Ορισιμότητα σε βαθμικές δομές

Ανδρέας Κ. Σαρρής

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή είναι αφιερωμένη στα προβλήματα ορισιμότητας πρωτής τάξης στις δομές των ω-Turing και ω-απαριθμησιακών βαθμών (ω-enumeration degrees), ωστόσο και στις τοπικές τους υποδομές.

Σε απάντηση της συμβάσης στην αρχή τού XX-ου αιώνα βαθιάς κρίσης στα μαθηματικά, ο David Hilbert προτείνει ένα πρόγραμμα σκοπεύον την αποκατάσταση των κλασικών μαθιματικών. Σε γενικές γραμμές, το πρόγραμμα του Hilbert σκοπεύει να τα καταλάβει τα μαθιματικά σε πλήρεις συνεπείς θεωρίες. Κυρία επιδίωξη του προγράμματος αυτού ήταν η απόδειξη της συνέπειας της αριθμητικής στην αριθμητική την ίδια.

Το 1930 ο Kurt Gödel αποδεικνύει την θεώρημα μη πληρότητας της αριθμητικής, με το οποίο επιφέρει καταστρεπτικό χτύπημα πάνω στο πρόγραμμα του Hilbert. Της απόδειξης αυτού του θεωρήματος ένα τεχνικό στοιχείο ήταν η πρώτη τυπικότητα της εννοίας υπολογίσιμης συνάρτησης. Αυτό επέτρεψε για πρώτη φορά όχι μόνο να σκεπτόμαστε αλγοριθμικά, αλλά επίσης και να συλλογιζόμαστε για την υπολογισμότητα εξωτερικά. Πρόσφατα αναπτύχθηκαν πολλά μοντέλα της υπολογισμότητας· οι αναδρομικές συναρτήσεις του Gödel, ο λ-λογισμός του Church, οι μηχανές του Turing και άλλα. Αν και στην πρώτη όψη αυτά τα μοντέλα φαίνονται διαφορετικά μεταξύ τους, τελικά μας δίνουν την ίδια κλάση συναρτήσεων. Η ισοδυναμία αυτών των μοντέλων ωθεί ο Alonzo Church να εκφράσει τη διατριβή ότι η διαισθητικά και ατύπως ορισμένη κλάση των υπολιγισίμων συναρτήσεων συμπίπτει με την κλάση των συναρτήσεων, ορισμένη από κάθε από τις προλεχθείσες παραπάνω τυπικότητες.

Όλα τα ανωτέρω αναφερθέντα μοντέλα επιτρέπουν υπολογίσημη απαρίθμηση όλων των αλγορίθμων και, αντίστοιχα, των μερικών συναρτήσεων, οι οποίες είναι υπολογίσιμες από αυτούς τούς αλγορίθμους. Αυτή η ιδιότητά τους εξασφαλίζει την ύπαρξη προβλήματος (αντίστοιχα, συνάρτησης), το οποίο δεν μπορεί να υπολογιστεί. Ένα τυπικό παράδειγμα αποτελεί το πρόβλημα τερματισμού. ‘Εχοντας μία σταθερή υπολογίσημη απαρίθμηση των μηχανών του Turing, προβάλλεται ότι το πρόβλημα εισαγωγής στο σύνολο K, περιέχον τους κώδικες αυτών των μηχανών του Turing, οι οποίες τερματίζονται όταν τρέχουν με είσοδο τον δικόν τους κώδικα, δεν είναι αποφασίσιμο από καμία μηχανή του Turing. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να περιγραφθεί και σε όλα τα άλλα μοντέλα της υπολογισμότητας.

Αν και το σύνολο K δεν είναι αναδρομικό (δηλαδή η χαρακτηριστική του συνάρτηση δεν είναι τέτοια), αυτό είναι αναδρομικά απαριθμητό. Με άλλα λόγια, υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος απαριθμεί όλα τα μέλη του K (αυτή η απαρίθμηση δεν είναι απαραιτήτως αυξούσα ή χωρίς επαναλήψεις).

Το 1939 στο δικό του άρθρο [43], ο Alan Turing επεκτείνει την τυπικότητα, που είχε εισαγάγει πριν, ως έτσι λεγόμενες μηχανές του Turing με μαντείο. Η επέκταση αυτή επιτρέπει στη μηχανή να χρησιμοποιήσει εξωτερική πληροφορία, παραληφθείσα μέσω «μαντείου». Αυτές οι επεκτεταμένες μηχανές μας δίνουν τη δυνατότητα να συγκρίνουμε τα σύνολα (ή, ισοδύναμα, τις ολικές συναρτήσεις) κατά την υπολογιστική τους δύναμη· το σύνολο B είναι υπολογίσιμο απο το σύνολο A (ή, A-αναδρομικό, ή Turing αναγώγιμο στο A) αν υπάρχει μηχανή του Turing $\mathcal{M}$ με μαντείο, τέτοια ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση του B είναι υπολογίσιμη μέσω του $\mathcal{M}$, χρησιμοποιώντας το μαντείο τη χαρακτηριστική του A συνάρτηση.

Μην ξεχορίζοντας τα σύνολα, τα οποία είναι αναγώγιμα μεταξύ τους, φτάνουμε μέχρι την έννοια του βαθμού μη επιλυσιμότητας, εισαχθείσα για πρώτη φορά το 1944 από τον Emil Post στο άρθρο [26]. Οι βαθμοί μη επιλυσιμότητας διαμορφώνουν μερικό διατεταγμένο χώρο, με τη έρευνα των οποίων η Θεωρία των βαθμών καταγίνεται. Ο Post παρατηρεί ότι ως τότε στα μαθηματικά έχουν εξετασθεί μόνο δύο τύποι αναδρομικά απαριθμητών συνόλων. Τον πρώτο τύπο αποτελούν τα αναδρομικά σύνολα – τα σύνολα, που είναι τα απλούστερα κατά την αναγωγή του Turing. Αυτά τα είναι αναγώγιμα σε κάθε άλλο σύνολο. Ο άλλος τύπος είναι τα πλήρη αναδρομικά απαριθμητά σύνολα, δηλαδή τα αναδρομικά απαριθμητά σύνολα, στα οποία είναι αναγώγιμο κάθε αναδρομικά απαριθμιτό σύνολο (π.χ. το K είναι τέτοιο). Ο Post ανεβάζει το ζήτημα αν υπάρχει μη-αναδρομικά αναδρομικό απαριθμιτό σύνολο, που δεν είναι πλήρες· Των μελετών στη Θεωρία των βαθμών αυτό το πρόβλημα θέτει την αρχή.

Ανεξαρτήτως, ο Friedberg στο [5] και ο Muchnik στο [1], επεξεργάστηκαν τη μέθοδο της προτεραιότητας, με τη βοήθεια της οποίας κατορθώνουν να δώσουν καταφατική απάντηση του προβλήματος του Post.

Σχετίζοντας την ιδέα, που βρίσκεται πίσω από το πλήρες σύνολο K, ο Kleene [12] αποδεικνύει ότι για κάθε σύνολο A μπορεί να βρεθεί ένα σύνολο A' (που θα το λέμε άλμα του A), τέτοιο που το A' είναι πλήρες για το A. Συντόμως, ο Kleene και ο Post [13] αποδεικνύουν, ότι αν τα σύνολα A και B έχουν ίδιο βαθμό του Turing, τότε τα άλματά τους έχουν επίσης ίδιο βαθμό. Έτσι μπορούμε να μεταφέρουμε το άλμα πάνω σε βαθμούς.

Της Θεωρίας των βαθμών ο βασικός σκοπός είναι η μελέτη αλγεβρικών δομών, βασισμένες σε αναγωγές μεταξύ συγκεκριμένων αντικειμένων, οι οποίες αναγωγές παρουσιάζουν τυπικό τρόπο της ταξινόμησης της υπολογιστικής δυνάμεως αυτών των αντικειμένων. Μετά την αρχική ώθηση του άρθρου του Post, είναι εισηγμένες και μελετημένες πολλές βαθμικές δομές, μεταξύ των οποίων αυτές των αναδρομικά απαριθμητών βαθμών ($\mathfrak{R}$), των βαθμών του Turing ($\mathfrak{D}_T$), των απαριθμησιακών βαθμών (e-βαθμών, $\mathfrak{D}_e$), των βαθμών του Medvedev ($\mathfrak{M}$), των βαθμών του Muchnik ($\mathfrak{M}_w$), των ω-απαριθμησιακών βαθμών ($\mathfrak{D}_\omega$).

Καθεμία βαθμική δομή γεννιέται από ορισμένη σχέση αναγωγής μεταξύ αντικειμένων σταθερού συνόλου. Ούτως, π.χ., ανωτέρω αναφερθέντων βαθμικών δομών τα αντικείμενα είναι τα αναδρομικά απαριθμητά σύνολα στην περίπτωση της $\mathfrak{R}$, τα υποσύνολα του ω στην περίπτωση της $\mathfrak{D}_T$, τα σύνολα (ολικών) συναρτήσεων από το ω στο ω στις περιπτώσεις των $\mathfrak{M}$ και $\mathfrak{M}_w$, οι ακολουθίες υποσυνόλων του ω στην περίπτωση της $\mathfrak{D}_\omega$.

Σε γενικές γραμμές, το αντικείμενο α είναι αναγώγιμο στο αντικείμενο β, αν υπάρχει αλγόριθμος διαμορφώνων πληροφορία περί του β στην τέτοια περί του α. Με άλλα λόγια, στο β είναι κωδικοποιημένη πληροφορία περί του α, η οποία δύναται να αποκωδικοποιηθεί αλγοριθμικά. Τα διάφορα είδη αναγωγής εξαρτώνται όχι μόνο από τον τύπο των αντικειμένων, αλλά επίσης από τον τύπο της πληροφορίας διαμορφουμένης. Επιπροσθέτως, μπορούν να υπάρχουν και διαφορετικοί περιορισμοί πάνω στο διαμορφώνων αλγόριθμον.

Εν περιπτώσει των καλυτέρων μελετημένων αναγωγών – του Turing και η απαριθμησιακή – περιορισμοί στο διαμορφώνων αλγόριθμον δεν επιβάλλονται. Η διαφορά μεταξύ των δύο αναγωγών είναι στον τύπο της πληροφορίας διαμορφουμένης. Στην περίπτωση της αναγωγής του Turing διαμορφώνουμε χαρακτηριστικές συναρτήσεις και στης απαριθμητής αναγωγής διαμορφώνουμε απαριθμήσεις. Οι δύο αναγωγές – του Turing και η απαριθμησιακή – είναι αυτοπαθείς και μεταβατικές σχέσεις. Δία ταύτα, αμφότερες γεννούν μη τετριμμένες σχέσεις ισοδυναμίας (αντίστοιχα $\equiv_T$ και $\equiv_e$) ως εξής·

$$A \equiv B \iff A \leq B \ \text{ και } B \leq A.$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την $\equiv_T$ λέγονται βαθμοί Turing (T-βαθμοί), και εκείνες ως προς την $\equiv_e$ – απαριθμησιακές βαθμοί (e-βαθμοί). Οι προδιατάξεις $\leq_T$ και $\leq_e$ γεννούν μερικές διατάξεις στα αντίστοιχα σύνολα βαθμών.

Δεν είναι οπωσδήποτε υποχρεωτικά, όμως, ο τύπος της πληροφορίας της εισαγωγής (δηλαδή η πληροφορία περί του συνόλου, στο οποίο ανάγεται) να συμπίπτει με τον τύπο της πληροφορίας της εξαγωγής (δηλαδή η πληροφορία περί του συνόλου, που ανάγουμε). Έτσι, π.χ., στην αναγωγή «αναδρομικά απαριθμητό στο» ($\leq_{r.e.}$), ο αλγόριθμος πρέπει να διαμορφώνει χαρακτηριστική συνάρτηση σε απαρίθμηση. Εν αντιθέσει με τις Turing και απαριθμησιακή αναγωγές, η αναγωγή $\leq_{r.e.}$ είναι μόνο αυτοπαθής και μεταβατική και, επομένως, δεν είναι προδιάταξη. Σ' αυτόν τον τρόπο, αυτή δε μπορεί να γεννήσει βαθμική δομή σύμφωνα με τη μέθοδο περιγεγραμμένη παραπάνω. Είναι δυνατόν, όμως, η αναγωγή αυτή να χρησιμοποιηθεί αλλιώς.

Για καθεμία αναγωγή $\leq_r$ σε σύνολο Ω αντικειμένων, να ορίσουμε την αναγωγή $\preceq_r$ επίσης στο Ω ως εξής·

$$\alpha \preceq_r \beta \iff (\forall \gamma \in \Omega)[\beta \leq_r \gamma \Rightarrow \alpha \leq_r \gamma].$$

Πράγματι, η αναγωγή $\preceq_r$ συγκρίνει τα αντικείμενα από το Ω σύμφωνα με την «απλότητά» τους κατά την αναγωγή $\leq_r$· το αντικείμενο α είναι απλούστερο από το αντικείμενο β, αν το α είναι αναγώγιμο σε κάθε αντικείμενο, σε οποίο είναι αναγώγιμο και το β (με άλλα λόγια, αν κάθε αντικείμενο κωδικοποιούν το β, κωδικοποιεί και το α).

Αν εξετάσουμε τις αναγωγές $\preceq_T$ και $\preceq_e$, βασισμένες αντίστοιχα στην Τυρινγ και στην απαριθμησιακή αναγωγή, τότε δεν θα παραλάβομε κάτι καινούργιο – η γεννημένη αναγωγή συμπίπτει με την πρωταρχική και στις δύο περιπτώσεις. Αλλιώς είναι τα πράγματα στην περίπτωση της αναγωγής «αναδρομικά απαριθμητό στο». Ο Selman αποδεικνύει ότι η γεννημένη αναγωγή $\preceq_{r.e.}$ είναι ακριβώς η προδιάταξη $\leq_e$ της απαριθμησιακής αναγωγής.

Χρησιμοποιώντας όμοια ίδεα, μπορεί να εισαχθεί αναγωγή μεταξύ ακολουθιών από σύνολα φυσικών αριθμών. Πράγματι, αν οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι δύο τέτοιες ακολουθίες, έστω ορίσουμε την αναγωγή $\preceq_{*,\omega}$ ως εξής·

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \trianglelefteq_* X \Rightarrow \mathcal{A} \trianglelefteq_* X],$$

όπου $\trianglelefteq_*$ είναι κάποια αναγωγή μεταξύ ακολουθίας από σύνολα φυσικών αριθμών και συνόλου φυσικών αριθμών. Ούτως ειπείν, κάτα την αναγωγή $\preceq_{*,\omega}$, κάθε ακολουθία $\mathcal{A}$ ορίζεται απο την κλάση $\mathcal{M}_*(\mathcal{A}) = \{X \subseteq \omega \mid \mathcal{A} \trianglelefteq_* X\}$·

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{M}_*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_*(\mathcal{A}).$$

Βεβαίως, η $\trianglelefteq_*$ δεν είναι προδιάταξη, το λιγότερο γιατί ανάγει αντικείμενα από διάφορους τύπους. Διαφορετικά, η αναγωγή $\preceq_{*,\omega}$ πάντα είναι προδιάταξη. Θα συγκεντρωθούμε επί μίας ιδιαιτέρας κλάσης αναγωγών $\trianglelefteq_*$, οι οποίες εκδηλώνουν κωδικοποίηση της ακολουθίας συνόλων στο σύνολο, που χρησιμοποιεί τον τελεστή του άλματος Turing.

Πράγματι, έστω η ακολουθία $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ είναι αναγώγιμη στο σύνολο X ($\mathcal{A} \trianglelefteq_* X$), αν για κάθε n, το A_n είναι αναγώγιμο στο n-ο άλμα Turing του X ($A_n \leq X^{(n)}$). Απαιτούμε ακόμα και να είναι ρυθμική αυτή η αναγωγή, ήτοι να υπάρχει αλγόριθμος, μέσω του οποίου, από το ν να καταλαμβάνουμε ποίον αλγόριθμο να χρησιμοποιήσουμε για να αναχθεί το A_n στο $X^{(n)}$.

Τώρα, έστω η αναγωγή $\leq_*$ είναι καμία από τις σχέσεις $\leq_{\Sigma^0_k}$, $k < \omega$, τότε η αντίστοιχη αναγωγή $\preceq_{*,\omega}$ γεννάει βαθμική δομή, η οποία αποτελεί άνω η-μιπλέγμα με ελάχιστο στοιχείο. Στην διατριβή αυτή, λαμβάνουμε την υπόψη μας επί των σχέσεων στις περιπτώσεις, όταν το k είναι 0 και 1 (στις αυτές περιπτώσεις, $\leq_*$ συμπίπτει αντίστοιχα με την $\leq_T$ και $\leq_{r.e.}$). Οι αντίστοιχες γεννημένες βαθμικές δομές είναι συμβολισμένες με $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ και $\mathfrak{D}_\omega$ και ειπωμένες δομές των ω-Turing και των ω- απαριθμησιακών (ω-e) βαθμών.

Μέσω του τελεστή του αλμάτος Turing, ορίζονται τελεστές αλμάτος και στις δομές $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ και $\mathfrak{D}_\omega$. Αυτά τα άλματα είναι τέτοια, ότι για καθεμία ακολουθία $\mathcal{A}$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\mathcal{A}'$, τέτοια ώστε το $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A}')$ αποτελείται ακριβώς από τα άλματα Turing των συνόλων από το $\mathfrak{M}_*(\mathcal{A})$. Στην περίπτωση των αναφερώμενων δομών, η απεικόνιση $' : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ είναι επεκτατική και αυστηρά μονοτονική, και επομένως, μπορεί σωστά να γεννήσει τελεστή άλαμτος και στην αντίστοιχη βαθμική δομή.

Μελετώντας την πολυπλοκότητα της ορισμένης δομής βαθμών, η προσέγγισή μας μπορεί να έχει διάφορες εκφράσεις. Μία τέτοια έκφραση είναι καθαρή αλγεβριακή μελέτη της βαθμικής δομής, η οποία περιλαμβάνει τη διερεύνηση προβλημάτων εμβύθισης και πυκνότητας (ή, το αντίθετο, υπάρξη ελαχιστικών βαθμών (minimal degrees) και ελαχιστικών καλυμμάτων (minimal covers). Μία άλλη γωνία, από την οποία μπορεί να μελετιέται μία δομή βαθμών, είναι το να αναλυθεί η πολυπλοκότητα της θεωρίας της. Αυτή η ανάλυση περιλαμβάνει τον ορισμό της οριακής γραμμής (μέσω τμημάτων της θεωρίας) μεταξύ της αποκρισιμότητας και μη αποκρισιμότητας, ωστόσο και τη σύγκριση μεταξύ της θεωρίας και άλλων θεωριών (τα συχνότερα, η σύγκριση είναι με την θεωρία της αριθμητικής n-ης τάξης). Η πολυπλοκότητα μίας βαθμικής δομής μπορεί να περιγραφεί και από την ακαμψία (rigidity) της περί αυτομορφισμών (δηλαδή αν η δομή εχεί μη τετριμμένους αυτομορφισμούς). Μία άλλη μελέτη της πολυπλοκότητας καμίας δομής μπορεί να κατευθυνθεί κατά την ανακάλυψη φανερώς εξωτερικών περί της δομής, αλλά ορισίμων στη γλώσσα της, σχέσεων. Βεβαίως, όλες οι αυτές προσεγγίσεις είναι συνδεδεμένοι μεταξύ τους. Έτσι, π.χ., οι ορίσιμες κλάσεις βαθμών περιορίζουν τους δυνατούς αυτομορφισμούς της δομής.

Η βασική, αλλά όχι μοναδική γραμμή των παρουσιασμένων μελετών στις δομές $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ και $\mathfrak{D}_\omega$ είναι τα προβλήματα ορισιμότητας.

Ο πρώτος ρόλος στις μελέτες, συνδεδεμένες με τα προβλήματα ορισιμότητας στη θεωρία των βαθμών, παίζει ο τελεστής του αλμάτος. Πράγματι, ακόμη και τα πρώτα μη τετριμμένα οριστικά αποτελέσματα είναι στη δομή $\mathfrak{D}'_T$ των T-βαθμών με συμπεπληρωμένο τελεστή αλμάτος. Το πρόβλημα, αν το άλμα το ίδιο είναι ορίσιμο στους όρους της διατάξεως της αναγώγης του Turing, είναι ανεβασμένο ακόμα στο πρώτο άρθρο του Kleene και του Post. Αλλά η επίλυση αυτού του προβλήματος δεν είναι καθόλου τετριμμένη. Στην ιστορία παραμένουν οι μερικές αποτυχημένες προσπαθείες του Cooper για φυσικό ορισμό του αλμάτος. Μόλις το 1999 ο Shore και ο Slaman [33] κατορθώνουν να καθορίσουν την ορισιμότητα του τελεστή $'$. Βασικό συστατικό στην απόδειξή τους είναι η ορισιμότητα του τελεστή $''$ του διπλού αλμάτος, η οποία είχε βρεθεί νωρίτερα από τον Slaman και τον Woodin [34]. Αυτή η ορισιμότητα στηρίζεται στις επεξεργασμένες στο ίδιο άρθρο μεθόδους για κωδικοποίηση μοντέλων της αριθμητικής στη Turing βαθμική δομή. Ένα μειονέκτημα των αυτών των κωδικών μεθόδων είναι το δεν μας δίνουν φυσικό ορισμό. Έτσι, το πρόβλημα του φυσικού ορισμού του αλμάτος Turing δεν έχει ακόμα λυθεί.

Αντιθέτως, στη δομή $\mathfrak{D}_e$ των απαριθμησιακών βαθμών αν και όμοιες κωδικές μέθοδοι είναι δυνατές, το πρόβλημα της ορισιμότητας του απαριθμησιακού αλμάτος επελύθη φυσικότερον. Στο [10] ο Kalimullin εισάγει την έννοια του $\mathcal{K}$-ζεύγους και αποδεικνύει, ότι τα $\mathcal{K}$-ζεύγη αποτελούν μη τετριμμένη κλάση, που είναι ορίσιμη μεσώ απλής Π_1^0 φόρμουλας στη γλώσσα των πλεγμάτων. Στηριζόμενος στις ιδιότητες των $\mathcal{K}$-ζευγών, ο Kalimullin κατορθώνει φανερά να δείξει φόρμουλα (πρώτης τάξης), ορίζουσα τον τελεστή του αλμάτος στη δομή $\mathfrak{D}_e$.

Μαζί με τη δομή $\mathfrak{D}_T$, αντικείμενα των μελετών στη θεωρία των βαθμών γίνονται και δύο υποδομές της – η $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ αποτελούμενη από τους T-βαθμούς, που είναι αναδρομικοί στο πρόβλημα τερματισμού, και η $\mathfrak{R}$, αποτελούμενη από τους βαθμούς, οι οποίοι αποτελούν αναδρομικά απαριθμητό σύνολο. Βεβαίως, η μονοτονικότητα του αλμάτος και η ύπαρξη μεγίστου στοιχείου (ήτοι, ο βαθμός του προβλήματος του τερματισμού, $(\mathbf{0}'_T)$), φανερώνουν ότι δεν είναι κλειστό το άλμα στην $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ και στην $\mathfrak{R}$. Αλλά, μέσω αυτού του τελεστή, μπορούμε να διαμερίσουμε αυτές τις δομές, κατά την εγγύτητα των βαθμών προς το $\mathbf{0}_T$ και το $\mathbf{0}'_T$. Πράγματι, για κάθε φυσικό αριθμό n, η n-η επανάληψη του αλμάτος ενός βαθμού (στην $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ ή στην $\mathfrak{R}$) πάντα ανήκει στη διάστημα $[\mathbf{0}_T^{(n)}, \mathbf{0}_T^{(n+1)}]$. Διά τούτο, αξίζει τον κόπο να ασχοληθούμε με την κλαση των βαθμών, το n-ο άλμα των οποίων είναι κατά το δυνατόν ελαχιστό,

$$\mathbf{L}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_T^{(n)}\},$$

τους οποίους λέμε n-χαμηλούς, ωστόσο και με την κλάση των βαθμών, το n-ο άλμα των οποίων είναι κατά το δυνατόν μέγιστο,

$$\mathbf{H}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_T^{(n+1)}\},$$

τους οποίους λέμε n-υψηλούς. Την κλάση των βαθμών, οι οποίοι για κάθε n δεν είναι ούτε n-χαμηλοί, ούτε n-υψηλοί, την συμβολίζουμε με το $\mathbf{I}$, και τους βαθμούς τους ίδιους τους λέμε ενδιαμέσους (intermediate). Αυτή η ιεραρχία δεν είναι εκτρωματική (με άλλα λόγια, για κάθε n, οι κλάσες $\mathbf{L}_n - \mathbf{L}_{n+1}, \mathbf{H}_n -$

$\mathbf{H}_{n+1}$ και $\mathbf{I}$ δεν είναι κενές). Φυσικά γεννιέται το ζήτημα της ορισιμότητας των κλάσεων $\mathbf{L}_n, \mathbf{H}_n, \mathbf{I}$ στις τοπικές υποδομές $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ και $\mathfrak{R}$. Χρησιμοποιώντας μεθόδους κωδικοποιούσες την αριθμητική στην δομή $\mathfrak{R}$, ο Nies, ο Shore και ο Slaman [21] αποδεικνύουν ότι για κάθε n, οι κλάσεις $\mathbf{L}_{n+1}$ και $\mathbf{H}_n$ είναι ορίσιμες μέσω φόρμουλας πρώτης τάξης όσο στην $\mathfrak{R}$, τόσο και στην $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}T')$. Ξανά, αυτές οι μέθοδοι δεν μας δίνουν φυσικό ορισμό των ορισμένων κλάσεων. Είναι γνωστό, ότι η κλάση των ενδιαμέσων βαθμών δεν είναι ορίσιμη στην ούτε μίαν των δύο τοπικών υποδομών.

Στην περίπτωση της τοπικής υποδομής $\mathfrak{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$ των e-βαθμών, πάλι η κλάση των ενδιαμέσων βαθμών δεν είναι ορίσιμη. Από τις άλλες κλάσεις, μόνο η κλάση $\mathbf{L}_1$ έχει βρεί απάντηση του ζητήματος ορισιμότητάς της. Ούτος, η M. Soskova και ο H. Ganchev [9] δίνουν φυσικό ορισμό της παραπάνω κλάσης, βασισμένος της εννοίας του $\mathcal{K}$-ζεύγους.

Γενικά, ούσα μία βαθμική δομή άνω ημιπλέγμα με ελάχιστο στοιχείο και με συμπληρωματοκό τελεστή αλμάτος, ενδιαφέρον για μελέτες αποτελεί και δική της υποδομή (δηλαδή, η υποδομή των βαθμών, φραγμένοι από το άλμα του ελαχίστου στοιχείου). Ξανά, μπορούμε να ασχολούμαστε με τις κλάσεις της άλμα-ιεραρχίας και τα αντίστοιχα ζητήματα της ορισιμότητάς τους.

Η δομή της διατριβής. Το Κεφάλαιο 1 είναι εισαγωγικό και σκοπεύει να δώσει βασικούς συμβολισμούς και έννοιες, ωστόσο να εκθέσει τα απαραίτητες των επομένων μας εξετάσεων δεδομένα περί των T και e-αναγωγών. Επιπλέον, στο αυτό το κεφάλαιο εκτίθεται και μία ρυθμική επέκταση των ανωτέρω αναγωγών σε ακολουθίες συνόλων φυσικών αριθμών, ωστόσο και μία γενική προσέγγιση ορισιμότητας των ω-αναγωγών μεταξύ ακολουθιών συνόλων φυσικών αριθμών. Τμήμα αυτού του κεφαλαίου αποτελεί μια βιβλιογραφική ανασκόπηση των μελετών, που αφορούν τις δομές των T και e-βαθμών, όπως και τις δικές τους υποδομές.

Όπως είπαμε νωριτέρως, βασικό θέμα των μελετών μας είναι τα άνω ημιπλέγματα $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ και $\mathfrak{D}_\omega$ αντίστοιχα των ω-Turing και των ω-απαριθμησιακών βαθμών. Οι μελέτας στην $\mathfrak{D}_\omega$ γενικά αφιερώνονται στην ορισιμότητα του αλμάτος του ελαχίστου στοιχείου. Αυτή η ορισιμότητα βασίζεται στο χαρακτηρισμό της μεταφερμένης από τους απαριθμήτους βαθμούς έννοιας $\mathcal{K}$-ζεύγους. Αυτός ο χαρακτηρισμός των $\mathcal{K}$-ζευγών μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τμήμα των παρατηρήσεών μας στην τοπική θεωρία. Στο αποτέλεσμα αυτού, θα δώσουμε φανερώς φόρμουλα πρώτης τάξης, ορίζουσα την κλάση των ενδιαμέσων βαθμών. Στις μελέτες στους ω-e βαθμούς είναι αφιερωμένο εξαιρετικά το Κεφάλαιο 2.

Στο τελευταίο της διατριβής το Κεφάλαιο 3, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα που αφορούν τους ω-Turing βαθμούς. Αρχικά, εισάγεται μία σχέση $\leq_{T,\omega}$ αναγωγής μεταξύ ακολουθιών συνόλων και ερευνούνται οι βασικές τους ιδιότητες. Έπειτα, βασίζοντας στην αυτή την σχέση, ορίζεται και το άνω ημιπλέγμα

$\mathfrak{D}_{T,\omega}$ των ω-Turing βαθμών. Στη συνέχεια, όμοια με τους ω-e βαθμούς, εισάγεται τελεστής αλμάτος στην $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Έπειτα, αποδεικνύεται ένα δυνατό θεώρημα για αντιστροφή του αλμάτος (jump inversion), μέσω του οποίου ορίζεται ένας τελεστής της αντιστροφής του αλμάτος (κάτι που δεν είναι δυνατόν στις $\mathfrak{D}_T$ και $\mathfrak{D}_e$). Με την βοήθεια αυτού του τελεστή, αποδεικνύεται ότι στη δομή των ω-Turing βαθμών, υπάρχει υποδομή ισομορφική με τους βαθμούς Turing, η οποία είναι ορίσιμη με φόρμουλα πρώτης τάξης στη γλώσσα της διάταξης και του αλμάτος. Επιπλέον, έπεται από το παραπάνω αποτέλεσμα της αντιστροφής του αλμάτος, ότι οι ομάδες των αυτομορφισμών των δομών $\mathfrak{D}_T$ και $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ είναι ισομορφικές μεταξύ τους.

Αναφέρεται επίσης και η κλάση των σχεδόν μηδενικών βαθμών (almost zero degrees) – αυτοί οι βαθμοί διακρίνονται από το ελάχιστο στοιχείο λόγω της ελλείψεως ρύθμισης. Αποδεικνύεται ότι αυτοί οι βαθμοί αποτελούν υποδομή, που είναι αρκετώς πλήρης, ώστε κάθε απαρίθμητη μερική διάταξη μπορεί να εγκλεισθεί στην αυτήν.

Σπουδαιότατο μέρος στις μελέτες μας έχουν οι ελαχιστικοί βαθμοί. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των ελαχιστικών βαθμών είναι απαριθμητό, και φραγμένο από το πρώτο άλμα του ελαχίστου στοιχείου. Η ύπαρξη αυτών των στοιχείων μαρτυρά ότι η δομή $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ δεν είναι στοιχειωδώς ισοδύναμη (elementary equivalent) ούτε με τους απαριθμητούς, ούτε με τους ω-e βαθμούς.

Η διατριβή ολοκληρώνεται με αποτελέσματα που αφορούν την τοπική θεωρία της $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Αποδεικνύονται μερικά αποτελέσματα ορισιμότητας, μεταξύ των οποίων αυτής της κλάσης (της εικόνας) των βαθμών Turing, όπως και όλων των κλάσεων $\mathbf{H}_n$ και $\mathbf{L}_n$ από την άλμα-ιεραρχία.

Ευχαριστίες. Ευχαριστώ θερμά όλα τα μέλη του τμήμα «Μαθηματική Λογική και εφαρμογές της» της Σχολής Μαθηματικών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου της Σόφιας «Άγιος Κλήμης της Αχρίδας» για την φιλική τους σχέση μ' εμένα. Είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στον κ. Ivan Soskov , που ξύπνησε τον πόθο μου να ασχολούμαι με τη θεωρία της υπολογισιμότητας. Εξαιρετική ευγνωμοσύνη εκφράζω στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Hristo Ganchev, οι συντροφικές συμβουλές του οποίου συνέβαλαν για την εξέλιξη του ενός όχι μικρού τμήματος των αντιλήψεών μου.

Α.Κ.Σ.

Αναφορές

[1] Muchnik, A. A., *On the unsolvability of the problem of reducibility in the theory of algorithms*, Doklady Akademii Nauk SSSR (N.S.), vol. 108 (1956), pp. 194–197.

[2] Cooper, S. B., *Minimal degrees and the jump operator*, Jour. Symb. Logic **38** (1973), 249-271.

[3] Cooper, S. B., *Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the Σ_2 sets are dense*, J. Symbolyc Logic **49** (1984), 503-513.

[4] Cooper, S. B., *Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions*, Recursion theory week, Oberwolfach 1989, Lecture notes in mathematics (Heildelberg) (K. Ambos-Spies, G. Muler, and G. E. Sacks, eds.), vol. 1432, Springer-Verlag, 1990, pp.57-110.

[5] Friedberg, R. M., *Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability*, Proc. Nat. Ac. Sci. **43** (1957), 236-238.

[6] Ganchev, H., *Exact pair theorem for the ω-enumeration degrees*, Computation and Logic in the Real World, Lecture Notes in Comp. Science (B. Loewe, S. B. Cooper and A. Sorbi, eds.), **4497** (2007), 316-324.

[7] Ganchev, H. and A. C. Sariev, *Definability of jump classes in the local theory of the ω-enumeration degrees*, Annuaire de Université Sofia, to appear.

[8] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *The High/Low Hierarchy in the Local Structure of the ω-Enumeration Degrees*, Annals of Pure and Applied Logic **163**(5), 2012, 547-566.

[9] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *Definability via Kalimullin Pairs in the structure of the enumeration degrees*, to appear in Transaction of American Mathematical Society.

[10] Kalimullin, I. Sh., *Definability of the jump operator in the enumeration degrees*, Journal of Mathematical Logic **3** (2003), 257-267.

[11] Kent, T. and A. Sorbi, *Bounding nonsplitting enumeration degrees*, Journal of Symbolic Logic Volume 72, Issue 4 (2007), 1405-1417.

[12] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N. Y., 1952.

[13] Kleene, S. C. and E. L. Post, *The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability*, Ann. of Math. (2), 59:379-407, 1954.

[14] Lachlan, A. H., *On a problem of G.E. Sacks*, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 972-979.

[15] Lerman, M., *Degrees of unsolvability. Local and global theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[16] Martin, D. A., *On a question of G.E.Sacks*, J. Symbolic Logic **31** (1966), 66-69.

[17] McEvoy, K., *Jumps of quasi-minimal enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[18] McEvoy, K. and S. B. Cooper, *On minimal pairs of enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[19] Mostowski, A., *Über gewisse universelle Relationen*, Ann. Soc. Pol. Math. **17** (1938), 117-118.

[20] Myhill, J., *Note on degrees of partial functions*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 519-521.

[21] Nies, A., R. A. Shore, and T. A. Slaman, *Interpretability and definability in the recursively enumerable degrees*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 241-291.

[22] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume I*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 125, Elsevier, 1989.

[23] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume II*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 143, Elsevier, 1999.

[24] Posner, D. B., *The uppersemilattice of the degrees below* $\mathbf{0}'$ *is complemented*, J. Symbolic Logic **46** (1981), 705-713.

[25] Posner, D. B. and R. W. Robinson, *Degrees Joining to* $0'$, J. Symbolic Logic **46(4)** (1981), 714-722.

[26] Post, E. L., *Recursively enumerable sets and positive integers and their decision problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 84-316.

[27] Rogers, H. Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[28] Sacks, G. E., *On degrees less than* **0**', Ann. Math. **77** (1963), 211-231.

[29] Sacks, G. E., *Recursive enumerability and the jump operator*, Trans. Amer. Math. Soc., 108, (1963), 223-239.

[30] Sariev, A. C. and H. Ganchev, *The ω-Turing degrees*, Annals of Pure and Apllied Logic 165(9), pp. 1512-1532.

[31] Shore, R. A., *The Turing degrees: Global and Local Structure*, unpublished.

[32] Shore, R. A., *Direct and local definitions of the Turing jump*, Journal of Mathematical Logic **9** (2007), pp.229-262.

[33] Shore, R. A. and T. A. Slaman, *Defining the Turing jump*, Math. Res. Lett., 6(5-6): 711-722, 1999.

[34] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in degree structures*, preprint available at http://math.berkley.edu/slaman/talks/sw.pdf.

[35] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in the enumeration degrees*, Arch. Math. Logic **36** (1997), 255-267.

[36] Soare, R. I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.

[37] Sorbi, A., *The enumeration degrees of the Σ^0_2 sets*, Complexity, Logic and Recursion Theory (New York) (A. Sorbi, ed.), Marcel Dekker, 1975, pp. 303-330.

[38] Soskov, I. N., *The ω-enumeration degrees.*, Journal of Logic and Computation,2007 (17) pp. 1193-1214.

[39] Soskov, I. N. and H. Ganchev, *The jump operator on the ω-numeration degrees*, Ann. Pure and Appl. Logic, Volume 160, Issue 30, September 2009, pp 289-301.

[40] Soskov, I. N. and B. Kovachev, *Uniform regular enumerations*, Mathematical Structures in Commp. Sci. **16** (2006), no. 5, 901-924.

[41] Soskov, I. N. and M. I. Soskova, *Kalimullin pairs of Σ^0_2 ω-enumeration degrees*, Int. J. Software and Informatics **5(4)** (2011), 637-658.

[42] Soskova, M. I., *The automorphism group of the enumeration degrees*, to appear in Ann. Pure and Appl. Logic.

[43] Turing, A., *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 42, 1936-37, pages 230-265.

[44] Yates, C. E. M., *Initial segments of the degrees of unsolvability, Part II: Minimal degrees*, J. Symbolic Logic **35**, 243-266.