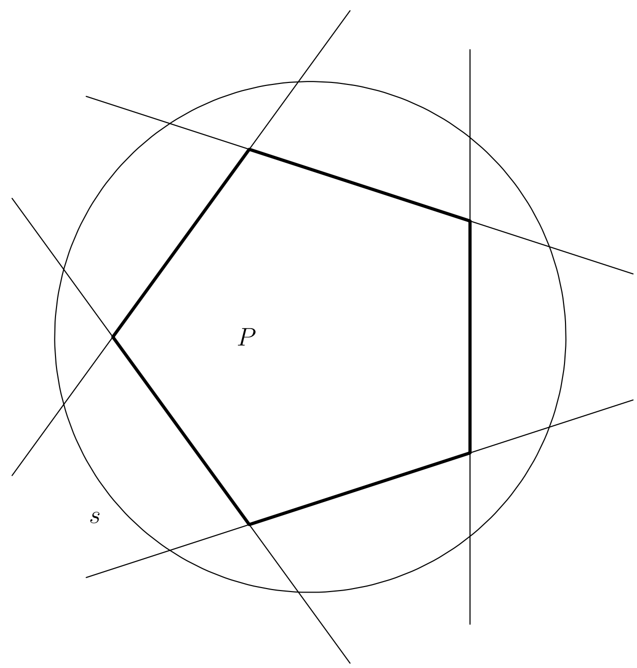
Избираме един подходящ изпъкнал $(n+1)$-мерен N-стенен политоп P, съдържащ се в отвореното кълбо на s. За граници h_i на полупространствата $g(D_i)$, $1 \leq i \leq N$, избираме хиперравнините, в които лежат стените на P; с това еднозначно определяме и първообразите D_i. Набора $\mathcal{R}$ избираме да се състои от разположенията на всички райони, породени от така конструираната конфигурация $g(\mathcal{D})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, които имат обща точка с s, заедно с разположението на района, съдържащ вътрешността на P.

Ако сме избрали P по такъв начин, че конфигурацията $\mathcal{D}$ да е оптимална, то наборът $\mathcal{R}$ ще бъде нереализируем.

По-нататък, при премахването на области от конфигурацията $\mathcal{D}$, и на техните образи под g от конфигурацията $g(\mathcal{D})$, районът, съдържащ вътрешността на P, ще расте. Ако сме избрали P достатъчно „близък“ до s, то при премахването на кои да са l такива области, където l е малко в сравнение с N, този район ще получава „излаз“ на s. Оттук следва, че при премахването на кои да са l позиции от $\mathcal{R}$ ще се получава набор, реализиран от конфигурацията, получена при премахването на същите l позиции от $\mathcal{D}$.

Реализацията на този план е особено проста за $n = 1$. (Фиг. 2.1.) В качеството на P избираме един правилен N-ъгълник $A_1A_2 \dots A_N$, концентричен с s и такъв, че точките A_i лежат в кръга на s, а пресечните точки $A_iA_{i+1} \cap A_{i+2}A_{i+3}$ – извън него, за $1 \leq i \leq N$. (Тук $A_{N+1} \equiv A_1$, $A_{N+2} \equiv A_2$, и т.н.) При премахването на коя да е от страните на P, неговата вътрешност се слива с район, който има обща точка с s.

По този начин се получават същите набори като тези, които конструирахме по друг път в параграф 2.1; вътрешността на P отговаря точно на засенчения връх v от представената там конструкция.



Фиг. 2.1

Да пристъпим сега към реализацията на горния план за $n = 2$. Оттук нататък, нека $\mathcal{F}$ е фамилията на отворените кръгове в $\mathbb{R}^2$.

Първо ще докажем двумерните аналози на лема 2.1 и теорема 2.1.

Лема 2.2. *Всеки реализируем набор $\mathcal{R}$ над $\mathcal{F}$ се реализира от конфигурация $\mathcal{D}$ и точки, които не са гранични за кръговете, съставящи $\mathcal{D}$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{R}$ е реализируем набор и нека конфигурацията $\mathcal{D} = D_1$, D_2, ..., D_k и точките P_1, P_2, ..., P_m реализират $\mathcal{R}$. За всеки кръг D_i в $\mathcal{D}$ с център O_i и радиус r_i, нека $l_i < r_i$ е разстоянието от O_i до най-далечната измежду точките P_1, P_2, ..., P_m, която се съдържа в D_i. (Ако такава точка няма, то полагаме $u_i = \frac{1}{2}r_i$.)

Нека $\mathcal{D}' = D'_1, D'_2, ..., D'_k$ е произволна конфигурация, елементът D'_i на която има център O_i и радиус $l_i < r'_i < r_i$ за $1 \leq i \leq k$. Тогава точките $P_1, P_2, ..., P_m$ няма да бъдат гранични за елементите на $\mathcal{D}'$ и разположенията им спрямо $\mathcal{D}'$ ще съвпадат с разположенията им спрямо $\mathcal{D}$. □

Теорема 2.7. *Нека $k_1, k_2, ..., k_N$ са окръжности в $\mathbb{R}^2$. Тогава множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_i k_i$ се състои от не повече от $N^2 - N + 2$ свързани компоненти. При това, този максимум се достига точно когато всеки две измежду окръжностите $k_1, k_2, ..., k_N$ имат точно две общи точки.*

Доказателство. Това е добре известен факт от комбинаторната геометрия. Едно просто доказателство може да се намери в [13], задача 44. □

Теорема 2.8. *Нека $\mathcal{R}$ е реализируем набор над $\mathcal{F}$ с размерност N. Тогава $\mathcal{R}$ съдържа не повече от $N^2 - N + 2$ елемента.*

Доказателство. Нека конфигурацията $\mathcal{D} = D_1, D_2, ..., D_N$ и точките $P_1, P_2, ..., P_m$, които не са гранични за елементите на $\mathcal{D}$, реализират $\mathcal{R}$.

Нека L е множеството на граничните точки на кръговете, съставящи $\mathcal{D}$. Да разгледаме множеството $\mathbb{R} \setminus L$. Съгласно теорема 2.7, това множество се състои от не повече от $N^2 - N + 2$ свързани компоненти. Но всеки две измежду точките $P_1, P_2, ..., P_m$, които попадат в една и съща измежду тези свързани компоненти, реализират едно и също разположение. □

Следващото твърдение ще ни послужи в доказателството на теорема 2.10.

Теорема 2.9. *Нека $l_1, l_2, ..., l_N$ са прави в $\mathbb{R}^2$. Тогава множеството $U = \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_i l_i$*

(i) се състои от не повече от $\frac{1}{2}N^2 + \frac{1}{2}N + 1$ свързани компоненти, като този максимум се достига точно когато правите $l_1, l_2, ..., l_N$ се намират в общо положение, т.е., когато всеки две измежду тях имат точно една обща точка и никои три не се пресичат в една точка; и

(ii) съдържа не повече от $2N$ неограничени свързани компоненти, като този максимум се достига за прави $l_1, l_2, ..., l_N$ в общо положение.

Доказателство. Първата част на твърдението е добре известен факт от комбинаторната геометрия. Едно просто доказателство може да се намери в [13], задача 44.

За втората част на твърдението, нека K е отворен кръг, който съдържа всички пресечни точки на двойките различни прави измежду $l_1, l_2, ..., l_N$. Тогава множеството $V = U \setminus K$ се състои от $2M$ неограничени свързани компоненти, където M е броят на различните прави измежду $l_1, l_2, ..., l_N$.

За всяка неограничена свързана компонента U_i на U, свързаните компоненти на $U_i \setminus K$ ще бъдат също така и свързани компоненти на V. Оттук следва оценката отгоре.

От друга страна, когато правите l_1, l_2, ..., l_N са в общо положение, свързаните компоненти на V ще бъдат точно $2N$ на брой и всеки две от тях ще бъдат подмножества на различни свързани компоненти на U. (Тъй като ще има права измежду l_1, l_2, ..., l_N, която ги разделя.) $\square$

Теорема 2.10. *Нека $N \geq 5$ е нечетно естествено число. Тогава има стабилен некомпактен набор с размерност $N+1$ над $\mathcal{F}$.*

Доказателство. Доказателството на теоремата ще проведем съгласно плана, описан в началото на този параграф.

Нека δ е равнина, пресичаща s в окръжността c с ненулев радиус. Нека $A_1A_2\dots A_N$ е правилен N-ъгълник, лежащ в δ, концентричен с c, и такъв, че точките A_i лежат в кръга на c, а пресечните точки $A_iA_{i+1} \cap A_{i+2}A_{i+3}$ – извън него за $1 \leq i \leq N$.

Дотук просто сме повторили конструкцията за $n = 1$. Нека сега B е точка от вътрешността на кълбото на s и извън δ, такава, че правата през B и центъра O на s е перпендикулярна на δ. В качеството на P разглеждаме пирамидата $BA_1A_2\dots A_N$.

Да се убедим първо, че конфигурацията $\mathcal{D}$, отговаряща на P, е оптимална.

Преди да изложим строгото доказателство на този факт, ще представим някои интуитивни съображения, които го правят „правдоподобен“. Именно, от теорема 2.7 леко следва, че допълнението на s до обединението на образите $f(\partial D_i)$ на границите на елементите D_i на $\mathcal{D}$, $1 \leq i \leq N+1$, се състои от максималния възможен брой различни свързани компоненти. Но тогава конфигурацията $\mathcal{D}$ би била оптимална точно когато всеки две от тези компоненти имат различни разположения спрямо конфигурацията $g(\mathcal{D})$. (Тези разположения са добре дефинирани, защото всяка такава компонента е подмножество на район, породен от $g(\mathcal{D})$.) Последното, от своя страна, е еквивалентно на това всяка отсечка, свързваща две точки от различни свързани компоненти, да пресича поне една от равнините h_i, $1 \leq i \leq N+1$, в които лежат стените на P. А когато P е близък до s по начина, който нашата конструкция изисква, това е твърде правдоподобно предположение!

За да докажем, че $\mathcal{D}$ е оптимална конфигурация, достатъчно е да построим $(N+1)^2 - (N+1)+2 = N^2+N+2$ точки върху s, които имат две по две различни разположения относно конфигурацията $g(\mathcal{D})$.

Нека, за $1 \leq i \leq N$, l_i е правата A_iA_{i+1}, в която стената BA_iA_{i+1} на P пресича δ. Понеже N е нечетно, правите l_1, l_2, ..., l_N са в общо положение.

Нека полупространството измежду $g(D_1)$, $g(D_2)$, ..., $g(D_{N+1})$, ограничено от δ, е $g(D_{N+1})$. Нека още $\mathcal{L}$ е конфигурацията в равнината δ, съставена от полуравнините $g(D_i) \cap \delta$ за $1 \leq i \leq N$. Правите l_1, l_2, ..., l_N са гранични за елементите на $\mathcal{L}$.

Да разгледаме свързаните компоненти на множеството $\delta \setminus \bigcup_i l_i$. В близост до c, тези компоненти ще изглеждат както Фиг. 2.1. Само една от тях – вътрешността на

$A_1A_2\dots A_N$ – ще се съдържа изцяло в кръга на c. Съгласно теорема 2.9, можем да изберем по една точка P_1, P_2, ..., $P_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N}$ извън този кръг от всяка ограничена измежду останалите компоненти, и по една точка Q_1, Q_2, ..., Q_{2N} извън този кръг от всяка неограничена компонента. Най-накрая, да изберем и по една точка S_1, S_2, ..., S_{2N+1} от вътрешността на кръга на c от всяка от $2N+1$-те компоненти, които съдържат такава точка; при това, нека S_1 принадлежи на вътрешността на $A_1A_2\dots A_N$.

Нека ε_1, ε_2, ..., $\varepsilon_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N}$, ζ_1, ζ_2, ..., ζ_{2N}, η_1, η_2, ..., η_{2N+1} са разположенията съответно на точките P_1, P_2, ..., $P_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N}$, Q_1, Q_2, ..., Q_{2N}, S_1, S_2, ..., S_{2N+1} по отношение на конфигурацията $\mathcal{L}$.

Нека, без загуба на общност, B и I са в различни полупространства спрямо δ, така че разположението на B спрямо $g(D_{N+1})$ е $-$.

Нека отсечката BP_i пресича s в P'_i за $1 \le i \le \frac{1}{2}N^2 - \frac{3}{2}N$ и отсечката BQ_i пресича s в Q'_i за $1 \le i \le 2N$. Разположенията на точките P'_1, P'_2, ..., $P'_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N}$, Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{2N} спрямо $g(\mathcal{D})$ ще бъдат $(\varepsilon_1,-)$, $(\varepsilon_2,-)$, ..., $(\varepsilon_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N},-)$, $(\zeta_1,-)$, $(\zeta_2,-)$, ..., $(\zeta_{2N},-)$, и следователно ще бъдат две по две различни.

Нека лъчът P_iB след B пресича s в P''_i за $1 \le i \le \frac{1}{2}N^2 - \frac{3}{2}N$. Разположението на P''_i спрямо $g(\mathcal{D})$ ще бъде $(\overline{\varepsilon_i},-)$, понеже отсечката $P_iP''_i$ пресича границата на всяко от полупространствата $g(D_j)$ за $1 \le j \le N$ в B. Ясно е, че това разположение е различно от разположението на P''_j за $j \ne i$.

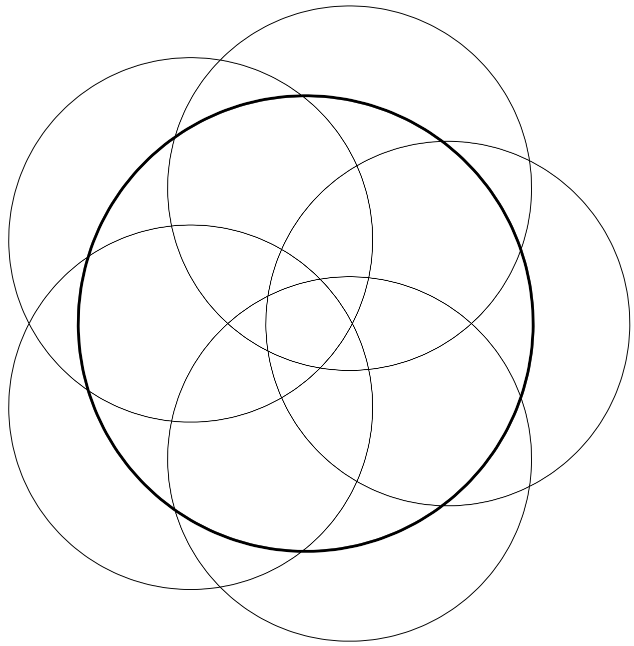
Да допуснем, че разположението на P''_i съвпада с разположението на някоя от точките P'_1, P'_2, ..., $P'_{\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N}$, Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{2N}, например P'_j. (Случаят, в който разположението на P''_i съвпада с това на някоя от точките Q'_1, Q'_2, ..., Q'_{2N}, се третира аналогично.) Тогава отсечката P_iP_j ще пресича всяка от правите l_1, l_2, ..., l_N. Следователно, лъчът P_jP_i след P_i няма да пресича нито една от тези прави и свързаната компонента, съдържаща P_i, ще бъде неограничена: противоречие.

По същия начин се установява и че ако лъчът S_1B след B пресича s в S''_1, то разположението $(\overline{\eta_1},-)$ на S''_1 относно $g(\mathcal{D})$ е различно от всяко от построените досега разположения.

Най-накрая, нека освен това лъчите BS_1, BS_2, ..., BS_{2N+1} след B пресичат s в точките S'_1, S'_2, ..., S'_{2N+1}, съответно. Разположенията на тези точки по отношение на $g(\mathcal{D})$ ще бъдат $(\eta_1,+)$, $(\eta_2,+)$, ..., $(\eta_{2N+1},+)$, и следователно ще бъдат различни помежду си и от разположенията на вече построените от нас точки.

С това реализирахме общо $(\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N)+2N+(\frac{1}{2}N^2-\frac{3}{2}N)+1+(2N+1) = N^2+N+2$ разположения, както се искаше.

Остава да се уверим, че при премахването на произволна стена от P вътрешността на P се слива с район, имащ обща точка с s. За основата δ на P това е очевидно, и за всяка от останалите стени на P то следва от аналогичния едноизмерен факт: в равнината δ, при премахването на коя да е от страните на $A_1A_2\dots A_N$, неговата вътрешност се слива с район, имащ обща точка с окръжността c. $\square$



Фиг. 2.2

Да разположим P по такъв начин, че точката I да лежи на правата BO от другата страна на δ спрямо B. Тогава конфигурацията $\mathcal{D}$ ще изглежда както Фиг. 2.2. Стабилният некомпактен набор $\mathcal{R}$ с размерност $N+1$, съответен на тази конфигурация, ще се състои от всички реализирани от нея разположения заедно с разположението $(-,-,\ldots,-,+)$, в което последната координата съответства на получерната окръжност.

Следствие 2.2. *Когато фамилията $\mathcal{F}$ се състои от отворените кръгове в $\mathbb{R}^2$, нито в задачата за радарчетата, нито в задачата за областите е възможна крайна аксиоматизация.*

Още веднъж, построеният от нас стабилен набор се оказва и удобен за едно естествено условие.

Теорема 2.11. *Нека* Cent *е условието оченцето на едно радарче да бъде център на отворения кръг, който е негова област на видимост. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{Cent}}$ не притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на теорема 2.4. □

Директното обобщение на този подход за случая $n=3$ (т.е., за фамилията на отворените кълба в $\mathbb{R}^3$) не води до успех: ако в качеството на P вземем четиримерна пирамида с основа – тримерната пирамида, която построихме в доказателството на теорема 2.10, то съответната конфигурация $\mathcal{D}$ няма да се получи оптимална.

2.3 Допълнителни бележки

Съществуват и други естествени обобщения на областите-интервали от параграф 2.1 в по-голям брой измерения.

Нека $n \geq 2$ е естествено число и нека $\mathcal{F}$ е фамилията на крайните изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.12. *Всеки набор над $\mathcal{F}$ е реализируем.*

Доказателство. Добре известно е ([9]), че за всяко N съществува диаграма на Вен в $\mathbb{R}^2$, състояща се само от изпъкнали множества. Оттук следва, че пълният набор $\{+,-\}^N$ е реализируем за всяко N. $\square$

И така, над $\mathcal{F}$ не съществуват 0-некомпактни набори. Както в доказателството на втората част от теорема 1.2, оттук получаваме следното твърдение:

Следствие 2.3. *Когато фамилията $\mathcal{F}$ се състои от крайните изпъкнали множества в $\mathbb{R}^n$ с $n \geq 2$, както в задачата за радарчетата, така и в задачата за областите съответните универсални фрагменти се аксиоматизират от празното множество от аксиоми. С други думи, и в двете задачи универсалните фрагменти се състоят точно от всички универсални тавтологии.*

Интересно е да се отбележи, че докато универсалните фрагменти $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$ (и $\mathcal{U}_{\mathrm{reg}}$) са едни и същи за всички $n \geq 2$, съответните теории $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{rad}})$ (и $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$) са две по две различни. Това следва, например, от теоремата на Хели ([6]).

За много други естествени фамилии – като например тези на кутиите (пълноразмерните Декартови произведения на крайни отворени интервали) и на симплексите – за $n \geq 2$ ни е известно твърде малко: нямаме оценки нито отдолу, нито отгоре за тези N, за които съществуват N-некомпактни набори, и не разполагаме нито със затворена формула, нито с рекурентна връзка за броя на разположенията, реализирани от една оптимална конфигурация, дори в случая $n = 2$.

Слабо изследвани са също така и фамилиите от еднакви крайни области, като например фамилията на отворените интервали с дължина единица в $\mathbb{R}^1$ и, по-общо, фамилията на отворените кълба с диаметър единица в $\mathbb{R}^n$. Във всеки от случаите, неизследвана е също така и естествената задача за специалните радарчета над тези фамилии, чиито оченца са центрове на областите им на видимост.

3 Радарчета с безкрайни области на видимост

3.1 Полуправи в $\mathbb{R}^1$

Нека $\mathcal{F}$ е фамилията на отворените полуправи в $\mathbb{R}^1$.

Лема 3.1. *Нека $\mathcal{R}$ е набор над $\mathcal{F}$ с размерност k. Нека $1 \leq i \leq k$ и наборът $\mathcal{R}'$ се получава от $\mathcal{R}$, като във всеки елемент на $\mathcal{R}$ се промени i-тата позиция. Тогава $\mathcal{R}$ е реализируем точно когато $\mathcal{R}'$ е реализируем.*

Доказателство. Нека $\mathcal{R}$ е реализируем. Както и в доказателството на лема 2.1, има конфигурация $\mathcal{I} = l_1, l_2, \ldots, l_k$ и точки a_1, a_2, ..., a_m, които не са гранични за елементите на $\mathcal{I}$, които реализират $\mathcal{R}$. Нека l_i' е отворената полуправа със същото начало като l_i, която няма общи точки с l_i. Тогава конфигурацията $\mathcal{I}' = l_1, l_2, \ldots, l_i', \ldots, l_k$ и точките a_1, a_2, ..., a_m реализират $\mathcal{R}'$.

По същия начин се установява и че ако $\mathcal{R}'$ е реализируем, то и $\mathcal{R}$ е реализируем. $\square$

Дефиниция 3.1. Казваме, че редицата от разположения R_1, R_2, ..., R_m с размерност k е *неколеблива*, ако, за всяко $1 \leq i \leq k$, в редицата $R_1(i)$, $R_2(i)$, ..., $R_m(i)$ има най-много една смяна на знака.

Теорема 3.1. *Нека $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_m\}$ е набор над $\mathcal{F}$. Тогава $\mathcal{R}$ е реализируем точно когато елементите на $\mathcal{R}$ могат да бъдат подредени в неколеблива редица.*

Доказателство. ($\Rightarrow$) Нека конфигурацията $\mathcal{I} = l_1, l_2, \ldots, l_k$ и точките a_1, a_2, ..., a_m реализират набора $\mathcal{R}$. Нека π е тази пермутация на 1, 2, ..., m, за която $a_{\pi(1)} < a_{\pi(2)} < \ldots < a_{\pi(m)}$. Тогава редицата $R_{\pi(1)}$, $R_{\pi(2)}$, ..., $R_{\pi(m)}$ ще бъде неколеблива.

($\Leftarrow$) Нека R_1, R_2, ..., R_m е неколеблива редица, състояща се от елементите на $\mathcal{R}$. Нека още $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ са точки от $\mathbb{R}^1$.

Нека $1 \leq i \leq k$, където k е размерността на $\mathcal{R}$. Да разгледаме редицата $R_1(i)$, $R_2(i)$, ..., $R_m(i)$. Възможни са следните случаи:

(1) Всички елементи на редицата са равни. Съгласно лема 3.1, без загуба на общност можем да разгледаме само подслучая, в който всички елементи на редицата са равни на $+$. Нека тогава $o_i = a_1 - 1$ и l_i е отвореният лъч с начало o_i, който съдържа a_1.

(2) Смяната на знака се извършва между $R_s(i)$ и $R_{s+1}(i)$. Съгласно лема 3.1, без загуба на общност можем да разгледаме само случая, в който $R_s(i) = -$. Нека тогава $o_i = \frac{1}{2}(a_s + a_{s+1})$ и l_i е отвореният лъч с начало o_i, който не съдържа a_s.

Тогава конфигурацията $\mathcal{I} = l_1, l_2, \ldots, l_k$, състояща се от така определените полуправи, и точките a_1, a_2, ..., a_m реализират набора $\mathcal{R}$. □

Теорема 3.2. *Нека $\mathcal{R}$ е набор над $\mathcal{F}$, такъв че всеки три позиции от $\mathcal{R}$ дават реализируем набор. Тогава $\mathcal{R}$ също е реализируем.*

Доказателство. Ще докажем твърдението с индукция по размерността на $\mathcal{R}$.

Когато $\mathcal{R}$ има размерност 3, твърдението е очевидно.

Нека $\mathcal{R}$ има размерност $k+1$, $k \geq 3$, и $\mathcal{R}'$ е наборът, който се получава от $\mathcal{R}$ при премахване на позиция $k+1$.

Съгласно индукционното предположение, $\mathcal{R}'$ е реализируем. Съгласно теорема 3.1, има неколеблива редица $S' = R'_1$, R'_2, ..., R'_m, състояща се от елементите на $\mathcal{R}'$.

Ще покажем как по S' може да се построи неколеблива редица от елементите на $\mathcal{R}$. Съгласно теорема 3.1, оттук исканото следва.

За всеки елемент R'_i на S', поне едно от разположенията $(R'_i, -)$ и $(R'_i, +)$ принадлежи на $\mathcal{R}$. Ако само едно от тези разположения принадлежи на $\mathcal{R}$, то ще казваме, че елементът R'_i е *единичен*, а ако и двете разположения принадлежат на $\mathcal{R}$ – че е *двоен*.

Да допуснем, че S' съдържа поне два двойни елемента. Нека една от позициите, в които тези елементи се различават, е i. Тогава позициите i и $k+1$ от набора $\mathcal{R}$ дават набора $\{(-,-),\ (-,+),\ (+,-),\ (+,+)\}$. Този набор е нереализируем по теорема 3.1: противоречие.

И така, всички елементи на S', с изключение най-много на един, са единични.

Да допуснем, че S' съдържа три елемента R'_u, R'_v и R'_w, такива, че $u < v < w$, (R'_u, e_u), (R'_v, e_v) и (R'_w, e_w) принадлежат на $\mathcal{R}$, и $e_u \neq e_v$ и $e_v \neq e_w$. (Такива тройки от елементи ще наричаме *лоши*.) Съгласно лема 3.1, без загуба на общност можем да смятаме, че $e_u = +$, $e_v = -$ и $e_w = +$.

Нека една от позициите, в които R'_u и R'_v се различават, е i. Съгласно лема 3.1, без загуба на общност можем да смятаме, че $R'_u(i) = -$ и $R'_v(i) = +$. Тогава, тъй като редицата S' е неколеблива, имаме още и $R'_w(i) = +$.

Нека една от позициите, в които R'_v и R'_w се различават, е j. Тогава $j \neq i$. Както и в предния абзац, без загуба на общност можем да смятаме, че $R'_u(j) = +$, $R'_v(j) = +$ и $R'_w(j) = -$.

Следователно, позициите i, j и $k+1$ от $\mathcal{R}$ дават набор, който разширява множеството $\{(+,+,-),\ (+,-,+),\ (-,+,+)\}$. Във всяка редица, съставена от елементите на един такъв набор, един от елементите на това множество ще се намира между другите два. Оттук и от теорема 3.1 следва, че всеки набор от този вид е нереализируем: противоречие.

И така, S' не съдържа лоши тройки.

Да допуснем, че S' не съдържа двоен елемент. Да разгледаме редицата (R'_1, e_1), (R'_2, e_2), ..., (R'_m, e_m), в която разположението (R'_i, e_i) е елемент на $\mathcal{R}$ за $1 \leq i \leq m$. Тази редица се състои точно от елементите на $\mathcal{R}$ и, понеже S' не съдържа лоши тройки, е неколеблива, с което исканото е доказано.

Нека сега R'_s е единствения двоен елемент на редицата S' и, за всяко $1 \leq i \leq m$, $i \neq s$, (R'_i, e_i) е елемент на $\mathcal{R}$.

Ако измежду знаците e_1, e_2, ..., e_{s-1} има два различни, то съответните им елементи на S', заедно с R'_s, ще образуват лоша тройка: противоречие.

По същия начин се вижда и че измежду знаците e_{s+1}, e_{s+2}, ..., e_m не може да има два различни, както и че знаците e_{s-1} и e_{s+1} не могат да съвпадат (в случая, когато и двата са добре дефинирани, т.е., когато $1 < s < m$). Съгласно лема 3.1, без загуба на общност можем да смятаме, че $e_1 = e_2 = \ldots = e_{s-1} = -$ и $e_{s+1} = e_{s+2} = \ldots = e_m = +$.

Но тогава редицата

$$(R'_1, -), (R'_2, -), \ldots, (R'_{s-1}, -), (R'_s, -), (R'_s, +), (R'_{s+1}, +), \ldots, (R'_m, +)$$

е неколеблива редица, съставена от елементите на $\mathcal{R}$, с което доказателството е завършено. $\square$

Следствие 3.1. *Когато фамилията $\mathcal{F}$ се състои от отворените полуправи в $\mathbb{R}^1$, както в задачата за радарчетата, така и в задачата за областите е възможна крайна аксиоматизация.*

Конструкцията от доказателството на теорема 1.2 ни позволява да напишем една такава аксиоматизация в явен вид. Оттук нататък, въпросът за намирането на аксиоматизация с малка обща дължина на аксиомите или с малка горна граница на броя на променливите, участващи в аксиома, подлежи на пълно изчерпване.

Теорема 3.3. *Нека* In *е условието оченцето на едно радарче да принадлежи на неговата област на видимост. Тогава $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$ притежава крайна аксиоматизация.*

Доказателство. Нека A е крайна аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}$. Ще покажем, че

$$A' = A \cup \{\forall x (x \rhd x)\}$$

е аксиоматизация на $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$.

Понеже формулата $\forall x (x \rhd x)$ е вярна в $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$, то всички затворени универсални логически следствия на A' принадлежат на $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$.

Нека формулата $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \psi$, където ψ е безкванторна, принадлежи на $\mathcal{U}_{\mathrm{rad}}^{\mathrm{In}}$. Тогава формулата

$$\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k (x_1 \rhd x_1 \,\&\, x_2 \rhd x_2 \,\&\ldots\&\, x_k \rhd x_k \Rightarrow \psi)$$

принадлежи на $\mathcal{U}_{\text{rad}}$. Оттук следва, че ψ' е логическо следствие на A.

Но тогава $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \psi$ ще бъде логическо следствие на $A \cup \{\forall x(x \rhd x)\}$, с което доказателството е завършено. □

Дефиниция 3.2. Специалните радарчета над $\mathcal{F}$, отговарящи на условието оченцето да бъде гранична точка за отворената полуправа, която е тяхна област на видимост, наричаме *жители на Линоландия.*

Именно тези радарчета (дефинирани по различен, но еквивалентен начин) са разгледани в статията [1]. Там е дадена и следната аксиоматизация на съответния универсален фрагмент, състояща се от шест аксиоми, всяка от които съдържа не повече от четири променливи:

(i) $\forall x \neg\, x \rhd x$

(ii) $\forall x \forall y \forall z((x \rhd y \;\&\; x \rhd z \;\&\; (z \rhd x \Leftrightarrow z \rhd y)) \Rightarrow (\neg\, y \rhd x \Leftrightarrow y \rhd z))$

(iii) $\forall x \forall y \forall z((\neg\, x \rhd y \;\&\; \neg\, x \rhd z \;\&\; (z \rhd x \Leftrightarrow \neg\, z \rhd y)) \Rightarrow (y \rhd x \Leftrightarrow y \rhd z))$

(iv) $\forall x \forall y \forall z((\neg\, x \rhd y \;\&\; x \rhd z) \Rightarrow (y \rhd x \Leftrightarrow y \rhd z))$

(v) $\forall x \forall y \forall z \forall t((x \rhd y \;\&\; x \rhd z \;\&\; x \rhd t \;\&\; (y \rhd x \Leftrightarrow \neg\, y \rhd z) \;\&\; (z \rhd x \Leftrightarrow \neg\, z \rhd t)) \Rightarrow$
$(y \rhd x \Leftrightarrow \neg\, y \rhd t))$

(vi) $\forall x \forall y \forall z \forall t((\neg\, x \rhd y \;\&\; \neg\, x \rhd z \;\&\; \neg\, x \rhd t \;\&\; (y \rhd x \Leftrightarrow y \rhd z) \;\&\; (z \rhd x \Leftrightarrow z \rhd t)) \Rightarrow$
$(y \rhd x \Leftrightarrow y \rhd t))$

По този начин, вярна е следната теорема:

Теорема 3.4. *Нека* Lim *е условието оченцето на едно радарче да бъде гранична точка за неговата област на видимост. Тогава* $\mathcal{U}_{\text{rad}}^{\text{Lim}}$ *притежава крайна аксиоматизация.*

3.2 Полуравнини в $\mathbb{R}^2$

Основните резултати, получени в предния параграф, могат да бъдат изказани по следния начин на езика на теорията на графите.

Дефиниция 3.3. Казваме, че един подграф G на k-мерния хиперкуб е *лъкатушна пътека*, ако G е пътека, която съдържа точно по едно ребро от всяко направление.

Теорема 3.5. *Един подграф* G *на* k*-мерния хиперкуб е реализируем (над фамилията на отворените полуправи в* $\mathbb{R}^1$*) точно тогава, когато се покрива от лъкатушна пътека.*

Това е еквивалентна формулировка на теорема 3.1.

Теорема 3.6. *Нека G е подграф на k-мерния хиперкуб и нека при проектирането на G по произволни $k-3$ направления се получава подграф на C_3, който се покрива от лъкатушна пътека. Тогава G също се покрива от лъкатушна пътека.*

В това твърдение, изказано в еквивалентен вид, се убедихме в хода на доказателството на теорема 3.2.

Нека сега $\mathcal{F}$ е фамилията на отворените полуравнини в $\mathbb{R}^2$. Ще получим някои аналогични резултати над $\mathcal{F}$.

Лема 3.2. *Всеки реализируем набор $\mathcal{R}$ над $\mathcal{F}$ се реализира от конфигурация $\mathcal{I}$, граничните прави на полуравнините в която се намират в общо положение, и точки, които не лежат на тези гранични прави.*

Доказателство. Аналогично на доказателствата на леми 2.1 и 2.2. □

Лема 3.3. *Нека $\mathcal{R}$ е набор над $\mathcal{F}$ с размерност k. Нека $1 \leq i \leq k$ и наборът $\mathcal{R}'$ се получава от $\mathcal{R}$, като във всеки елемент на $\mathcal{R}$ се промени i-тата позиция. Тогава $\mathcal{R}$ е реализируем точно когато $\mathcal{R}'$ е реализируем.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на лема 3.1. □

Следващите дефиниции следват изложението в [3].

Дефиниция 3.4. Нека S_1, S_2, ..., S_k са множества от точки в $\mathbb{R}^n$. *Сума по Минковски* на фамилията от множества $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ наричаме множеството от точки

$$S = \{P \mid \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k} \text{ за някои } P_1 \in S_1, P_2 \in S_2, \ldots, P_k \in S_k\},$$

където O е произволна точка от $\mathbb{R}^n$. (По този начин, сумата на Минковски на една фамилия от множества е определена с точност до транслация.)

Дефиниция 3.5. Двуизмерен *зонотоп* наричаме сумата по Минковски на фамилия от отворени отсечки в равнината, измежду които няма две успоредни.

По този начин, двуизмерните зонотопи са точно централно-симетричните изпъкнали многоъгълници. Тъй като в този параграф няма да разглеждаме зонотопи в повече от две измерения, по-нататък ще изпускаме прилагателното „двуизмерен“.

Дефиниция 3.6. *Зонотопично покритие* наричаме покритието на един зонотоп, породен от фамилията $\mathcal{S}$, с пълноразмерни зонотопи, породени от фамилии, които са подмножества на $\mathcal{S}$.

В две измерения, един зонотоп е пълноразмерен – тоест, не се съдържа в подпространство на $\mathbb{R}^2$ с по-малка размерност – точно когато пораждащата го фамилия съдържа поне два елемента.

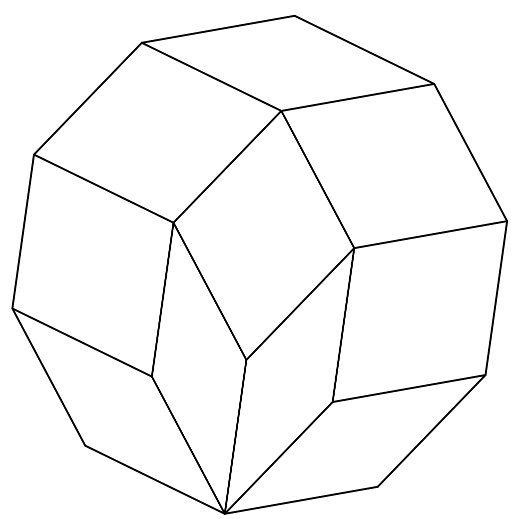
Дефиниция 3.7. *Просто зонотопично покритие* наричаме такова зонотопично покритие на един зонотоп, породен от фамилията $\mathcal{S}$, в което всеки от покриващите зонотопи е породен от подфамилия на $\mathcal{S}$, съдържаща точно два елемента.

В две измерения, простите зонотопични покрития са точно покритията на централно-симетричните изпъкнали многоъгълници с успоредници, които си пасват както един с друг, така и с покрития многоъгълник по цели страни. Един пример е представен на Фиг. 3.1.

Дефиниция 3.8. Казваме, че един граф G е *прост зонотопичен граф*, ако има просто зонотопично покритие, такова, че графът с

- върхове – върховете на многоъгълниците в това покритие, и
- ребра – двойките върхове, които принадлежат на една и съща страна в някой от многоъгълниците в покритието,

е изоморфен на G.



Фиг. 3.1

По този начин, Фиг. 3.1 може да се разглежда и като прост зонотопичен граф.

Зонотопите и зонотопичните покрития възникват по естествен начин в комбинаторната геометрия. Триизмерните зонотопи – наричани още *зоноедри* – са изучавани първоначално в кристалографията като области на Вороной за определени решетки. По-късно е открита и връзката на зонотопите с подрежданията на хиперравнини, един частен случай на която ще изграе важна роля в нашите разсъждения по-нататък.

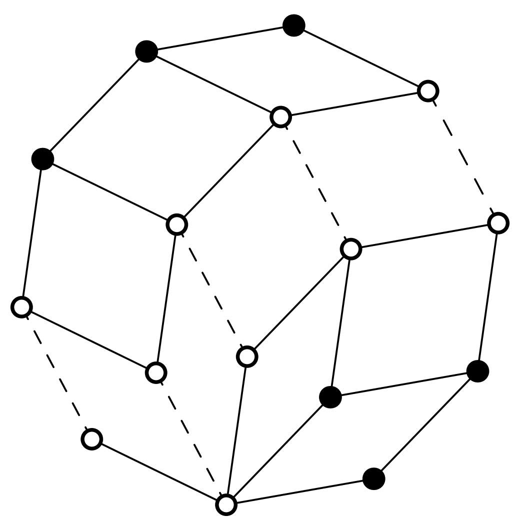
Извън този контекст, за простите зонотопични хиперкубови подграфи е възможна и чисто комбинаторна индуктивна характеризация.

Теорема 3.7. *(i) Единственият прост зонотопичен подграф на едномерния хиперкуб е самият едномерен хиперкуб.*

(ii) Нека G е прост зонотопичен подграф на k-мерния хиперкуб, породен от множеството от върхове V. Нека H е лъкатушна пътека, която се покрива от G, и нека U е множеството от върховете на H. Подграфът на C_k, породен от множеството от върхове $V \setminus U$, се състои от две едносвързани компоненти (всяка от които може да бъде и празна). Нека V_1 и V_2 са множествата от върховете на тези компоненти. Тогава подграфът на C_{k+1}, породен от множеството от върхове

$$\{(v,-) \mid v \in V_1\} \cup \{(v,-) \mid v \in U\} \cup \{(v,+) \mid v \in U\} \cup \{(v,+) \mid v \in V_2\}$$

е прост зонотопичен граф. При това, всеки прост зонотопичен подграф на C_{k+1} се получава по този начин от някой прост зонотопичен подграф на C_k.



Фиг. 3.2

Така например, на Фиг. 3.2, $k = 4$, $k+1 = 5$, върховете, получени от U, са обозначени с бели кръгчета и върховете, получени от V_1 и V_2 – с черни. При отъждествяването на всички двойки върхове, свързани с пунктирно ребро (или, което е същото – при проекция по съответното направление), се получава изоморфно копие на изходния граф G, в което върховете, обозначени с бели кръгчета, отговарят на върховете на лъкатушната пътека H.

Интуитивно, индуктивната стъпка в тази дефиниция отговаря на добавянето на една нова отсечка към фамилията, пораждаща съответното на графа зонотопично покритие.

Директно от индуктивната дефиниция могат да бъдат изведени редица чисто комбинаторни свойства.

Теорема 3.8. *Нека G е прост зонотопичен подграф на k-мерния хиперкуб. Тогава G има точно $\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+1$ върха и k^2 ребра – по k от всяко направление. При това, за всеки две различни направления i и j, G съдържа точно един 4-цикъл, ребрата на който са алтернативно от направления i и j.*

Теорема 3.9. *Нека при проектирането на простия зонотопичен хиперкубов подграф G по направлението d се получава хиперкубовият подграф G'. Тогава G' също е прост зонотопичен граф. При това, подграфът на G', породен от двойните върхове на G', е лъкатушна пътека.*

Дефиниция 3.9. *Подреждане на псевдоправи* наричаме крайно множество от гладки несамопресичащи се криви в равнината, такова, че

(i) за всяка една от тези криви c, множеството $\mathbb{R}^2 \setminus c$ се състои от две неограничени свързани компоненти, и

(ii) всеки две от тези криви имат най-много една обща точка и никои две не се допират.

Ако освен това е вярно, че всеки две от кривите имат точно една обща точка и никои три не се пресичат в една точка, то подреждането наричаме *просто*.

Така например, произволно крайно множество от прави в общо положение е също така и просто подреждане на псевдоправи. Интуитивно, локалният комбинаторно-геометричен характер на подрежданията на псевдоправи е същият като този на множествата от прави.

Дефиниция 3.10. Нека $\mathcal{C}$ е подреждане на псевдоправи. Тогава графът G

- с върхове – свързаните компоненти на множеството $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup \mathcal{C}$, и
- ребра – двойките такива компоненти, които имат обща граница,

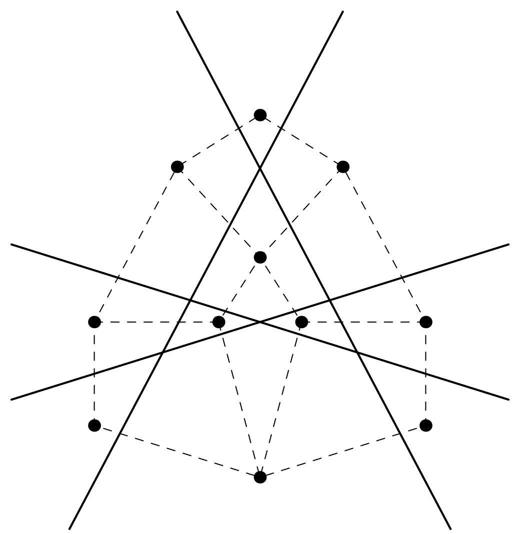
наричаме *дуален граф* на подреждането $\mathcal{C}$.

Един пример за просто подреждане на псевдоправи и съответния му дуален граф е показан на Фиг. 3.3.

Теорема 6.10 в [3] утвърждава следното:

Теорема 3.10. *Един граф G е прост зонотопичен граф точно тогава, когато има просто подреждане на псевдоправи $\mathcal{C}$, такова, че G е дуален граф на $\mathcal{C}$.*

Понеже дуалният граф на едно подреждане на псевдоправи напълно определя неговите комбинаторни свойства, то в случая, когато G е прост зонотопичен граф, подреждането от теоремата е единствено с точност до изоморфизъм.



Фиг. 3.3

Вече сме готови да изясним връзката между простите зонотопични графи и разглеждания от нас кръг от проблеми.

Теорема 3.11. *Нека G е реализируем подграф на k-мерния хиперкуб. Тогава G се покрива от прост зонотопичен граф.*

Доказателство. Съгласно лема 3.2, наборът $\mathcal{R}$, състоящ се от върховете на G, се реализира от конфигурация $\mathcal{I}$, граничните прави на полуравнините в която се намират в общо положение, и точки, които не лежат на тези гранични прави.

Да разгледаме набора $\mathcal{R}'$, състоящ се от всички разположения, реализирани от $\mathcal{I}$. Понеже $\mathcal{R}'$ разширява $\mathcal{R}$, подграфът G' на C_k, породен от $\mathcal{R}'$, покрива G. В същото време, G' е изоморфен на дуалния граф на простото подреждане на псевдоправи, съставено от граничните прави на полуравнините в $\mathcal{I}$ и следователно е прост зонотопичен граф. □

Да пристъпим сега към формулировката и доказателството на двумерния аналог на теорема 3.6. Ще докажем първо няколко помощни твърдения.

Дефиниция 3.11. Нека w_1 и w_2 са два произволни върха на C_k. Казваме, че пътеката T в C_k е *криволичеща пътека от* w_1 *до* w_2, ако всеки две ребра в T имат различни направления.

Теорема 3.12. *Нека w_1 и w_2 са два произволни върха на C_k и нека $D(w_1, w_2)$ е множеството на позициите, в които w_1 и w_2 се различават. Тогава всяка криволичеща пътека от w_1 до w_2 в C_k съдържа точно по едно ребро от всяко от направленията в $D(w_1, w_2)$ и не съдържа други ребра.*

Доказателство. Когато се движим по една произволна пътека от w_1 до w_2 в C_k, всяко изминато ребро в направление d отговаря на промяна в позицията d във върха, в който се намираме. Оттук исканото следва. □

Теорема 3.13. *Нека w_1 и w_2 са два произволни върха на един прост зонотопичен подграф G на k-мерния хиперкуб. Тогава има криволичеща пътека T от w_1 до w_2, която се покрива от G.*

Доказателство. С индукция по l ще докажем, че твърдението е вярно за всеки два върха, които се различават в не повече от l позиции.

Нека $D(w_1, w_2)$ е множеството на позициите, в които w_1 и w_2 се различават. Когато $D(w_1, w_2)$ е празно или съдържа точно един елемент, твърдението е вярно.

Нека сега, без загуба на общност, w_1 и w_2 се различават в поне две позиции, една от които е позицията k, така че $w_1 = (w'_1, -)$ и $w_2 = (w'_2, +)$.

Нека G' е проекцията на G по направление k. Съгласно индукционното предположение, има криволичеща пътека T' от w'_1 до w'_2 в C_{k-1}, която се покрива от G'. Нека u_1, u_2, ..., u_m са двойните върхове на G', които лежат на тази пътека.

Да разгледаме редицата от върхове на G

$$w_1, (u_1, -), (u_2, -), \ldots, (u_m, -), (u_m, +), w_2.$$

Всеки два последователни върха в тази редица се различават в строго по-малко на брой позиции, отколко w_1 и w_2, и, следователно, съгласно индукционното предположение могат да бъдат свързани с криволичеща пътека, която се покрива от G. Конкатенацията на тези пътеки ще бъде криволичеща пътека, която свързва w_1 и w_2 и се покрива от G. □

Теорема 3.14. *Нека H е пътека, която се покрива от простия зонотопичен подграф G на C_k и която не съдържа две ребра от едно и също направление. Тогава H се покрива от лъкатушна пътека T, която се покрива от G.*

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че ако има направление d, такова, че H не съдържа ребро от направление d, то тогава H може да се продължи, така че все още да се състои от ребра с две по две различни направления и да се покрива от G. Ще докажем това твърдение с индукция по k.

За $k = 1$ твърдението е вярно.

Нека $k > 1$ и нека, без загуба на общност, $H = (w'_1, +)(w'_2, +) \dots (w'_l, +)$ не съдържа ребро от направление k. (В случая, когато H не съдържа ребра и се състои от точно един връх, можем да продължим H с произволно ребро, инцидентно с този връх.)

Съгласно индукционното предположение, пътеката $H' = w'_1 w'_2 \dots w'_l$ в C_{k-1} може да се продължи с поне едно ребро, така че все още да се състои от ребра с две по две различни направления и да се покрива от G'. Нека, без загуба на общност, $u'w'_1$ е ребро в G', чието направление не се среща измежду направленията на ребрата на H'.

Поне едно от разположенията $(u', +)$ и $(u', -)$ е връх в G. Ако $(u', +)$ е връх в G, то H може да се продължи с реброто $(u', +)(w'_1, +)$. Ако $(u', -)$ е връх в G, то съгласно теорема 3.13 има криволичеща пътека T в C_k, която свързва $(u', -)$ и $(w'_1, +)$, и тогава H може да се продължи, като се конкатенира с T. □

Теорема 3.15. *Нека G е прост зонотопичен подграф на C_k, H е лъкатушна пътека в C_k и V е множеството от тези върхове на G, през които минава H. Тогава има лъкатушна пътека T в C_k, която минава през всички върхове във V и се покрива от G.*

Доказателство. Това е директно следствие на теореми 3.13 и 3.14. □

Теорема 3.16. *Нека G е подграф на C_k, такъв, че при проектирането на G по произволни $k - 4$ направления се получава подграф на C_4, който се покрива от прост зонотопичен граф. Тогава G също се покрива от прост зонотопичен граф.*

Доказателство. Ще докажем теоремата с индукция по k.

В случая $k = 4$ твърдението е вярно.

Нека $k > 4$, G' е подграфа на C_{k-1}, който се получава от G при проектиране по направлението k, и V' е множеството на двойните върхове на G'.

Нека D е произволно множество от $(k-1) - 3 = k - 4$ направления в C_{k-1}. Нека G'' е подграфа на C_4, който се получава от G при проектиране по направленията в D, G''' е подграфа на C_3, който се получава от G'' при проектиране по направлението k (тоест – по направлението в C_3, в което сме изобразили k-тите координати на елементите на C_k), и V''' е множеството от двойните върхове на G'''. Тогава проекцията на V' по направленията D е подмножество на V'''.

От друга страна, съгласно теорема 3.9, V''' се покрива от лъкатушна пътека в C_3. Оттук следва, че и проекцията на V' по направленията D се покрива от лъкатушна пътека в C_3.

Понеже множеството отнаправления D беше избрано произволно, съгласно теорема 3.6 V' се покрива от лъкатушна пътека в C_{k-1}.

Съгласно индукционното предположение, има прост зонотопичен подграф T' на C_{k-1}, който покрива G'. Съгласно теорема 3.15 и твърдението от предния абзац, има лъкатушна пътека в C_{k-1}, която минава през всички върхове от V' и се покрива от G'.

Съгласно теорема 3.7, в такъв случай има прост зонотопичен подграф T на C_k, който покрива G. □

Теорема 3.11 ни дава едно необходимо условие за реализируемост над $\mathcal{F}$. Теорема 3.16 ни казва, че ако това условие се окаже и достатъчно, то над $\mathcal{F}$ няма да има 4-некомпактни набори – и, следователно, в съответните задачи за областите и за радарчетата ще съществуват крайни аксиоматизации.

Дали, обаче, това наистина е така? С други думи – дали всеки прост зонотопичен хиперкубов подграф е реализируем?

Дефиниция 3.12. Казваме, че едно подреждане на псевдоправи $\mathcal{C}$ *може да се изправи*, или е *изправимо*, ако съществува подреждане на псевдоправи $\mathcal{C}'$, което има същия дуален граф като $\mathcal{C}$ (или, което е същото, е изоморфно на $\mathcal{C}$), всички елементи на което са прави.

Теорема 3.17. *Един прост зонотопичен хиперкубов подграф е реализируем точно когато съответното му просто подреждане на псевдоправи може да се изправи.*

В 1956г., Г. Рингел доказва ([8]) следната теорема:

Теорема 3.18. *Има неизправими прости подреждания от псевдоправи.*

Примерът, построен от Рингел, съдържа девет псевдоправи. По-късно, Дж. Гудман и Р. Полак доказват ([5]), че всяко подреждане на не повече от осем псевдоправи може да се изправи, и Ю. Рихтер-Геберт доказва ([7]), че примерът на Рингел е единственото просто подреждане на девет псевдоправи, което не може да се изправи.

И така, предположението, че в задачите за областите и за радарчетата с области – отворените полупространства, е възможна крайна аксиоматизация и в две измерения, вече не изглежда толкова правдоподобно. Нещо повече – то е невярно!

В своята статия [12], П. Шор показва как по дадена съждителна формула $\varphi = \varphi_1 \ \& \ \varphi_2 \ \& \ \ldots \ \& \ \varphi_k$ в конюнктивна нормална форма, такава, че всяка от клаузите φ_i, $1 \leq i \leq k$, съдържа не повече от три променливи, може да се построи просто подреждане на псевдоправи $S(\varphi)$, което може да се изправи тогава и само тогава, когато тази формула е изпълнима.

Нека N и $M \geq 1$ са естествени числа и φ е формулата от горния вид

$$(x_1 \vee x_2) \ \& \ (\neg x_1 \vee \neg x_2) \ \& \ (x_2 \vee x_3) \ \& \ (\neg x_2 \vee \neg x_3) \ \& \ \ldots \ \& \ (x_{2M+1} \vee x_1) \ \& \ (\neg x_{2M+1} \vee \neg x_1).$$

Формулата φ е неизпълнима, но при изпускането на произволен конюнктивен член от нея се получава изпълнима формула.

Конструкцията на Шор е такава, че ако M се избере достатъчно голямо по отношение на N, то за произволно подмножество S' на $S(\varphi)$, което съдържа не повече от N елемента, има формула φ', получена от φ с изпускане на един конюнктивен член, и подмножество S'' на $S(\varphi)$, което разширява S' и се съпоставя от конструкцията на Шор на формулата φ'. (Стига при прилагането на конструкцията над φ' на всички места, на които имаме избор, да направим същите избори като тези, които сме направили за φ.)

Оттук следва, че – за достатъчно големи M – всеки N псевдоправи в $S(\varphi)$ ще образуват изправимо подреждане, докато подреждането $S(\varphi)$ ще бъде неизправимо.

Да разгледаме един хиперкубов подграф, изоморфен на дуалния граф на $S(\varphi)$. Всяко направление в съответния хиперкуб отговаря на една псевдоправа в $S(\varphi)$, като премахването на псевдоправи от подреждането отговаря точно на проектирането по направления в хиперкуба. По този начин, получаваме следната теорема:

Теорема 3.19. *Нека N е естествено число. Тогава има N-некомпактен набор над $\mathcal{F}$.*

Следствие 3.2. *Когато фамилията $\mathcal{F}$ се състои от отворените полуравнини в $\mathbb{R}^2$, нито в задачата за радарчетата, нито в задачата за областите е възможна крайна аксиоматизация.*

От горните разсъждения не става ясно дали построените по този начин набори са стабилни или удобни. По този начин, те не са ни от помощ в задачите за специалните радарчета над $\mathcal{F}$, отговарящи на условията In и Lim, дефинирани както по-горе. (Радарчета от втория от тези видове, дефинирани по различен, но еквивалентнен начин, се разглеждат в [11] и [2].)

3.3 Специални полуравнини в $\mathbb{R}^2$

Един от естествените въпроси, които възникнаха в хода на работата по проблемите, разгледани в предишния параграф, е въпроса за поведението на областите в $\mathbb{R}^2$ – отворени полуравнини, ограничени от прави със специални ъглови коефициенти.

Дефиниция 3.13. Нека D е подмножество на $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. С $\mathcal{S}(D)$ означаваме фамилията на отворените полуравнини в $\mathbb{R}^2$, ъгловите коефициенти на чиито гранични прави принадлежат на D.

Когато $p \leq 3$, всички множества D от ъглови коефициенти с точно p елемента водят до фамилии $\mathcal{S}(D)$, които са афинно еквивалентни. Понеже афинните преобразования запазват принадлежността, съответните структури на радарчетата и на областите имат едни и същи теории и тези теории имат едни и същи универсални фрагменти. Този факт оправдава отделянето на особено внимание на случаите, в които D има точно един, два или три елемента.

Както ще видим, трудността на задачата нараства рязко с броя на елементите.

Нека първо $\mathcal{F} = \mathcal{S}(\{\infty\})$. (Този избор на единствения елемент на D води до някои технически облекчения в следващото доказателство.)

Теорема 3.20. *Теориите* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{rad}})$ *и* $\mathrm{Th}(\mathcal{A}_{\mathrm{reg}})$ *съответно на структурите на радарчетата и на областите, определени над* $\mathcal{F}$*, съвпадат с теориите на същите структури, определени над фамилията на отворените полуправи в* $\mathbb{R}^1$*. Същото е вярно и за съответните универсални фрагменти.*

Доказателство. Нека, в рамките на настоящото доказателство, $\mathcal{F}'$ е фамилията на отворените полуправи в $\mathbb{R}^1$. Ще докажем твърдението за структурите на радарчетата $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F}')$, определени над двете фамилии. Доказателството за структурите на областите е аналогично.

Нека l е естественото влагане на $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^2$. (Тоест – правата през началото на координатната система с ъглов коефициент 0.) Да разгледаме двуместната релация $\sim$ между радарчета в $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})$, определена, както следва:

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{проекциите на } E_a \text{ и } E_b \text{ върху } l \text{ съвпадат и } S_a = S_b.$$

Тогава $\sim$ е точно релацията на неразличимост (по отношение на единствения предикатен символ в езика на структурата, $\triangleright$) в $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})$. Следователно, структурата, получена от $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})$ чрез факторизация по $\sim$, е елементарно еквивалентна с $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})$.

Остава да отбележим, че изображението h, което на всеки елемент $[a]_\sim$ на $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F})/\sim$ съпоставя радарчето в $\mathcal{A}_{\mathrm{rad}}(\mathcal{F}')$, чиято област на видимост е $S_a \cap l$ и чието оченце е проекцията на E_a върху l, е изоморфизъм между тези две структури. □

Ще въведем сега едно семейство от комбинаторни обекти, които имат тясна връзка с разглеждания проблем тогава, когато множеството D е крайно.

Дефиниция 3.14. Казваме, че подреждането на псевдоправи $\mathcal{C}$ *е от тип* p, ако

(i) псевдоправите в $\mathcal{C}$ могат да бъдат разпределени в p класа (някои от които могат да бъдат и празни) по такъв начин, че две псевдоправи от $\mathcal{C}$ да имат обща точка точно тогава, когато принадлежат на различни класове; и

(ii) никои три псевдоправи в $\mathcal{C}$ не се пресичат в една точка.

Интуитивно, едно подреждане на псевдоправи от тип p има локалния комбинаторно-геометричен характер на крайно множество от прави, измежду ъгловите коефициенти на които има не повече от p различни, и никои три от които не се пресичат в една точка. Всяко такова множество е също така и подреждане на псевдоправи от тип p.

Дефиниция 3.15. Казваме, че хиперкубовият подграф G е *зонотопичен граф от тип* p, или, накратко, просто *граф от тип* p, ако има подреждане на псевдоправи $\mathcal{C}$ от тип p, такова, че:

(i) G е изоморфен на дуалния граф на $\mathcal{C}$, и

(ii) за всяка псевдоправа c от $\mathcal{C}$, има направление $d(c)$, такова, че ребрата на G от направление $d(c)$ са точно изоморфните образи на ребрата на дуалния граф на $\mathcal{C}$, свързващи два върха, чиято обща граница се съдържа в c.

За зонотопичните графи от тип p можем да си мислим също така и като за обобщение на простите зонотопични графи, в което пораждащите фамилии на съответните прости зонотопични покрития се състоят не от отсечки, измежду които няма две успоредни, а от отсечки, всяка една от които е успоредна на една от p фиксирани две по две неуспоредни прави. В този случай, в условието за пълноразмерност на покриващите зонотопи трябва да се добави изискването двете отсечки в подмножеството, пораждащо покриващия зонотоп, да не са успоредни.

Нека сега p е естествено число, множеството D се състои от p елемента, и $\mathcal{F}$ е фамилията $\mathcal{S}(D)$.

Лема 3.4. *Всеки реализируем набор $\mathcal{R}$ над $\mathcal{F}$ се реализира от конфигурация $\mathcal{I}$, граничните прави на полуравнините в която са две по две различни, и точки, които не лежат на тези гранични прави.*

Доказателство. Аналогично на доказателствата на леми 2.1 и 2.2. □

Лема 3.5. *Нека $\mathcal{R}$ е набор над $\mathcal{F}$ с размерност k. Нека $1 \leq i \leq k$ и наборът $\mathcal{R}'$ се получава от $\mathcal{R}$, като във всеки елемент на $\mathcal{R}$ се промени i-тата позиция. Тогава $\mathcal{R}$ е реализируем точно когато $\mathcal{R}'$ е реализируем.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на лема 3.1. □

Теорема 3.21. *Нека хиперкубовият подграф G е реализируем над фамилията $\mathcal{F}$. Тогава G се покрива от граф от тип p.*

Доказателство. Аналогично на доказателството на теорема 3.11. □

И така, зонотопичните графи от тип p играят същата роля в настоящата задача като тази, която простите зонотопични графи играят в основната задача от предишния параграф.

Когато $p = 1$, зонотопичните графи от тип 1 са точно лъкатушните пътеки. Освен това, в този случай необходимото условие от теорема 3.21 е и достатъчно. Тези факти ни дават един нов поглед към теорема 3.20.

Нека сега $p = 2$ и $\mathcal{F} = \mathcal{S}(D)$ за някое двуелементно множество D. В този частен случай, на зонотопичните графи от тип 2 може да се даде и една по-прозрачна дефиниция, в която не се споменават псевдоправи.

Дефиниция 3.16. Казваме, че подграфът G на C_k е *правоъгълен*, ако има естествени числа p и q и биективно изображение h от множеството на върховете на G в множеството $\{1, 2, \ldots, p\} \times \{1, 2, \ldots, q\}$, такива, че:

- за всяко $1 \leq i < p$ има направление $d_i^{|}$, такова, че множеството от първообразите под h на наредените двойки $((i, j), (i+1, j))$ за $1 \leq j \leq q$ съвпада с множеството от ребрата на G в направление $d_i^{|}$, и
- за всяко $1 \leq j < q$ има направление d_j^{-}, такова, че множеството от първообразите под h на наредените двойки $((i, j), (i, j+1))$ за $1 \leq i \leq p$ съвпада с множеството от ребрата на G в направление d_j^{-}.

Теорема 3.22. *Зонотопичните графи от тип 2 и правоъгълните графи съвпадат.*

Както и в случая $p = 1$, необходимото условие от теорема 3.21 се оказва и достатъчно.

Теорема 3.23. *Един хиперкубов подграф G е реализируем над $\mathcal{F}$ точно когато има зонотопичните граф от тип 2 – или, което е същото, правоъгълен граф – който покрива G.*

Доказателство. ($\Leftarrow$) Достатъчно е да видим, че всеки правоъгълен хиперкубов подграф е реализируем. Доказателството може да се проведе аналогично на доказателствата на теореми 2.2 и 3.1($\Leftarrow$). □

Или, еквивалентно: всяко подреждане на псевдоправи от тип 2 е изправимо.

По този начин, както задачата за радарчетата, така и задачата за областите над $\mathcal{F}$ се свеждат до проблема за компактността на свойството на един хиперкубов подграф да се покрива от правоъгълен хиперкубов подграф: вярно ли е, че съществува естествено число N, такова, че, за произволни $k \geq N$ и подграф G на C_k, ако проекциите на G по произволни $k - N$ направления притежават това свойство, то тогава и самият G го притежава? Този въпрос е все още отворен.

Най-накрая, нека $p = 3$ и $\mathcal{F} = \mathcal{S}(D)$ за някое триелементно множество D. (Изборът $D = \{-1, 0, \infty\}$ ще ни донесе някои технически облекчения в разсъжденията по-долу.)

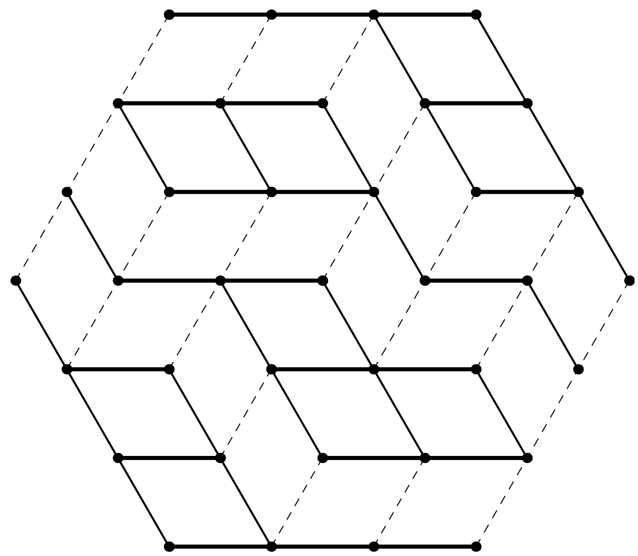
В този случай, условието от теорема 3.21 престава да бъде и достатъчно: има зонотопични графи от тип 3, които не се реализират над $\mathcal{F}$.

Теорема 3.24. *Зонотопичният граф от тип 3, показан на Фиг. 3.4, не е реализируем над $\mathcal{F}$.*

Доказателство. Да означим този граф с H.

Да се убедим първо, че H е зонотопичен граф от тип 3.

На Фиг. 3.4 можем да гледаме и като на покритие на правилен шестоъгълник със страна 3 с ромбове с ъгъл 60° и страна 1, чиито страни са оцветени в три цвята. Във всеки такъв ромб, да свържем средите на всяка двойка срещулежащи страни с отсечка в същия цвят като тези страни. Получените по този начин отсечки ще образуват девет начупени линии – по три от всеки цвят. Да продължим всяка една от тези начупени линии с две полуправи, перпендикулярни на тези страни на шестоъгълника, които съдържат нейните крайни точки, и несъдържащи точки, вътрешни за шестоъгълника. Ще се получи подреждане на псевдоправи от тип 3 (в което трите цвята отговарят на трите класа), чийто дуален граф е H.



Фиг. 3.4

Остава да покажем, че H е нереализируем над $\mathcal{F}$. Можем да смятаме, че наборът $\mathcal{R}$, съставен от неговите върхове, се състои от следните 37 деветмерни разположения (изброени отляво надясно и отдолу нагоре):

$(-,-,-,-,-,-,-,-,-)$, $(+,-,-,-,-,-,-,-,-)$, $(+,+,-,-,-,-,-,-,-)$,
$(+,+,+,-,-,-,-,-,-)$, $(-,-,-,+,-,-,-,-,-)$, $(+,-,-,+,-,-,-,-,-)$,
$(+,-,-,-,-,-,+,-,-)$, $(+,+,-,-,-,-,+,-,-)$, $(+,+,+,-,-,-,+,-,-)$,
$(-,-,-,+,+,-,-,-,-)$, $(+,-,-,+,+,-,-,-,-)$, $(+,-,-,+,-,-,+,-,-)$,
$(+,+,-,+,-,-,+,-,-)$, $(+,+,+,+,-,-,+,-,-)$, $(+,+,+,-,-,-,+,+,-)$,
$(-,-,-,+,+,+,-,-,-)$, $(-,-,-,+,+,-,+,-,-)$, $(+,-,-,+,+,-,+,-,-)$,
$(+,+,-,+,+,-,+,-,-)$, $(+,+,-,+,-,-,+,+,-)$, $(+,+,+,+,-,-,+,+,-)$,
$(+,+,+,-,-,-,+,+,+)$, $(-,-,-,+,+,+,+,-,-)$, $(-,-,-,+,+,-,+,+,-)$,
$(+,-,-,+,+,-,+,+,-)$, $(+,+,-,+,+,-,+,+,-)$, $(+,+,-,+,-,-,+,+,-)$,
$(+,+,+,+,-,-,+,+,+)$, $(-,-,-,+,+,+,+,+,-)$, $(+,-,-,+,+,+,+,+,-)$,
$(+,+,-,+,+,+,+,+,-)$, $(+,+,-,+,+,-,+,+,+)$, $(+,+,+,+,+,-,+,+,+)$,
$(-,-,-,+,+,+,+,+,+)$, $(-,-,+,+,+,+,+,+,+)$, $(-,+,+,+,+,+,+,+,+)$,
$(+,+,+,+,+,+,+,+,+)$.

Да допуснем, че той се реализира от конфигурацията $\mathcal{I} = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и точките P_1, P_2, ..., P_{37}, като точката P_i с координати (x_i, y_i) реализира i-

тото разположение R_i в горния списък за $1 \leq i \leq 37$. Нека още граничните прави на полуравнините α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2 и γ_3 са съответно a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2 и c_3.

Да забележим, че ако правите l и m са гранични за две от полуравнините в $\mathcal{I}$ и освен това са успоредни, то наборът, образуван от позициите в $\mathcal{R}$, съответни на l и m, не може да се състои от повече от три елемента. Оттук и от факта, че позиции 1 и 4 от $\mathcal{R}$ дават 4-елементен набор получаваме, че правите a_1 и b_1 се пресичат.

Аналогично получаваме и че, за всяко едно от трите множества $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\{c_1, c_2, c_3\}$, всяка права, принадлежаща на това множество, пресича всяка права, принадлежаща на всяко от другите две множества. Понеже измежду граничните прави на елементите на $\mathcal{I}$ не може да има четири, които се пресичат две по две, оттук следва, че $a_1 \parallel a_2 \parallel a_3$, $b_1 \parallel b_2 \parallel b_3$ и $c_1 \parallel c_2 \parallel c_3$.

Без загуба на общност можем да смятаме, че a_1, a_2 и a_3 имат ъглов коефициент ∞, b_1, b_2 и b_3 имат ъглов коефициент 0 и c_1, c_2 и c_3 имат ъглов коефициент -1. Нека уравненията на тези прави са съответно $x = A_1$, $x = A_2$, $x = A_3$, $y = B_1$, $y = B_2$, $y = B_3$, $x + y = C_1$, $x + y = C_2$ и $x + y = C_3$.

Понеже позиции 1, 2 и 3 от $\mathcal{R}$ дават набора $\{(-,-,-), (+,-,-), (+,+,-), (+,+,+)\}$, то без загуба на общност можем да смятаме, че уравненията на полуравнините α_1, α_2 и α_3 са съответно $x > A_1$, $x > A_2$ и $x > A_3$, като $A_1 < A_2 < A_3$.

По същия начин, без загуба на общност можем да смятаме и че уравненията на полуравнините β_1, β_2 и β_3 са съответно $y > B_1$, $y > B_2$ и $y > B_3$, като $B_1 < B_2 < B_3$.

Понеже позиции 7, 8 и 9 от $\mathcal{R}$ дават набора $\{(-,-,-), (+,-,-), (+,+,-), (+,+,+)\}$, то уравненията на полуравнините γ_1, γ_2 и γ_3 са или $x+y < C_1$, $x+y < C_2$ и $x+y < C_3$, съответно, като $C_1 > C_2 > C_3$, или $x+y > C_1$, $x+y > C_2$ и $x+y > C_3$, съответно, като $C_1 < C_2 < C_3$. В първия случай, обаче, позициите 1, 4 и 7 от $\mathcal{R}$ нямаше да дават набор, който съдържа разположението $(+,+,+)$. Следователно, налице е вторият случай.

Понеже позиция 1 в R_{11} е $+$, имаме, че $A_1 < x_{11}$. Позиции 5 и 7 в същото разположение ни дават още $B_2 < y_{11}$ и $x_{11} + y_{11} \leq C_1$. Оттук, $A_1 + B_2 < C_1$.

По същия начин, разположение R_7 ни дава $C_1 < A_2 + B_1$, разположение R_{24} ни дава $C_2 < A_1 + B_3$, разположение R_{14} – $A_3 + B_1 < C_2$, R_{31} – $A_2 + B_3 < C_3$ и R_{27} – $C_3 < A_3 + B_2$.

Оттук получаваме

$$A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3 = (A_1 + B_2) + (A_3 + B_1) + (A_2 + B_3) < C_1 + C_2 + C_3 < \\ < (A_2 + B_1) + (A_1 + B_3) + (A_3 + B_2) = A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + B_3,$$

което е противоречие. □

Въпросът за реализируемостта на зонотопичните графи от тип 3 – или, което е същото, за изправимостта на подрежданията от псевдоправи от тип 3 – е твърде слабо изследван. Същото важи и за компактността (в горния смисъл) на свойството на един хиперкубов подграф да се покрива от зонотопичен граф от тип 3, както и за аксиоматизируемостта на универсалните фрагменти на теориите на структурите на радарчетата и на областите над $\mathcal{F}$.

Когато $p \geq 4$, не е известно дори дали различните p-елементни множества от направления D водят до различни теории или различни универсални фрагменти.

3.4 Допълнителни бележки

Едно естествено обобщение на прожекторчетата, разгледани в параграф 2.1, в поголям брой измерения са специалните радарчета в $\mathbb{R}^2$ с области на видимост – ъгли и оченца във върховете на тези ъгли.

За всяка стойност на α от интервала $(0°, 180°]$, нека $\mathcal{W}(\alpha)$ е фамилията на отворените ъгли в $\mathbb{R}^2$ с мярка α. Задачите за аксиоматизация както на целите теории, така и на универсалните фрагменти на структурите на специалните радарчета с оченца във върховете на ъглите, определени над тези фамилии (както и над тяхното обединение), все още са отворени. Не е известно дори кои стойности на α водят до едни и същи теории и универсални фрагменти.

Още една задача от същия тип се получава тогава, когато $\mathcal{F}$ е подфамилията на $\mathcal{W}(90°)$, състояща се от тези ъгли, чиито рамене са успоредни на координатните оси. Тази задача има естествено обобщение в произволен брой измерения, като всички проблеми в така полученото семейство лесно се дискретизират. (И, следователно, могат да бъдат атакувани с чисто комбинаторни средства.) Всички те все още са отворени.

Литература

[1] Philippe Balbiani, Olivier Gasquet, and François Schwarzentruber. Knowledge reasoning in Lineland. In *Advances in Modal Logic*, 2010.

[2] Philippe Balbiani, Olivier Gasquet, and François Schwarzentruber. Agents that look at one another. *Logic Journal of the IGPL, Combined Special Issue: Best papers of FAMAS 2007 and FAMAS 2009*, 21(3), 2013.

[3] Stefan Felsner. *Geometric Graphs and Arrangements.* Vieweg, 2004.

[4] Olivier Gasquet and François Schwarzentruber. Knowledge in Lineland (extended abstract). In *International Joint Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, volume Volume 1-3, 2010.

[5] Jacob Goodman and Richard Pollack. Proof of Grünbaum's conjecture on the stretchability of certain arrangements of pseudolines. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 29, 1980.

[6] Eduard Helly. Über konvexe Körper. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1923.

[7] Jürgen Richter-Gebert. Kombinatorische Realisierbarkeitskriterien für orientierte Matroide. *Mitteilungen aus dem Mathem. Seminar Giessen*, 194, 1989.

[8] Gerhard Ringel. Teilungen der Ebene durch Geraden oder topologische Geraden. *Mathematische Zeitschrift*, 64, 1956.

[9] Frank Ruskey and Mark Weston. A survey of Venn diagrams. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2005.

[10] François Schwarzentruber. Knowledge about lights along a line. In *Formal Approaches to Multi-Agent Systems*, 2009.

[11] François Schwarzentruber. Seeing, knowledge, and common knowledge. In *Proceedings of the Third International Conference on Logic, Rationality, and Interaction*, 2011.

[12] Peter Shor. Stretchability of pseudoline arrangements is NP-hard. *Applied Geometry and Discrete Mathematics: The Victor Klee Festschrift*, 1991.

[13] Akiva Yaglom and Isaak Yaglom. *Challenging Mathematical Problems With Elementary Solutions*, volume 1. Dover, 1987.