С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т
"СВ.   К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И"

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А
Катедра по Математическа логика и приложенията ѝ

Андрей Константинов Сариев

# ОПРЕДЕЛИМОСТ В СТЕПЕННИ СТРУКТУРИ

## ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен "доктор"
по професионално направление "Математика" (4.5),
научна специалност "Математическа логика"

Научен ръководител
**доц. д-р Христо Ганчев**

**СОФИЯ, 2015**

# Предговор

В отговор на настъпилата в началото на XX век дълбока криза в математиката, David Hilbert предлага програма за реабилитиране на класическата математика. Грубо казано, Хилбертовата програма цели обхващането на математиката в пълни непротиворечиви теории. Основен стремеж на тази програма било доказването на непротиворечивостта на аритметиката в самата аритметика.

През 1930 г. Kurt Gödel доказва Теоремата за непълнота на аритметиката, с което нанася съкрушителен удар върху програмата на Hilbert. Един технически елемент от доказателството на тази теорема бил първата формализация на понятието за изчислима функция. Това за първи път позволило не само да се работи алгоритмично, но и да се разсъждава външно за изчислимостта. Не след дълго се развива цяла редица от модели на изчислимостта: рекурсивните функции на Gödel, $\lambda$-смятането на Church, машините на Turing, машините с неограничени регистри на Shepherdson и Sturgis. Макар наглед различни, оказва се, че тези формализми дават един и същи клас от функции. Еквивалентността на тези модели подтиква Alonzo Church да изкаже тезиса, че интуитивно и неформално определеният клас на изчислимите функции съвпада с класа на функциите определени от който и да е от по-горните формализми.

Всеки един от по-горе споменатите модели позволява ефективно изброяване на всички алгоритми (и, съответно, на частичните функции, изчислими от тези алгоритми), което от своя страна пък осигурява наличието на проблем (съответно, функция), който не може да бъде решен от такъв алгоритъм. Типичен пример е Стоппроблемът. При фиксирано ефективно номериране на машините на Turing, се оказва, че проблемът за принадлежност към множеството $K$, състоящо се от номерата на онези машини на Turing, които завършват работа над вход същия този номер, не може да бъде разрешен от никоя машина на Turing (проблемът може да се изкаже и във всеки един друг от моделите на изчислимостта).

Въпреки, че множеството $K$ не е рекурсивно (т.е. характеристичната му функция не е такава), то е рекурсивно номеруемо. Казано иначе, съществува алгоритъм, който последователно (не непременно във възходящ ред и без повторения) генерира елементите на $K$.

В своята статия [**43**] от 1939 г. Alan Turing разширява по-рано въведения от него формализъм до така наречената Тюрингова машина с оракул. Това разширение позволява на машината да използува информация отвън, представена на машината чрез "оракул". Тази добавка ни дава възможност да сравняваме множествата (или, еквивалентно, тоталните функции) според тяхната изчислителна сила: множеството $B$ е изчислимо от $A$ (или, $A$-рекурсивно, или Тюрингово сводимо към $A$), ако съществува Тюрингова машина с оракул $\mathcal{M}$ такава, че (характеристичната функция на) $B$ е изчислимо чрез $\mathcal{M}$, използувайки оракул (характеристичната функция на) $A$.

Неразличавайки множествата, които са сводими едно към друго, стигаме до понятието степен на неразрешимост, въведено за първи път от Emil Post в статията му [**26**] от 1944 г. Степените на неразрешимост образуват частично наредено множество, с изучаването на което се занимава Теорията на степените. В горе цитираната статия, Post забелязва, че до този момент в математиката са разглеждани единствено два типа рекурсивно номеруеми множества. Първият тип са рекурсивните множества – множествата, които са възможно най-прости (относно Тюринговата сводимост). Те са сводими към всяко друго множество. Другият тип са пълните рекурсивно номеруеми множества, т.е. рекурсивно номеруемите множества, към които е сводимо всяко друго рекурсивно номеруемо множество (такова, например, е множеството $K$). Поставеният от Post въпрос е дали съществува нерекурсивно рекурсивно номеруемо множество, което не е пълно? Този проблем поставя началото на изследванията в Теорията на степените.

Независимо един от друг, Friedberg [**5**] и Мучник [**1**] разработват метода на приеритета, с помощта на който успяват да дадат утвърдителен отговор на въпроса на Post.

Релативизирайки идеята, стояща зад пълното множество $K$, Kleene [**12**] успява да покаже, че за всяко множество $A$ може да се намери множество $A'$ (което ще наричаме скок на $A$) такова, че $A'$ е пълно рекурсивно номеруемо спрямо $A$. Не след дълго, Kleene и Post [**13**] показват, че ако множествата $A$ и $B$ са от една и съща Тюрингова степен, то същото е в сила и за скоковете им. По този начин можем да пренесем оператора скок и върху степени.

Основната цел на Теория на степените е изучаването на алгебрически структури, основани на сводимости между дадени обекти, възникнали като формален начин за класифицирането на изчислителната сила на тези обекти. След началния тласък даден от статиите на Post и Kleene, са въведени и изучавани множество степенни структури, измежду които тези на рекурсивно номеруемите степени ($\mathfrak{R}$), Тюринговите степени ($\mathfrak{D}_T$), номерационните степени

($\mathfrak{D}_e$), Медведевите степени ($\mathfrak{M}$), Мучниковите степени ($\mathfrak{M}_w$), $\omega$-номерационните степени ($\mathfrak{D}_\omega$).

Всяка структура от степени е породена от определена релация на сводимост между обекти от дадено фиксирано множество. Така, например, за по-горе споменатите степенни структури обектите са рекурсивно номеруемите множества в случая на $\mathfrak{R}$, подмножествата на $\omega$ в случая на $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_e$, множествата от (тотални) функции от $\omega$ в $\omega$ в случая на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_w$, и накрая, редиците от подмножества на $\omega$ в случая на $\mathfrak{D}_\omega$.

Нестрого, обектът $\alpha$ е сводим към обекта $\beta$, ако съществува алгоритъм преобразуващ дадена информация за $\beta$ в такава за $\alpha$. С други думи, в $\beta$ е кодирана информация за $\alpha$, която може да бъде алгоритмично разкодирана. Различните видове сводимости зависят не само от типа на обектите, но също така и от типа на преобразуваната информация. Допълнително, могат да се налагат и различни ограничения върху преобразуващия алгоритъм.

В случая на най-добре изучените сводимости – Тюринговата ($\leq_T$) и номерационната ($\leq_e$) – ограничения върху преобразуващия алгоритъм не се налагат. Разликата между двете сводимости е в типа на преобразуваната информация. В случая на Тюринговата сводимост преобразуваме характеристични функции, а при номерационната сводимост – номерации.

Както Тюринговата, така и номерационната сводимост е рефлексивна и транзитивна релация. Ето защо, и двете пораждат нетривиални релации на еквивалентност (съответно $\equiv_T$ и $\equiv_e$) по следния начин:

$$A \equiv B \iff A \leq B \ \& \ B \leq A.$$

Класовете на еквивалентност по $\equiv_T$ се наричат Тюрингови степени, а тези по $\equiv_e$ – номерационни степени. Преднаредбите $\leq_T$ и $\leq_e$ пораждат частични наредби в съответните множества от степени.

Не е непременно задължително, обаче, типа на входящата информация (т.е. информацията за множеството, към което се свежда) да съвпада с типа на изходящата информация (т.е. информацията за множеството, което свеждаме). Така, например, при сводимостта "рекурсивно номеруемо в" ($\leq_{r.e.}$), алгоритъмът трябва да преобразува характеристична функция в номерация. За разлика от Тюринговата и номерационната сводимости, релацията $\leq_{r.e.}$ е само рефлексивна и, следователно, не е преднаредба. По този начин, тя не може да породи степенна структура по описания по-горе метод. Оказва се, обаче, че можем да я използваме по един друг начин.

За всяка една сводимост $\leq_r$ над множество от обекти $\Omega$, да разгледаме релацията $\preceq_r$ също над $\Omega$, определена чрез:

$$\alpha \preceq_r \beta \iff (\forall \gamma \in \Omega)[\beta \leq_r \gamma \Rightarrow \alpha \leq_r \gamma].$$

Всъщност, релацията $\preceq_r$ сравнява обектите от $\Omega$ по отношение на "простотата" им спрямо сводимостта $\leq_r$: обектът $\alpha$ е по-прост от обекта $\beta$, ако $\alpha$ е сводим към всеки обект, към който е сводим и $\beta$ (казано иначе, ако всеки обект, кодиращ $\beta$, кодира и $\alpha$).

Ако разгледаме релациите $\preceq_T$ и $\preceq_e$, базирани съответно на Тюринговата и номерационна сводимости, то не бихме получили нещо ново – породената релация и в двата случая съвпада с първоначалната. Другояче стоят нещата при релацията "рекурсивно номеруемо в". Selman показва, че породената релация $\preceq_{r.e.}$ съвпада с преднаредбата $\leq_e$ на номерационната сводимост.

Ползувайки подобна идея можем да въведем релация между редици от множества от естествени числа. Действително, ако $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са две такива редици, да разгледаме релацията $\preceq_{*,\omega}$ дефинирана чрез

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \trianglelefteq_* X \Rightarrow \mathcal{A} \trianglelefteq_* X],$$

където $\trianglelefteq_*$ е дадена сводимост между редица от множества от естествени числа и множество от естествени числа. Казано иначе, спрямо сводимостта $\preceq_{*,\omega}$, всяка редица $\mathcal{A}$ се определя от класа $\mathcal{M}_*(\mathcal{A}) = \{X \subseteq \omega \mid \mathcal{A} \trianglelefteq_* X\}$:

$$\mathcal{A} \preceq_{*,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{M}_*(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_*(\mathcal{A}).$$

Разбира се, $\trianglelefteq_*$ не е преднаредба, най-малкото защото свежда обекти от различен тип. За разлика от нея, релацията $\preceq_{*,\omega}$ винаги е преднаредба. Ние ще се съсредоточим върху един специален клас от сводимости $\trianglelefteq_*$, изразяващи кодиране на редицата от множества в множеството, използуващо оператора за (Тюрингов) скок.

Наистина, нека редицата $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$ е сводима към множеството $X$ ($\mathcal{A} \trianglelefteq_* X$), ако за всяко $n$, $A_n$ е сводимо към $n$-тия Тюрингов скок на $X$ ($A_n \leq_* X^{(n)}$). Освен това изискваме свеждането да бъде равномерно, т.е. да съществува алгоритъм, с помощта на който по $n$ да разбираме кой алгоритъм да използуваме за да сведем $A_n$ към $X^{(n)}$.

Сега, ако изберем сводимостта $\leq_*$ да бъде някоя измежду релациите $\leq_{\Sigma^0_k}$, $k < \omega$, [1], то съответната преднаредба $\preceq_{*,\omega}$ поражда степенна структура, която се оказва горна полурешетка с най-малък елемент. В дисертацията вниманието е спряно върху релациите в случаите, когато $k$ е 0 и 1 (в тези случаи, $\leq_*$ съвпада съответно с $\leq_T$ и $\leq_{r.e.}$). Съответните породени степенни структури са означени с $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ и наричани структури на $\omega$-Тюринговите и $\omega$-номерационните степени.

[1]Релацията $\leq_{\Sigma^0_k}$ между множества от естествени числа е определена чрез:

$$A \leq_{\Sigma^0_k} B \iff A \in \Sigma^B_k.$$

Така, например, $A \leq_{\Sigma^0_0} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно в $B$ и $A \leq_{\Sigma^0_1} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно номеруемо в $B$.

С помощта на оператора $'$ за Тюрингов скок, можем да въведем оператори за скок и в структурите $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$. Оказва се, че за всяка редица $\mathcal{A}$ можем да намерим редица $\mathcal{A}'$ такава, че $\mathcal{M}_*(\mathcal{A}')$ се състои именно от Тюринговите скокове на множествата от $\mathcal{M}_*(\mathcal{A})$. В случая на разглежданите структури изображението $' : \mathcal{A} \longmapsto \mathcal{A}'$ е строго монотонно и запазващо наредбата и, следователно, може коректно да породи оператор скок и в съответната степенна структура.

Изследвайки сложността на дадена степенна структура, подходът ни може да има различни изражения. Едно такова изражение е чисто алгебрично изследване на степенната структура, което включва изучаването на проблеми за влагане и гъстота на структурата (или, обратно, наличие на минимални степени и минимални покрития). Друг ъгъл, под който може да бъде изследвана степенна структура, е да се анализира сложността на теорията ѝ. Този анализ включва определянето на разделящата линия (в термините на фрагменти от теорията) между разрешимостта и неразрешимостта, както и сравняването на теорията на структурата с други известни теории (в най-честия случай, с теорията на аритметиката от $n$-ти ред). Сложността на дадена степенна структура може да бъде описана и от твърдостта ѝ по отношение на автоморфизми (т.е. дали структурата притежава нетривиални автоморфизми). Друго изследване на сложността на структура може да бъде насочено към намирането на явно външни за структурата, но определими в езика ѝ, релации над степени[2]. Разбира се, всички тези подходи са взаимно свързани. Така, например, определимите класове от степени ограничават възможните автоморфизми на структурата.

Основната линия на нашите изследвания върху структурите $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ ще касае основно въпросите за определимост. Въпреки това, изследванията ни не се изчерпват с тази тема.

Главна роля в изследванията в теория на степените, касаещи въпроса за определимост, играе операторът за скок. Наистина, дори първите нетривиални резултати за определимост са свързани със структурата $\mathfrak{D}_T'$ на Тюринговите степени с добавен оператор за скок. Въпросът, дали самият оператор за (Тюрингов) скок е определим в термините на наредбата на Тюринговата сводимост, е повдигнат още в първата работа на Kleene и Post относно структурата $\mathfrak{D}_T$. Разрешаването на този въпрос се оказва съвсем нетривиална задача. В историята остават няколкото неуспешни опита на Cooper за даването на естествено определение на скока. Едва през 1999 г. Shore и Slaman **[33]** съумяват да установят определимостта

[2]Под това една $n$-мерна релация над степени да бъде определима в степенната структура имаме предвид, че съществува формула в езика на структурата, която е вярна точно върху $n$-орките от степени, които са в релацията.

на оператора $'$. Основна съставка в доказателството им е получената по-рано от Slaman и Woodin, [**34**], определимост на оператора $''$ за двоен скок. Тази определимост разчита на разработените в същата статия техники за кодиране на модели на аритметиката в Тюринговата степенна структура. Недостатък на тези кодиращи техники е, че от тях не може да се извлече естествена дефиниция. По-късно Shore [**32**] намира дефиниция на скока, неизползуваща кодиращите методи на Slaman и Woodin. Въпреки това, дефиницията остава сложна – намереното определение представлява $\Pi^0_8$ формула в езика на решетките. Все още остава нерешена задачата за намирането на сравнително просто естествено определение на Тюринговия скок.

Нещата стоят по друг начин в структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерацонните степени. Въпреки, че и в този случай са възможни подобни кодиращи техники, проблемът за определимостта на номерационния скок получава по-естествено решение. В [**10**] Калимулин въвежда понятието за $\mathcal{K}$-двойка като показва, че $\mathcal{K}$-двойките образуват нетривиален клас, който е определим с проста $\Pi^0_1$ формула в езика на решетките. Осланяйки се на свойствата на $\mathcal{K}$-двойите, Калимулин съумява явно да посочи формула (от първи ред), дефинираща оператора за номерационен скок.

Наред със структурата $\mathfrak{D}_T$, обект на изследвания в теория на степените стават и две нейни подструктури – $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ състояща се от Тюринговите степени, изчислими в Стоп-проблема, и $\mathfrak{R}$, състояща се от степените, съдържащи рекурсивно номеруемо множество. Разбира се, монотонността на оператора скок и фактът, че и двете структури имат най-голям елемент, а именно, степента на Стоп-проблема ($\mathbf{0}'_T$), показват, че $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ и $\mathfrak{R}$ не са затворени по отношение на оператора за скок. Обаче, с помощта на този оператор, можем да разгледаме едно разбиване на тези локални структури, което отразява близостта на степените до $\mathbf{0}_T$ и $\mathbf{0}'_T$ по отношение на оператора за скок. Действително, за всяко естествено число $n$, $n$-тия скок на една степен $\mathbf{a}$ (в $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ или $\mathfrak{R}$) винаги попада в интервала $[\mathbf{0}^{(n)}_T, \mathbf{0}^{(n+1)}_T]$. Ето защо, интересно е да разгедаме класът от степените, чиито $n$-ти скок е възможно най-малък:

$$\mathbf{L}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n)}_T\},$$

които ще наричаме $n$-ниски, както и класът от степените, чиито $n$-ти скок е възможно най-голям:

$$\mathbf{H}_n = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}^{(n+1)}_T\},$$

които ще наричаме $n$-високи. Класът на степените, които за никое $n$ не са нито $n$-ниски, нито $n$-високи ще бележим с $\mathbf{I}$, а самите степени ще наричаме междинни. Оказва се, че тази йерархия базирана на скока е неизродена[3]. Естествено възниква въпросът за определимостта на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$, $\mathbf{L}_n$ и $\mathbf{I}$ в локалните подструктури $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$ и $\mathfrak{R}$. Използувайки методи, кодиращи аритметиката в структурата $\mathfrak{R}$, Nies, Shore и Slaman [**21**] показват, че за всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1}$ и $\mathbf{H}_n$ са определими с формула от първи ред както в $\mathfrak{R}$, така и в $\mathfrak{D}_T(\leq \mathbf{0}'_T)$. Отново, тези методи не позволяват явното извличане на естествена дефиниция на определените класове. За класа на междинните степени е известно, че не е определим в нито една от двете локални подструктури.

Що се отнася за локалната подструктура $\mathfrak{D}_e(\leq \mathbf{0}'_e)$ на номерационните степени, отново класът $\mathbf{I}$ на междинните степени е неопределим. От останалите класове отговор на въпроса за определимостта си е намерил единствено $\mathbf{L}_1$. Именно, М. Соскова и Ганчев [**9**] намират естествено определение на горния клас, основано на понятието за $\mathcal{K}$-двойка.

Изобщо, бидейки една степенна структура горна полурешетка с най-малък елемент и допълнителен оператор за скок, интерес за изследвания представлява и нейната локална подструктура (т.е. подструктурата от степените, ограничени от скока на най-малкия елемент на структурата). Отново, могат да бъдат разгледани класовете от скок йерархията и съответните въпроси за тяхната определимост.

*Структура на дисертацията.* Глава 1 има уводен характер и има за цел да фиксира основните означения и понятия, както и да изложи необходимите при по-нататъшните ни разглеждания факти за Тюринговата и номерационна сводимости. Допълнително, в нея разглеждаме едно равномерно разширение на горните сводимости върху редици от множества от естествени числа, както и един общ подход в дефинирането на $\omega$-сводимости между редици от множества от естествени числа. Част от тази глава представлява литературен обзор на изследванията върху определимостта, касаещи структурите на Тюринговите и номерационните степени, както и техните локални подструктури.

Както бе уточнено по-рано, основна тема на разглежданията ни ще бъдат горните полурешетки $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ съответно на $\omega$-Тюринговите и $\omega$-номерационните степени, както и на техните локални подструктури. Изследванията ни в $\mathfrak{D}_\omega$ ще бъдат посветени главно на установяването на определимостта на първия скок на най-малкия елемент. Тази определимост ще се основава на направената в същата работа характеризация на пренесеното от номерационните степени понятие за $\mathcal{K}$-двойка. Установените свойства на $\mathcal{K}$-двойките ще ни позволят да пренесем част от наблюденията си и в локалната теория. В резултат на това явно ще построим формула от първи

[3]с други думи, за всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1} - \mathbf{L}_n$, $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n$ и $\mathbf{I}$ са непразни.

ред, определяща класа **I** на междинните степени. На изследванията ни върху $\omega$-номерационните степени е посветена изключително Глава 2.

В последната за дисертацията Глава 3, ще се съсредоточим върху структурата на $\omega$-Тюринговите степени. В началото ще въведем релация $\leq_{T,\omega}$ на сводимост между редици от множества и ще изследваме основните ѝ свойства. Основавайки се на тази релация ще въведем и горната полурешетка $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени. По-нататък, по прилика с $\omega$-номерационните степени, ще разгледаме оператор за скок в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Ще покажем една силна теорема за обръщане на скока, с чиято помощ е възможно да се въведе операция за обръщане на скока (нещо невъзможно в $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}_e$). Благодарение на тази операция ще покажем, че в структурата на $\omega$-Тюринговите степени със скок е определима с формула от първи ред структура, изоморфна на структурата на Тюринговите степени. Освен това, ще установим изоморфността между групата на автоморфизмите на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ и тази на автоморфизмите на $\mathfrak{D}_T$. Внимание ще отделим и на класа на *почти нулевите* степени – степени, отличаващи се от най-малкия елемент, единствено поради липсата на равномерност. Ще покажем, че те образуват подструктура, достатъчно богата за да вложи всяка изброима частична наредба. Специално място в изследванията ни ще заемат и минималните степени. Ще покажем, че съществуват изброимо много такива, като всичките са ограничени от първия скок на най-малкия елемент. Наличието на такива елементи показва, че разглежданата структура $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ не е елементарно еквивалентна нито на номерационните, нито на $\omega$-номерационните степени. Накрая, ще насочим вниманието си върху локалната теория на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Ще докажем няколко резултата за определимост, измежду които тази на класа на (образа на) Тюринговите степени, както и на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n, \mathbf{L}_n$ в скок йерархията.

*Благодарности.* Сърдечно благодаря на всички членове на катедра "Математическа логика и приложенията ѝ" към ФМИ на СУ за доброто отношение към мен. Изключително съм признателен на проф. Иван Сосков, който провокира в мен желанието да се занимавам с теория на рекурсията. Специална благодарност изказвам на научния си ръководител доц. Христо Ганчев, чиито другарски напътствия допринесоха за развитието на немалка част от вижданията ми.

София,
Януари 2015 г. Андрей К. Сариев

# Съдържание

Предговор ........ i

Глава 1. Тюрингови и номерационни степени ........ 1
1.1. Основни означения ........ 1
1.2. Тюрингови степени ........ 3
1.3. Номерационни степени ........ 4
1.4. Локални теории. Определимост ........ 6
1.5. Редици от множества. Равномерни сводимости ........ 11
1.6. $\omega$-$r$ степени ........ 13

Глава 2. $\omega$-Номерационни степени ........ 17
2.1. Дефиниция и основни свойства ........ 17
2.2. Операцията скок. Обръщане на скока ........ 19
2.3. $a.z.$ степени. Наследени степени ........ 22
2.4. $\mathcal{K}$-двойки ........ 27
2.5. Определимост на $\mathbf{0}'_\omega$ ........ 34
2.6. Локална теория. Степените $\mathbf{o}_n$ ........ 35
2.7. Определимост на скок класове в локалната теория ........ 38

Глава 3. $\omega$-Тюрингови степени ........ 42
3.1. Дефиниция и основни свойства ........ 43
3.2. Подструктурата $\mathfrak{D}_{T,1}$ ........ 46
3.3. Операторът скок ........ 48
3.4. Влагане на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ в $\mathfrak{D}_\omega$ ........ 51
3.5. Обръщане на скока ........ 53
3.6. Определимост на $\mathbf{D}_{T,1}$ в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ ........ 55
3.7. Автоморфизмите на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ ........ 57
3.8. $a.z.$ степени ........ 60
3.9. Минимални степени ........ 68
3.10. Локална теория ........ 71
3.11. Определимост на $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ в локалната теория ........ 76

Допълнение А. Дървета и минимални степени ........ 79

Заключение ........ 82
Публикации във връзка с дисертацията ........ 83
Декларация за оригиналност ........ 83

Библиография ........ 84

Глава 1

# Тюрингови и номерационни степени

В тази глава ще фиксираме основните означения, които ще използваме. Освен това ще припомним основните дефиниции и свойства на Тюринговите и номерационните степени. Ще предполагаме, че читателят е запознат с тези понятия, така че по-голямата част от твърденията няма да бъдат доказвани. За по-подробно запознаване с теорията на Тюринговите и номерационните степени препоръчваме [**27**], [**22**], [**23**], [**15**] и [**36**]. Раздел 1.4 представлява литературен обзор на темата за определимост в локалните теории на Тюринговите и номерационните степени. В следващия раздел 1.5 ще разгледаме две помощни сводимости, които са равномерни разширения съответно на Тюринговата и номерационната сводимост върху множеството от редици от множества от естествени числа. Стъпили на свойствата на равномерната номерационна сводимост, доказани в [**40**], ще покажем техни аналози в Тюринговия случай. Накрая, в раздел 1.6, ще разгледаме един общ подход за индуциране на сводимости между редици от множества от естествени числа и представянето им като подсводимости на Мучниковата такава.

## 1.1. Основни означения

По-нататък, когато изрично не е отбелязано друго, под множество ще разбираме множество от естествени числа. Когато $A$ е множество, с $\chi_A$ ще означаваме характеристичната функция на $A$, т.е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \notin A \\ 1, & \text{ако } x \in A \end{cases}.$$

Подмножествата на $\omega$ занапред ще отъждествяваме с техните характеристични функции. Ако $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$, то с $A \restriction n$ ще бележим множеството

$$A \restriction n = \{a \in A \mid a < n\}.$$

Ще предполагаме, че имаме фиксирана номерация на всички Тюрингови функционали. За всяко $i < \omega$, с $\Phi_i$ ще означаваме $i$-тия Тюрингов функционал в тази номерация. За всяко $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$, с $\Phi_i(A; n)$ ще означаваме стойността на $\Phi_i$ при даден оракул $A$ и аргумент $n$. За да отбележим, че изчислението на $\Phi_i$ при горния вход завършва, ще използваме означението $\Phi_i(A; n) \downarrow$. Ако пък това изчисление не завършва, ще пишем съответно $\Phi_i(A;n)\uparrow$. За удобство, ще се възползуваме от записа $\Phi_i(n)$ вместо $\Phi_i(\emptyset;n)$. В това, което следва, $\Phi_i(A)$ ще използуваме за да означаваме (евентуално) частичната функция, която върху аргумент $n$ е равна на $\Phi_i(A;n)$.

С $W_e^A$ ще означаваме множеството $W_e^A = \mathrm{dom}(\Phi_e(A))$. Ще казваме, че множеството $B$ е рекурсивно номеруемо (р.н.) в множеството $A$ и ще пишем $B \leq_{r.e.} A$, ако съществува индекс $e$ такъв, че $B = W_e^A$. Множествата рекурсивно номеруеми в $\emptyset$ ще наричаме рекурсивно номеруеми и ще означаваме с $W_e$ вместо с $W_e^{\emptyset}$.

Когато не е казано друго, с $D_u$ $(u \in \omega)$ ще означаваме крайното множество $D$, за което $u = \sum\limits_{y\in D} 2^y$. В такъв случай ще казваме, че $u$ е каноничен индекс на множеството $D$.

За произволни естествени числа $x$ и $y$ с $\langle x, y\rangle$ ще означаваме числото $2^x(2y+1)-1$, което ще наричаме код на наредената двойка $(x, y)$.

Ако $A$ и $B$ са множества с $A\oplus B$ ще означаваме множеството

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\},$$

с $A(B)$ ще означаваме множеството

$$A(B) = \{x \mid (\exists u)(\langle x, u\rangle \in A \,\&\, D_u \subseteq B)\},$$

а с $A^+$ ще означаваме множеството $A \oplus (\omega - A)$.

Ако не е казано друго, с главни латински букви (евентуално с индекси) ще означаваме множествата от естествени числа. С калиграфските букви $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ и т.н. ще означаваме изброимите редици от множества от естествени числа. Ще използуваме съответните печатни букви с индекси за да означаваме съответните координати на редицата. Така например, $n$-тата координата на редицата $\mathcal{A}$ ще означаваме с $A_n$ (винаги ще започваме от координата 0). С други думи $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_n \ldots)$.

С $\mathcal{S}_\omega$ ще означаваме множеството на всички редици (с дължина $\omega$). Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ са редици от множества от естествени числа. С $\mathcal{A}^+$ ще означаваме редицата $\mathcal{A}^+ = \{A_k^+\}_{k<\omega}$, а с $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ – редицата $\{A_k \oplus B_k\}_{k<\omega}$. По-нататък, ако $A \subseteq \omega$, то с $A \uparrow \omega$ ще означаваме редицата $(A, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots)$. Означението $\emptyset_\omega$ ще използуваме за редицата, всички елементи на която са равни на $\emptyset$,

$$\emptyset_\omega = (\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots).$$

Така $\emptyset_\omega = \emptyset \uparrow \omega$.

Ако $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq)$ е частично наредено множество и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}$, то с $\mathbf{a}|\mathbf{b}$ ще бележим факта, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са *несравними*, т.е. че $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$. Ако пък $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, то, както е прието, $\mathfrak{D}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ще означава частично нареденото множество $\{\mathbf{x} \in \mathbf{D} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ с индуцираната наредба от $\mathfrak{D}$. Аналогично се дефинират и интервалите $\mathfrak{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathfrak{D}[\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathfrak{D}(\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathfrak{D}(> \mathbf{a}, \infty)$ и $\mathfrak{D}[\mathbf{a}, \infty)$.

Крайните последователности от естествени числа (с други думи, елементите на $\omega^{<\omega}$) ще наричаме *низове*. Нека $\sigma, \tau \in \omega^{<\omega}$ са два низа. Ще казваме, че $\tau$ *разширява* $\sigma$ (и ще пишем $\sigma \subseteq \tau$), при положение, че за всяко $i < \omega$, ако $\sigma(i) \downarrow$, то $\tau(i) \downarrow$ като $\sigma(i) = \tau(i)$. Аналогично, при дадена $f : \omega \to \omega$, $f$ *разширява* $\sigma$ ($\sigma \subseteq f$), ако за всяко $i < \omega$, при положение, че $\sigma(i) \downarrow$, то $f(i) \downarrow$ като $\sigma(i) = f(i)$. Ще казваме, че $\sigma$ и $\tau$ са *несъвместими* (и ще пишем $\sigma|\tau$), ако нито $\sigma \subseteq \tau$, нито $\tau \subseteq \sigma$. $lh(\sigma) = |\{i < \omega \mid \sigma(i) \downarrow\}|$ ще означава *дължината* на низа $\sigma$. С $\sigma * \tau$ ще бележим *конкатенацията* на низовете $\sigma$ и $\tau$.

## 1.2. Тюрингови степени

Ще казваме, че множеството $A$ е Тюрингово сводимо към множеството $B$ и ще пишем $A \leq_T B$, ако съществува естествено число $e$ такова, че $A = \Phi_e(B)$. Релацията $\leq_T$ е транзитивна и рефлексивна. Означаваме

$$A \equiv_T B \iff A \leq_T B \,\&\, B \leq_T A.$$

Очевидно $\equiv_T$ е релация на еквивалентност.

Класовете на еквивалентност по релацията $\equiv_T$ ще наричаме Тюрингови степени. С $\deg_T(A)$ означаваме класа на еквивалентност, съдържащ множеството $A$. Съвкупността от всички Тюрингови степени означаваме с $\mathbf{D}_T$. В $\mathbf{D}_T$ въвеждаме релация $\leq$ на частична наредба:

$$\deg_T(A) \leq \deg_T(B) \iff A \leq_T B.$$

Частично нареденото множество $(\mathbf{D}_T, \leq_T)$ е горна полурешетка, т.е. всяко двуелементно множество $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ има точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$, като при това, ако $\mathbf{a} = \deg_T(A)$ и $\mathbf{b} = \deg_T(B)$, то

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \deg_T(A \oplus B).$$

Степента $\mathbf{0}_T = \deg_T(\emptyset)$ е най-малката от всички Тюрингови степени. Така $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee)$ е горна полурешетка с най-малък елемент, която по-нататък ще означаваме с $\mathfrak{D}_T$.

Нека $A \subseteq \omega$. Тюрингов скок на $A$ ще наричаме множеството

$$A'_T = \{x \mid x \in W_x^A\}.$$

$A'_T$ е р.н. в $A$ и всяко множество, което е р.н. в $A$ е Тюрингово сводимо към $A'_T$. Освен това скокът запазва равномерно Тюринговата сводимост, т.е. съществува рекурсивна функция $\mathfrak{j}_T$ такава, че за произволни множества $A$ и $B$, ако $A$ е Тюрингово сводимо към $B$ чрез Тюринговия функционал с индекс $i$, то $A'_T$ е Тюрингово сводимо към $B'_T$ чрез Тюринговия функционал с индекс $\mathfrak{j}_T(i)$.

Монотонността на Тюринговия скок позволява в $\mathbf{D}_T$ да се дефинира едноместна операция $'$, наречена скок, чрез правилото

$$\deg_T(A)' = \deg_T(A'_T).$$

Както е обичайно, с $\mathbf{a}^{(n)}$ и $A_T^{(n)}$ ще означаваме съответно $n$-тата итерация на операциите $'$ и $'_T$.

Структурата $(\mathbf{D}_T, \mathbf{0}_T, \leq, \vee, ')$ на Тюринговите степени с добавена операция скок ще означаваме с $\mathfrak{D}_T{}'$.

Следващата Лема събира два резултата за равномерност, които ще ни послужат по-късно.

**Лема 1.2.1.** *Съществуват рекурсивни функции $\mathfrak{j}_T$ и $f_\oplus$ такива, че*

- $A = \Phi_a(X) \Rightarrow A'_T = \Phi_{\mathfrak{j}_T(a)}(X'_T)$;
- $A = \Phi_a(X), B = \Phi_b(X) \Rightarrow A \oplus B = \Phi_{f_\oplus(a,b)}(X)$.

Friedberg доказва, че областта от стойностите на операцията скок е точно конусът над първия скок $\mathbf{0}'_T$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_T$. По-нататък ще използваме по-общия факт, че ако $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{D}_T$ и $n < \omega$ са такива, че $\mathbf{c}^{(n)} \leq \mathbf{b}$, то

$$(\exists \mathbf{a})[\mathbf{c} \leq \mathbf{a} \ \& \ \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{a} \vee \mathbf{c}^{(n)} = \mathbf{b}].$$

Доказателство на горния факт може да бъде намерено в [**36**].

## 1.3. Номерационни степени

Нека $A, B \subseteq \omega$. Ще казваме, че $A$ е номерационно сводимо към $B$ и ще пишем $A \leq_e B$, ако съществува рекурсивно номеруемо множество $W$ такова, че $A = W(B)$.

Преди да дефинираме номерационните степени, ще формулираме един резултат за равномерност, който ще ни послужи и по-нататък.

**Лема 1.3.1.** *Съществуват константи $\mathfrak{jl}, \mathfrak{jr}, \mathfrak{jt}, \mathfrak{tj}, \mathfrak{id}$ и рекурсивни функции $\mathfrak{c}, \mathfrak{jn}$ такива, че за всеки $i, j < \omega$ и $A, B \subseteq \omega$:*

- $A = W_{\mathfrak{id}}(A)$;
- $A = W_{\mathfrak{jl}}(A \oplus B)$;
- $B = W_{\mathfrak{jr}}(A \oplus B)$;
- $W_{\mathfrak{c}(i,j)}(A) = W_i(W_j(A))$;
- $W_{\mathfrak{jn}(i,j)}(A) = W_i(A) \oplus W_j(A)$;
- $A^+ \oplus B^+ = W_{\mathfrak{jt}}((A \oplus B)^+)$;
- $(A \oplus B)^+ = W_{\mathfrak{tj}}(A^+ \oplus B^+)$.

Релацията $\leq_e$ е рефлексивна и транзитивна, възоснова на което можем да въведем следната релация на еквивалентност:

$$A \equiv_e B \iff A \leq_e B \ \& \ B \leq_e A.$$

Класовете на еквивалентност по релацията $\equiv_e$ наричаме номерационни степени. С $\deg_e(A)$ ще означаваме класа на еквивалентност съдържащ $A$. Съвкупността от всички номерационни степени означаваме с $\mathbf{D}_e$. Релацията $\leq_e$ поражда релация на частична наредба $\leq$ в $\mathbf{D}_e$:

$$\deg_e(A) \leq \deg_e(B) \iff A \leq_e B.$$

Понеже за всяко $A \subseteq \omega$, $\emptyset \leq_e A$, то $\deg_e(\emptyset)$ е най-малкият елемент на частично нареденото множество $(\mathbf{D}_e, \leq)$. Този най-малък елемент ще означаваме с $\mathbf{0}_e$.

Както и при Тюринговите степени, степента $\deg_e(A \oplus B)$ е точна горна граница на множеството $\{\deg_e(A), \deg_e(B)\}$, т.е.

$$\deg_e(A \oplus B) = \deg_e(A) \vee \deg_e(B).$$

Така $(\mathbf{D}_e, \mathbf{0}_e, \leq, \vee)$ е горна полурешетка с най-малък елемент, която оттук нататък ще означаваме с $\mathfrak{D}_e$.

Myhill [**20**] показва, че полурешетката на Тюринговите степени се влага в тази на номерационните посредством влагането $\iota : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_e$, зададено с

$$\iota(\deg_T(A)) = \deg_e(A^+).$$

Връзката между Тюринговата и номерационната сводимости се дава с

$$A \leq_T B \iff A^+ \leq_e B^+. \tag{1.3.1}$$

Нещо повече, горната еквивалентност е равномерна по $A$ и $B$, т.е. съществуват рекурсивни функции $f_{T \to e}$ и $f_{e \to T}$ такива, че за всеки две множества $A$ и $B$,

- ако $A$ е Тюрингово сводимо към $B$ чрез Тюринговия функционал с индекс $i$, то $A^+$ е номерационно сводимо към $B^+$ чрез рекурсивно номеруемото множество с индекс $f_{T \to e}(i)$;
- ако $A^+$ е номерационно сводимо към $B^+$ чрез рекурсивно номеруемото множество с индекс $i$, то е $A$ Тюрингово сводимо към $B$ чрез Тюринговия функционал с индекс $f_{e \to T}(i)$.

Понеже за всяко множество $A$, $(A^+)^+ \equiv_e A^+$ (при това равномерно по $A$), то от дефиницията на $\iota$ получаваме, че

$$\mathrm{rng}(\iota) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_e \mid (\exists A \in \mathbf{a})[A \equiv_e A^+]\}.$$

Множества, за които $A \equiv_e A^+$, наричаме тотални. Съответно, една номерационна степен е тотална, ако съдържа тотално множество. Така, областта от стойностите на $\iota$ са точно тоталните номерационни степени.

Не всички номерационни степени са тотални. Оказва се, че всяка номерационна степен е точна долна граница на две нетотални степени и, следователно, съществуват континуум много нетотални степени.

Както и в полурешетката на Тюринговите степени, така и в тази на номерационните се въвежда едноместна операция скок. За целта първо въвеждаме номерационен скок на множество, който означаваме с ${}'_e$:

$$A'_e = L_A \oplus \overline{L_A},$$

където за всяко множество $A \subseteq \omega$ с $L_A$ означаваме съответно множеството

$$L_A = \{\langle x, i\rangle \mid x \in W_i(A)\}.$$

Всяко множество $A$ е винаги строго под скока си $A'_e$, $A \lneq_e A'_e$. От горната дефиниция е ясно и, че скокът винаги е тотално множество. Номерационният скок запазва равномерно номерационната сводимост, т.е. съществува рекурсивна функция $\mathfrak{j}_e$ такава, че за произволни множества $A$ и $B$, ако $A$ е номерационно сводимо към $B$ чрез рекурсивно номеруемото множество с индекс $i$, то $A'_e$ е номерационно сводимо към $B'_e$ чрез рекурсивно номеруемото множество с индекс $\mathfrak{j}_e(i)$.

Връзката между Тюринговия и номерационния скок се изразява с еквивалентностите

$$(A'_T)^+ \equiv_e (A^+)'_e \quad \text{и } A'_T \equiv_T (A^+)'_e. \tag{1.3.2}$$

Отново тези еквивалентности са равномерни по $A$, т.е. Тюринговите функционали и рекурсивно номеруемите множества, реализиращи свежданията са едни и същи за всеки избор на $A$. Горните свойства са доказани в **[3, 17]**.

Монотонността на скока ни дава право да въведем операцията скок на номерационна степен $'$:

$$\deg_e(A)' = \deg_e(A'_e).$$

Структурата $(\mathbf{D}_e, \mathbf{0}_e, \leq, \vee, ')$ ще означаваме с $\mathfrak{D}'_e$.

От (1.3.2) следва, че влагането $\iota$ запазва операцията скок, $\iota(\mathbf{a}') = \iota(\mathbf{a})'$. Това ни дава право да считаме, че $\mathfrak{D}'_T$ е подструктура на $\mathfrak{D}'_e$. По-нататък с ${}_e^{(n)}$ и ${}^{(n)}$, за $n < \omega$ ще означаваме $n$-тата итерация съответно на ${}'_e$ и $'$.

Следващото твърдение, чието доказателство може да бъде намерено в **[3, 17]**, усилва някои от по-горе споменатите резултати.

**Лема 1.3.2.** *Съществуват рекурсивни функции $\mathfrak{j}_e$,$\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{q}$ такива, че за всяко $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$,*

- $(W_i(A))_e^{(n)} = W_{\mathfrak{j}_e(i)}(A_e^{(n)})$;
- $(A_T^{(n)})^+ = W_{\mathfrak{p}(n)}((A^+)_e^n)$ *и* $(A^+)_e^n = W_{\mathfrak{q}(n)}((A_T^{(n)})^+)$.

## 1.4. Локални теории. Определимост

Ще започнем този раздел с няколко означения. При дадена степенна структура, снабдена с оператор скок, обикновено, структурата на степените, лежащи под първия скок на най-малкия елемент, наричаме локална подструктура. В случая на Тюринговите степени, с $\mathbf{G}_T$ ще означаваме множеството $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_T\}$, а с $\mathfrak{G}_T$ – локалната подструктура, т.е. структурата $(\mathbf{G}_T, \leq)$ с наредба, породена от $\mathfrak{D}_T$. Особен интерес представлява и една друга подструктура, а именно тази на рекурсивно номеруемите степени[1]. По-нататък тази подструктура ще бъде означавана с $\mathfrak{R}$. От свойствата на рекурсивно номеруемите множества е ясно, че $\mathfrak{R}$ е подструктура на локалната подструктура $\mathfrak{G}_T$. При номерационните степени, локалната подструктура ще означаваме с $\mathfrak{G}_e$. Така $\mathfrak{G}_e$ е структурата $(\mathbf{G}_e, \leq)$, където $\mathbf{G}_e$ е множеството $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{0}_e'\}$, а наредбата е индуцирана от $\mathfrak{D}_e$.

Нека $r$ бъде която и да от сводимостите $T$ и $e$. Тогава, както е прието, за всяко $n < \omega$ ще означаваме с:

- $\mathbf{L}_n$ класът от степените $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}_r'$, чиито $n$-ти скок е възможно най-нисък, т.е. $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_r^{(n)}$. Такива степени ще наричаме $n$-ниски.
- $\mathbf{H}_n$ класът от степените $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}_r'$, чиито $n$-ти скок е възможно най-висок, т.е. $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_r^{(n+1)}$. Такива степени ще наричаме $n$-високи.

С $\mathbf{L}$ ще означаваме съвкупността от всички степени, които за някое естествено число $n$, са $n$-ниски, т.е. $\mathbf{L} = \bigcup \mathbf{L}_n$. Аналогично, $\mathbf{H}$ ще означава класа на всички степени, които за някое естествено число $n$, са $n$-високи, т.е. $\mathbf{H} = \bigcup \mathbf{H}_n$. Накрая, ще използуваме означението $\mathbf{I}$ за класа на всики степени в съответната локална подструктура $\mathfrak{G}_r$ (т.е. под $\mathbf{0}_r'$), които за никое $n$ не са нито $n$-ниски, нито $n$-високи. С други думи,

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_r - (\mathbf{H} \cup \mathbf{L}).$$

Елементите на класа $\mathbf{I}$ ще наричаме *междинни* степени. Да отбележим, че горните дефиниции се пренасят директно и за подструктурата $\mathfrak{R}$, като разбира се, трябва да ограничим разглежданията си само върху рекурсивно номеруемите степени.

Sacks, Lachlan и Martin показват, че в структурата $\mathfrak{R}$, за всяко естествено число $n$, множествата $\mathbf{L}_{n+1} - \mathbf{L}_n$ и $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n$, както и множеството $\mathbf{I}$ на междинните степени, са непразни. Тъй като рекурсивно номеруемите степени образуват подструктура на Тюринговите степени, то последното е вярно и в $\mathfrak{D}_T$.

Една от главните насоки в изследванията в Теория на изчислимостта обхваща проблемите за определимост в степенни структури. Разглеждайки дадена степенна структура $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq, \mathbf{0}, \vee, ')$, възникват естествени въпроси относно определимостта в езика, съдържащ единствено предикатния символ $\leq$, на класове от степени, определени първично в термините на структурния оператор скок, $'$. Същите въпроси за определимост могат да бъдат пренесени и

[1]Една Тюрингова степен ще наричаме рекурсивно номеруема (р.н.), ако съдържа рекурсивно номеруемо множество. Да забележим, че не е задължително всички елементи на една р.н. степен да бъдат р.н. множества.

към съответните ѝ локални подструктури. Като интересен специален случай, може да се разгледа въпросът за определянето на онези естествени числа $n$, за които класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, състоящи се съответно от $n$-високите и $n$-ниските степени, са определими с формула от първи ред в езика на дадената структура. В този раздел ще спрем вниманието си изключително върху структурите на Тюринговите и номерационните степени, както и на локалните им подструктури.

Както показват Shore и Slaman [**33**], Тюринговият скок е определим с формула от първи ред в структурата на Тюринговите степени, $\mathfrak{D}_T$, така че за всяко естествено число $n$, класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ са определими в $\mathfrak{D}_T$. Що се отнася до локалната подструктура $\mathfrak{G}_T$, състояща се от Тюринговите степени под първия скок $\mathbf{0}'_T$ на най-малкия елемент, и до подструктурата $\mathfrak{R}$ на всички рекурсивно номеруеми Тюрингови степени, частичен отговор дават Nies, Shore и Slaman. Именно, в [**21**] те показват, че за всяко естествено число $n$, класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_{n+1}$ са определими с формула от първи ред. Въпросите за определимостта на класа $\mathbf{L}_1$, съответно в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{G}_T$, продължават да бъдат отворени.

В случая на структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени, Калимулин [**10**] показва, че номерационния скок е определим от първи ред, така че всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ също е определим с формула от първи ред в $\mathfrak{D}_e$. Пренасяйки се в локалната подструктура $\mathfrak{G}_e$ на степените под първия скок $\mathbf{0}'_e$ на най-малкия елемент, от неотдавнъшен резултат на Ганчев и М. Соскова, [**9**], е известно, че класът $\mathbf{L}_1$ е определим. Въпросите за определимостта на $\mathbf{H}_1$, както и на класовете на $n$-виските и $n$-ниските степени за $n \geq 2$, все още устояват на всички опити да бъдат разрешени.

По-нататък, могат да бъдат разгледани проблемите, касаещи определимостта от първи ред на скок класовете $\mathbf{H} = \bigcup \mathbf{H}_n$ на всички степени, които за някое $n < \omega$ са $n$-високи, и $\mathbf{L} = \bigcup \mathbf{L}_n$ на всички степени, които за някое $n < \omega$ са $n$-ниски, както и класът $\mathbf{I}$ на междинните степени. В структурата $\mathfrak{D}_T$ е известно, че класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$ са определими. Това произтича от факта, че всяка релация върху $\mathfrak{D}_T$ е определима от първи ред в $\mathfrak{D}_T$ точно тогава, когато тя е инвариантна относно автоморфизмите на $\mathfrak{D}_T$ и е породена от степенно инвариантна релация над $2^\omega$, която е определима в Аритметиката от втори ред, виж [**34**]. Наистина, ясно е, че всеки един от горе споменатите класове е инвариантен относно автоморфизми. Не е трудно да се провери, че за всяка Тюрингова степен $\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} \in \mathbf{I} \iff \{\mathbf{0}_T^{(n)} \mid n < \omega\} \cap \{\mathbf{a}^{(n)} \mid n < \omega\} = \emptyset.$$

Сега за да получим, че $\mathbf{I}$ е породено от определима в Аритметиката от втори ред релация, е достатъчно да забележим, че скокът е определим в $\mathfrak{D}_T$ и, следователно, също е породен от определима в

Аритметиката от втори ред релация. За определимостта на класа $\mathbf{L}$, а следователно и на $\mathbf{H}$, е достатъчно да забележим, че за всяка Тюрингова степен $\mathbf{a}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \in \mathbf{L} \iff & (\exists \mathbf{x} \in \{\mathbf{0}_T^{(n)} \mid n < \omega\} \cap \{\mathbf{a}^{(n)} \mid n < \omega\})(\exists f) \\ & [f \text{ е биекция между } \{\mathbf{0}_T^{(n)} \mid \mathbf{0}_T^{(n)} \leq \mathbf{x} \,\&\, n < \omega\} \text{ и} \\ & \{\mathbf{a}^{(n)} \mid \mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{x} \,\&\, n < \omega\}].\end{aligned}$$

Аналогична обосновка може да се приложи и за структурата $\mathfrak{D}_e$, [**42**].

Какво е положението в локалните подструктури? В случая на структурата на рекурсивно номеруемите степени $\mathfrak{R}$, следвайки Nies, Shore и Slaman [**21**], всяка релация над р.н. степени, инвариантна относно двоен скок, е определима в $\mathfrak{R}$ точно тогава, когато съответната ѝ релация върху индексите на р.н. множествата е определима в Аритметиката от първи ред. Казвайки, че една $n$-арна релация $P(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ над $\mathfrak{R}$ е инвариантна относно двойния скок ще имаме предвид, че винаги когато

$$\mathfrak{R} \models P(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$$

и $\mathbf{x}_1'' = \mathbf{y}_1'', \ldots, \mathbf{x}_n'' = \mathbf{y}_n''$, то също е вярно и, че

$$\mathfrak{R} \models P(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n).$$

Сега, възползувайки се от един резултат на Solovay (виж в [**36**]), гласящ, че множеството от индексите на междинните р.н. множества е $\Pi^0_{\omega+1}$-пълно, както и, че множествата от индексите на р.н. множествата, чиито степени са съответно в класовете $\mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ са $\Sigma^0_{\omega+1}$-пълни, можем да заключим, че $\mathbf{I}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ не могат да бъдат определени в Аритметиката от първи ред. Следователно, те не са определими и в структурата $\mathfrak{R}$. От тази точка можем да заключим и, че класовете $\mathbf{I}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ не са определими и в $\mathfrak{G}_T$. Действително, отново според работата [**21**] на Nies, Shore и Slaman, всяка релация върху Тюринговите степени под $\mathbf{0}_T'$, инвариантна относно двойния скок, е определима с формула от първи ред в $\mathfrak{G}_T$ точно тогава, когато е определима в Аритметиката от първи ред[2]. Да забележим първо, че условието една Тюрингова степен под $\mathbf{0}_T'$ да бъде рекурсивно номеруема е определимо в Аритметиката от първи ред. Наистина, достатъчно е да покажем това за множеството

$$R = \{\langle x, e\rangle \mid W_x = \Phi_e(\emptyset')\}.$$

[2]По-нататък, под това една релация над $\mathbf{G}_T$ да бъде определима в Аритметиката от първи ред, ще имаме предвид, че съответната релация над индексите на Тюринговите функционали е определима в Аритметиката от първи ред.

Имаме, че $\langle x, e\rangle \in R \iff$

$$\underbrace{\Phi_e(\emptyset') \text{ е тотална}}_{\Pi_2^{\emptyset'}} \ \& \\ (\forall y)[[\underbrace{y \in W_x}_{\Sigma_1^0} \ \& \ \underbrace{\Phi_e(\emptyset'; y) = 1}_{\Sigma_2^0}] \vee [\underbrace{y \notin W_x}_{\Pi_1^0} \ \& \ \underbrace{\Phi_e(\emptyset'; y) = 0}_{\Sigma_2^0}]],$$

като за последното не е трудно да се види, че представлява $\Pi_3^0$ формула, в частност такава, определима в Аритметиката от първи ред. Възползувайки се от предходната забележка, можем да заключим, че нито един от класовете $\mathbf{I}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ (в $\mathfrak{G}_T$) не е определим в Аритметиката от първи ред. В противен случай, т.е. ако имаше такъв, то добавяйки към неговото определение и условието да бъдеш р.н., ще получим определение в Аритметиката от първи ред на множеството от индексите на р.н. множествата, чиито Тюрингови степени са в съответния определим клас от $\mathbf{I}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$, което би противоречало на по-горните резултати за неопределимост. Така, че отново $\mathbf{I}, \mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ не са определими в $\mathfrak{G}_T$.

Накрая, да се спрем и върху локалната подструктура $\mathfrak{G}_e$ на номерационните степени. В тази подструктура отново имаме характеризация на определимите релации подобна на тази в Тюринговия случай. Оказва се, че проблемът за определимост на скок класовете може лесно да се сведе до този за тяхната определимост в $\mathfrak{G}_T$. Наистина, да забележим първо, че ограничението $\iota \restriction \mathbf{G}_T$ на стандартното влагане $\iota$ на Тюринговите в номерационните степени до степените под $\mathbf{0}'_T$, е определимо в Аритметиката от първи ред. Действително, достатъчно е да покажем аритметичността на множеството

$$R = \{\langle i, e\rangle \mid \Phi_i(\emptyset'_T)^+ = W_e(\emptyset'_e)\}.$$

Имаме, че $\langle i, e\rangle \in R \iff$

$$\underbrace{\Phi_i(\emptyset'_T) \text{ е тотална}}_{\Pi_2^{\emptyset'_T}} \ \& \ (\forall y)[ \\ [2y \in W_e(\emptyset'_e) \ \& \ \underbrace{\Phi_i(\emptyset'_T; y) = 1}_{\Sigma_2^0}] \vee [2y+1 \in W_e(\emptyset'_e) \ \& \ \underbrace{\Phi_i(\emptyset'_T; y) = 0}_{\Sigma_2^0}]].$$

Да отбележим, че за всяко множество $A \subseteq \omega$,

$$x \in W_e(A) \iff (\exists u)[\underbrace{\langle x, u\rangle \in W_e}_{\Sigma_1^0} \ \& \ \underbrace{D_u \subseteq A}_{\Sigma_0^A}].$$

В нашия случай, понеже $\emptyset'_e$ е $\Sigma_2^0$ множество, то не е трудно да се забележи, че $\langle i, e\rangle \in R$ е еквивалентно на $\Pi_3^0$ формула, в частност $R$ е определимо в Аритметикта от първи ред.

След това, понеже $\mathfrak{G}_T$ е изоморфно на структурата на тоталните номерационни степени под $\mathbf{0}'_e$, а последните са определими в $\mathfrak{G}_e$, [**9**], то, предполагайки определимостта в $\mathfrak{G}_e$ на някой от класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ или $\mathbf{I}$, бихме получили определимостта му в Аритметиката от първи ред. Така, добавяйки и определението за тоталност, ще получим, че съответния клас, определим в $\mathfrak{G}_e$, ще бъде определим и в $\mathfrak{G}_T$.

Една от основните линии в тази работа ще бъде изследването на определимостта на скок класовете в локалните теории на структурите $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ и $\mathfrak{D}_\omega$ съответно на $\omega$-Тюринговите и $\omega$-номерационните степени.

## 1.5. Редици от множества. Равномерни сводимости

В този раздел ще дефинираме равномерната Тюрингова ($\leq_T$) и равномерната номерационна ($\leq_e$) сводимости между елементите на $\mathcal{S}_\omega$. Тъй като много от дефинициите и свойствата на последно споменатите сводимости са изключително сходни, то с цел опростявана на изложението, до края на този раздел $r$ ще бъде измежду сводимостите $T$ и $e$.

**Определение 1.5.1.** *Нека $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Дефинираме $r$-скок редица $\mathcal{P}^r(\mathcal{B}) = \{P^r_k(\mathcal{B})\}_{k<\omega}$ на редицата $\mathcal{B}$ с индукция по $k < \omega$:*

- $P^r_0(\mathcal{B}) = B_0$;
- $P^r_{k+1}(\mathcal{B}) = P^r_k(\mathcal{B})'_r \oplus B_{k+1}$.

Тук с $X'_r$ сме означили $r$-скока на множеството $X$.

**Определение 1.5.2.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ са редици от множества от естествени числа. Ще казваме, че $\mathcal{A}$ е $r$-сводима към $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \leq_r \mathcal{B}$, ако $A_k \leq_r B_k$ равномерно по $k$.*

От Лема 1.3.1 следва, че $\leq_r$ е рефлексивна и транзитивна релация. С $\equiv_r$ ще означаваме следната релация на еквивалентност:

$$\mathcal{A} \equiv_r \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_r \mathcal{B} \ \& \ \mathcal{B} \leq_r \mathcal{A}.$$

От Лема 1.2.1 и Лема 1.3.1 лесно получаваме:

**Лема 1.5.3.** *За всеки $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ са в сила:*

(1) $\mathcal{A} \leq_r \mathcal{P}^r(\mathcal{A})$;
(2) $\mathcal{P}^r(\mathcal{P}^r(\mathcal{A})) \leq_r \mathcal{P}^r(\mathcal{A})$;
(3) $\mathcal{A} \leq_r \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{P}^r(\mathcal{A}) \leq_r \mathcal{P}^r(\mathcal{B})$.

Връзката между Тюринговата и номерационните скок редици се дава от следващата Лема.

**Лема 1.5.4.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Тогава*

$$\mathcal{P}^T(\mathcal{A})^+ \equiv_e \mathcal{P}^e(\mathcal{A}^+).$$

*Доказателство.* В сила е, че ако $P_k^T(\mathcal{A})^+ \equiv_e P_k^e(\mathcal{A}^+)$, то

$$P_{k+1}^T(\mathcal{A})^+ = (P_k^T(\mathcal{A})'_T \oplus A_{k+1})^+ \equiv_e (P_k^T(\mathcal{A})'_T)^+ \oplus A_{k+1}^+ \equiv_e$$
$$\equiv_e (P_k^T(\mathcal{A})^+)'_e \oplus A_{k+1}^+ \equiv_e (P_k^e(\mathcal{A}^+))'_e \oplus A_{k+1}^+ = P_{k+1}^e(\mathcal{A}^+).$$

При това, според Лема 1.3.1 и Лема 1.3.2, всяка една от горните еквивалентности е равномерна.

За формалното доказателство на твърдението, да разгледаме функциите $f_1$ и $f_2$ дефинирани по следния начин:

$$f_1(0) = \mathfrak{id},\ f_1(k+1) = \mathfrak{c}(\mathfrak{jn}(\mathfrak{c}(\mathfrak{c}(\mathfrak{j}_e(f_1(k)), \mathfrak{q}(1)), \mathfrak{jl}), \mathfrak{jr}), \mathfrak{jt}),$$

$$f_2(0) = \mathfrak{id},\ f_2(k+1) = \mathfrak{c}(\mathfrak{tj}, \mathfrak{jn}(\mathfrak{c}(\mathfrak{c}(\mathfrak{p}(1), f_2(k)), \mathfrak{jl}), \mathfrak{jr})),$$

където $\mathfrak{jl}, \mathfrak{jr}, \mathfrak{jt}, \mathfrak{tj}, \mathfrak{id}$ и $\mathfrak{c}, \mathfrak{jn}, \mathfrak{j}_e, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ са съответно константите и рекурсивните функции, описани в Лема 1.3.1 и Лема 1.3.2. Тогава функциите $f_1$ и $f_2$ са рекурсивни. Използувайки индукция, можем лесно да докажем, че за всяко $k < \omega$, $P_k^e(\mathcal{A}^+) = W_{f_1(k)}(P_k^T(\mathcal{A})^+)$ и $P_k^T(\mathcal{A})^+ = W_{f_2(k)}(P_k^e(\mathcal{A}^+))$. Следователно, $\mathcal{P}^T(\mathcal{A})^+ \equiv_e \mathcal{P}^e(\mathcal{A}^+)$. ■

По-нататък, за характеризацията на $\omega$-номерационните степени, ще ни бъде необходима следващата Теорема, доказана от Сосков и Ковачев, [**40**].

**Теорема 1.5.5.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ са такива, че $\mathcal{A} \not\leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B})$. Тогава съществува тотално множество $F$ такова, че*

$$\mathcal{B} \leq_e \{(F)_e^{(k)}\}_{k<\omega} \text{ и } \mathcal{A} \not\leq_e \{(F)_e^{(k)}\}_{k<\omega}.$$

Ще ни бъде от полза и следното естествено обобщение на предишната теорема.

**Теорема 1.5.6.** *Нека $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$ са редици от множества от естествени числа такива, че за всяко $n \in \omega$, $\mathcal{A}_n \not\leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B})$. Тогава съществува тотално множество $F$ такова, че $\mathcal{B} \leq_e \{(F)_e^{(k)}\}_{k<\omega}$ и за всяко $n \in \omega$, $\mathcal{A}_n \not\leq_e \{(F)_e^{(k)}\}_{k<\omega}$.*

В останалата част на този раздел ще покажем връзка между равномерните Тюрингова и номерационна сводимости. В резултат на това ще установим аналог на горните две теореми в Тюринговия случай. За целта се нуждаем от следната помощна Лема.

**Лема 1.5.7.** *Нека $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Тогава*

$$\mathcal{B} \leq_T \{X_T^{(k)}\}_{k<\omega} \iff \mathcal{P}^T(\mathcal{B}) \leq_T \{X_T^{(k)}\}_{k<\omega}.$$

*Доказателство.* Нека $\mathcal{B} \leq_T \{X_T^{(k)}\}_{k<\omega}$. Тогава съществува рекурсивна функция $g$ такава, че за всяко $k$, $B_k = \Phi_{g(k)}(X_T^{(k)})$. Нека $\mathfrak{j}_T$ и $f_\oplus$ са функциите от Лема 1.2.1. Дефинираме функцията $h$ по следния начин:

$$h(0) = g(0),\ h(k+1) = f_\oplus(\mathfrak{j}_T(h(k)), g(k+1)).$$

Очевидно $h$ е рекурсивна. Освен това за всяко $k < \omega$, $P^T_k(\mathcal{B}) = \Phi_{f(k)}(X^{(k)}_T)$, т.е. $\mathcal{P}^T(\mathcal{B}) \leq_T \{X^{(k)}_T\}_{k<\omega}$.

Нека $\mathcal{P}^T(\mathcal{B}) \leq_T \{X^{(k)}_T\}_{k<\omega}$. От Лема 1.5.3 имаме, че $\mathcal{B} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Сега твърдението следва от транзитивността на $\leq_T$. ■

**Теорема 1.5.8.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ са редици от множества от естествени числа. Тогава:*

$$\mathcal{A} \leq_T \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^+ \leq_e \mathcal{B}^+.$$

*Доказателство.* Нека $\mathcal{A} \leq_T \mathcal{B}$. Тогава съществува рекурсивна функция $g$ такава, че за всяко $k$, $A_k = \Phi_{g(k)}(B_k)$. От (1.3.1) имаме, че за всяко $k$, $A^+_k = W_{f_{T\to e}(g(k))}(B^+_k)$. Следователно $\mathcal{A}^+ \leq_e \mathcal{B}^+$.

Обратно, нека $\mathcal{A}^+ \leq_e \mathcal{B}^+$. Тогава съществува рекурсивна функция $h$ такава, че за всяко $k$, $A^+_k = W_{h(k)}(B^+_k)$. Пак от (1.3.1) имаме, че за всяко $k$, $A_k = \Phi_{f_{e\to T}(g(k))}(B_k)$, т.е. $\mathcal{A} \leq_T \mathcal{B}$. ■

Като резултат от това твърдение получаваме:

**Теорема 1.5.9.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ са такива, че $\mathcal{A} \not\leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Тогава съществува $F \subseteq \omega$ такова, че $\mathcal{B} \leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{A} \not\leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega}$.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{A} \not\leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Тогава от Теорема 1.5.8 следва, че $\mathcal{A}^+ \not\leq_e (\mathcal{P}^T(\mathcal{B}))^+$. Но от Лема 1.5.4 имаме, че $(\mathcal{P}^T(\mathcal{B}))^+ \equiv_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B}^+)$. Следователно $\mathcal{A}^+ \not\leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B}^+)$. Тогава според Теорема 1.5.5 следва, че съществува множество $F$ такова, че

$$\mathcal{B}^+ \leq_e \{(F^+)^{(k)}_e\}_{k<\omega} \text{ и } \mathcal{A}^+ \not\leq_e \{(F^+)^{(k)}_e\}_{k<\omega}.$$

От Лема 1.3.2 следва, че $\mathcal{B}^+ \leq_e \{(F^{(k)}_T)^+\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{A}^+ \not\leq_e \{(F^{(k)}_T)^+\}_{k<\omega}$. Накрая, от Теорема 1.5.8, получаваме

$$\mathcal{B} \leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega} \text{ и } \mathcal{A} \not\leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega}.$$

■

По аналогия с по-горе, можем да установим и Тюринговия аналог на Теорема 1.5.5:

**Теорема 1.5.10.** *Нека $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n, \dots$ са редици от множества от естествени числа такива, че за всяко $n \in \omega$, $\mathcal{A}_n \not\leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Тогава съществува множество $F \subseteq \omega$ такова, че $\mathcal{B} \leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega}$ и за всяко $n \in \omega$, $\mathcal{A}_n \not\leq_T \{F^{(k)}_T\}_{k<\omega}$.*

## 1.6. $\omega$-$r$ степени

Изучаването на сводимостите между редици от множества от естествени числа води своето начало от работата **[38]** на Сосков. В нея той въвежда $\omega$-номерационната сводимост, $\leq_\omega$, разглеждайки за всяка редица от множества от естествени числа, да речем $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega}$, скок-клас

$$\mathfrak{J}(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_n \leq_{r.e.} X^{(n)}_T \text{ равномерно по } n\},$$

и дефинирайки

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff \mathfrak{J}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{J}(\mathcal{A}).$$

$\omega$-Номерационната сводимост е релация на преднаредба върху $\mathcal{S}_\omega$ и, следователно, по обичайния начин дава началото на степенна структура. Тази степенна структура означаваме с $\mathfrak{D}_\omega$ и ще наричаме структура на $\omega$-номерационните степени.

Работата [**30**] е посветена на Тюринговия аналог на по-горе споменатата сводимост и на индуцираната от нея степенна структура.

Този раздел цели да постави представляващите основна тема на настоящия дисертационен труд структури на $\omega$-номерационните и $\omega$-Тюрингови степени в малко по-общ сценарий, който ще ни позволи да оприличим последните две структури. Допълнително, тази по-обща рамка ще ни даде естествено влагане на разглежданите структури в структурата $\mathfrak{M}_w$ на Мучниковите степени. Основното, което ще направим, е да покажем как всяка релация $\leq_r$ над $2^\omega$ (удовлетворяваща някакъв минимум от условия за равномерност и ефективност) поражда релация $\leq_{r,\omega}$ над $\mathcal{S}_\omega$, индуцираща по стандартния начин степенна структура $\mathfrak{D}_{r,\omega}$, вложима в частичната наредба на $\mathfrak{M}_w$.

За целта, нека $\leq_r$ е релация над множества от естествени числа, изпълняваща следващите няколко условия:

- (ефективна породеност) $\leq_r$ е породена от изброимо множество от функционали, притежаващо ефективна номерация $\{\Psi_i\}_{i<\omega}$; с други думи, за всеки две множества $A$ и $B$, $A \leq_r B$ точно тогава, когато съществува $i < \omega$, за което $A = \Psi_i(B)$;
- (равномерна рефлексивност) $A \leq_r A$, за всяко $A \subseteq \omega$, като при това съществува $ref < \omega$ такова, че $A = \Psi_{ref}(A)$;
- (равномерна затвореност относно $\leq_T$) За всеки $A, B, C \subseteq \omega$, $A \leq_r B$ и $B \leq_T C$ влекат $A \leq_r C$, като при това ефективно и равномерно по индексите на свеждане на $A$ към $B$ (относно номерацията $\{\Psi_i\}_{i<\omega}$) и на $B$ към $C$ (относно номерацията $\{\Phi_i\}_{i<\omega}$ на Тюринговите функционали) можем да намерим индекс на свеждане на $A$ към $C$ (относно номерацията $\{\Psi_i\}_{i<\omega}$); също така, $A \leq_T B$ и $B \leq_r C$ влекат $A \leq_r C$, като при това ефективно и равномерно по индексите на свеждане на $A$ към $B$ (относно номерацията $\{\Phi_i\}_{i<\omega}$) и на $B$ към $C$ (относно номерацията $\{\Psi_i\}_{i<\omega}$) можем да намерим индекс на свеждане на $A$ към $C$ (относно номерацията $\{\Psi_i\}_{i<\omega}$);
- (равномерност относно операцията $\oplus$) За всеки три множества $A, B$ и $C$, $A \leq_r C$ и $B \leq_r C$ влекат $A \oplus B \leq_r C$, като индекс на последното свеждане може да се намери равномерно по индексите на свежнанията на $A$ към $C$ и на $B$ към $C$.

Не е трудно да се забележи, че релации с тези свойства наистина съществуват – например, за всяко естествено $k$, релацията $\leq_{\Sigma^0_k}$,[3] е такава. За притежаваща по-горе споменатите свойства релация $\leq_r$ и за всяка редица $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n<\omega} \in \mathcal{S}_\omega$ от множества от естествени числа, дефинираме масовия проблем $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ (т.е. множество от (тотални) функции изобразяващи $\omega$ в $\omega$) като множеството

$$\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) = \{f \in \omega^\omega \mid A_n \leq_r f_T^{(n)} \text{ равномерно по } n\}.$$

Да забележим, че масовият проблем $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ е затворен нагоре относно Тюринговата сводимост $\leq_T$.

Използувайки горната дефиниция, определяме релация $\preceq_{r,\omega}$ над $\mathcal{S}_\omega$, както следва:

$$\mathcal{A} \preceq_{r,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{M}_r(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_r(\mathcal{A}).$$

От горното определение[4], веднага се забелязва, че релацията $\preceq_{r,\omega}$ е рефлексивна и транзитивна, т.е. е преднаредба. Понеже $\emptyset \leq_T A$ равномерно по множеството $A$, то от свойствата за равномерна рефлексивност и равномерна затвореност относно Тюринговата сводимост на релацията $\leq_r$, получаваме, че $\mathcal{M}_r(\emptyset_\omega) = \omega^\omega$. Следователно, за всяка редица $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$, $\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_r(\emptyset_\omega)$, т.е.

$$\emptyset_\omega \preceq_{r,\omega} \mathcal{A}.$$

По-нататък с $\equiv_{r,\omega}$ ще бележим релацията, дефинирана чрез израза

$$\mathcal{A} \equiv_{r,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \preceq_{r,\omega} \mathcal{B} \ \&\ \mathcal{B} \preceq_{r,\omega} \mathcal{A},$$

като последното е еквивалентно на факта, че $\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_r(\mathcal{B})$. Не е трудно да се забележи, че така дефинираната релация $\equiv_{r,\omega}$ е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност по $\equiv_{r,\omega}$ ще наричаме $\omega - r$ степени като класът на еквивалентност, съдържащ редицата $\mathcal{A}$ ще бъде означаван с $\deg_{r,\omega}(\mathcal{A})$. За напред, $\mathbf{D}_{r,\omega}$ ще бъде използувано за да означава съвкупността на всички $\omega - r$ степени.

Релацията $\preceq_{r,\omega}$ индуцира релацията $\leq$ на частична наредба в $\mathbf{D}_{r,\omega}$,

$$\deg_{r,\omega}(\mathcal{A}) \leq \deg_{r,\omega}(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \preceq_{r,\omega} \mathcal{B}.$$

---

[3]Релацията $\leq_{\Sigma^0_k}$ между множества от естествени числа е определена чрез:

$$A \leq_{\Sigma^0_k} B \iff A \in \Sigma^B_k.$$

Така, например, $A \leq_{\Sigma^0_0} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно в $B$ и $A \leq_{\Sigma^0_1} B$ точно тогава, когато $A$ е рекурсивно номеруемо в $B$.

[4]Редно е да отбележим, че така дефинираната релация $\preceq_{r,\omega}$, както и масовите проблеми $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$, по същество не се различават от разгледаните в Предговора релация $\prec_{*,\omega}$ и класове $\mathcal{M}_*$. Не е трудно да се забележи, че и двата подхода пораждат изоморфни степенни структури. В този раздел сме предприели тази лека (надяваме се, удачна) промяна, единствено с цел подчертаването на връзката със структурата на Мучниковите степени.

По този начин, $\mathbf{0}_{r,\omega}$ е най-малкият елемент на частично нареденото множество $(\mathbf{D}_{r,\omega}, \leq)$, където с $\mathbf{0}_{r,\omega}$ сме означили $\omega$-$r$ степента на $\emptyset_\omega$.

Свойствата за равномерност на релацията $\leq_r$ ни дават, че за всеки две $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$,

$$\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) \cap \mathcal{M}_r(\mathcal{B}) = \mathcal{M}_r(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}).$$

Последното, от своя страна, гарантира, че степента $\deg_{r,\omega}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$ е точна горна граница на степените $\deg_{r,\omega}(\mathcal{A})$ и $\deg_{r,\omega}(\mathcal{B})$,

$$\deg_{r,\omega}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \deg_{r,\omega}(\mathcal{A}) \vee \deg_{r,\omega}(\mathcal{B}).$$

Така се оказва, че структурата $(\mathbf{D}_{r,\omega}, \mathbf{0}_{r,\omega}, \leq, \vee)$ е горна полурешетка с най-малък елемент. Тази структура занапред ще бъде означавана с $\mathfrak{D}_{r,\omega}$.

Вече дефинирали степенната структура $\mathfrak{D}_{r,\omega}$, ще се занимаем с въпроса за влагането ѝ в структурата $\mathfrak{M}_w$ на Мучниковите степени. За да направим това, първо да припомним, че $\mathfrak{M}_w$ е индуцирана от релацията на слаба (или Мучникова) сводимост, $\leq_w$. Според дефиницията, масовият проблем $\mathcal{M}_1$ е слабо сводим към масовия проблем $\mathcal{M}_2$ точно тогава, когато

$$(\forall f \in \mathcal{M}_2)(\exists g \in \mathcal{M}_1)[g \leq_T f].$$

Да припомним също, че за всяка редица $\mathcal{A}$, съответният му масов проблем $\mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ е затворен нагоре относно Тюринговата сводимост, $\leq_T$. По този начин, за всеки две $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$, $\mathcal{M}_r(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_r(\mathcal{A})$ точно в този случай, когато $\mathcal{M}_r(\mathcal{A}) \leq_w \mathcal{M}_r(\mathcal{B})$. Така,

$$\mathcal{A} \preceq_{r,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{M}_r(\mathcal{A}) \leq_w \mathcal{M}_r(\mathcal{B}),$$

което ни дава желаното влагане на $(\mathbf{D}_{r,\omega}, \leq)$ в частичната наредба на $\mathfrak{M}_w$.

Остатъкът от тази работа е посветен на изучаването на въпросите за определимост както в глобалните, така и в локалните теории на структурите $\mathfrak{D}_{r,\omega}$ в случаите, когато $\leq_r$ е или релацията на Тюрингова сводимост или релацията “рекурсивно номеруемо в”.

Глава 2

# $\omega$-Номерационни степени

В тази глава ще бъде разгледана структурата $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени. В първите два раздела ще бъдат разгледани основните свойства на тази структура като много от нещата ще останат без доказателства. В Раздел 2.3 се въвеждат класовете на $a.z.$ и наследените степени, които играят основна роля в по-нататък установените резултати за определимост. В Раздел 2.4 се въвеждат $\mathcal{K}$-двойките за $\mathfrak{D}_\omega$ като е направена една тяхна характеризация в термините на $a.z.$ и наследените степени. В Раздел 2.5, базирайки се на характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките, е показана определимостта от първи ред на скока $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$ на $\mathfrak{D}_\omega$. Раздел 2.6 е посветен на локалната теория на $\omega$-номерационните степени. Последният Раздел 2.7 е насочен към въпроса за определимост на някои скок класове в локалната теория. Резултатите от Разделите 2.3, 2.4, 2.5 и 2.7 са съвместни с Христо Ганчев и са публукувани в [**7**].

Целейки да облекчим изложението, навсякъде в тази глава ще направим следната уговорка. При положение, че $X$ е множество от естествени числа, ако изрично не е казано друго, с $X'$ ще отбелязваме номерациония скок $X'_e$ на $X$. По-общо, $X^{(n)}$ ще отбелязва $n$-тия номерационен скок $X^{(n)}_e$ на множеството $X$.

## 2.1. Дефиниция и основни свойства

$\omega$-Номерационната сводимост между редици от множества от естествени числа, както и породената от нея структура, са въведени от И. Сосков в работата [**38**]. Основна роля в определението на последната сводимост играе следващото понятие. Номерационен скок-клас ($e$-скок-клас) $\mathfrak{J}^e(\mathcal{A})$ на редицата от множества от естествени числа $\mathcal{A}$ ще наричаме множеството, състоящо се от Тюринговите степени на онези множества, които могат да изчислят, по равномерен начин, номерация на $k$-тия елемент на редицата $\mathcal{A}$ в техния $k$-ти Тюрингов скок. Казано иначе,

$$\mathfrak{J}^e(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_k \leq_{r.e.} (X)^{(k)}_T \text{ равномерно по } k\}.$$

Базирайки се на равномерните връзки между номерационната сводимост и сводимостта "рекурсивно номеруемо в", Сосков и Ганчев показват [**39**], че $e$-скок-класът на редицата $\mathcal{A}$ може също така да се представи и в следния вид:

$$\mathfrak{J}^e(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_k \leq_e (X^+)^{(k)} \text{ равномерно по } k\}.$$

Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Ще казваме, че редицата $\mathcal{A}$ е $\omega$-номерационно сводима към редицата $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}$, ако $\mathfrak{J}^e(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{J}^e(\mathcal{A})$.

Не е трудно да се види, че релацията $\leq_\omega$ е рефлексивна и транзитивна и, че релацията $\equiv_\omega$ определена с

$$\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \;\&\; \mathcal{B} \leq_\omega \mathcal{A}$$

е релация на еквивалентност. Класовене на еквивалентност по $\equiv_\omega$ ще наричаме $\omega$-номерационни степени. Класът на еквивалентност, съдържащ $\mathcal{A}$ ще означаваме с $\deg_\omega(\mathcal{A})$. Съвкупността от всички $\omega$-номерационни степени ще означаваме с $\mathbf{D}_\omega$.

Релацията $\leq_\omega$ поражда релация на частична наредба $\leq$ в $\mathbf{D}_\omega$:

$$\deg_\omega(\mathcal{A}) \leq \deg_\omega(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}.$$

С $\mathbf{0}_\omega$ ще бележим $\omega$-номерационната степен на редицата $\emptyset_\omega = \{\emptyset\}_{k<\omega}$. Да забележим, че $\mathfrak{J}^e(\emptyset_\omega) = \mathbf{D}_T$ и, следователно, $\mathbf{0}_\omega$ е най-малкият елемент на частично нареденото множество $(\mathbf{D}_\omega, \leq)$.

Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ са елементи на $\mathcal{S}_\omega$. По-нататък с $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ ще означаваме редицата $\{A_k \oplus B_k\}_{k<\omega}$. Оказва се, че

$$\deg_\omega(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \deg_\omega(\mathcal{A}) \vee \deg_\omega(\mathcal{B}).$$

Следователно $(\mathbf{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq, \vee)$ е горна полурешетка с най-малък елемент, която ще означаваме с $\mathfrak{D}_\omega$.

Да забележим, че в означенията на Раздел 1.6,

$$\mathfrak{J}^e(\mathcal{A}) = \{\deg_T(f) \mid f \in \mathcal{M}_{r.e.}(\mathcal{A})\},$$

т.е. въведените по-горе $\omega$-номерационни степени съпадат с $\omega$-*r.e.* степените. Въпреки това, за да запазим първоначалните дефиниции и означения на Сосков, ще говорим за $\omega$-номерационни степени и ще използуваме $\mathfrak{D}_\omega$ за да означаваме тяхната структура.

Експлицитна характеризация на $\omega$-номерационната сводимост в термините на равномерната $e$-сводимост може да бъде намерена в [**40**]. Според нея,

**Теорема 2.1.1.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B}).$$

От горната характеризация следва, че всяка редица $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ е от същата $\omega$-номерационна степен както и номерационната си скок редица,

$$\mathcal{A} \equiv_\omega \mathcal{P}^e(\mathcal{A}), \tag{2.1.1}$$

както и, че за всеки две редици $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$,

$$\mathcal{A} \leq_e \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}. \tag{2.1.2}$$

Освен това, Теорема 2.1.1 влече, че ако заместим в дадена редица $\mathcal{A}$ краен брой от елемнтите ѝ, да речем $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, съответно с $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$, за които $A_{i_j} \equiv_e B_{i_j}$, то новата редица е $\omega$-номерационно еквивалентна на $\mathcal{A}$. В частност, всяка $\omega$-номерационна степен съдържа точно изброимо много редици.

От дефиницията на релацията $\leq_\omega$ и равномерността на номерационния скок имаме, че за всеки две множества $A, B \subseteq \omega$,

$$A \uparrow \omega \leq_\omega B \uparrow \omega \iff A \leq_e B. \tag{2.1.3}$$

Да разгледаме изображението $\kappa_e : \mathbf{D}_e \to \mathbf{D}_\omega$, дефинирано с

$$\kappa_e(\mathbf{x}) = \deg_\omega(X \uparrow \omega),$$

където $X$ е произволно множество в $\mathbf{x}$. Последната еквивалентност показва, че $\kappa_e$ запазва наредбата. Също така не е трудно да се види, че $\kappa_e$ запазва най-малкия елемент и бинарната операция за точна горна граница. Така $\kappa_e$ е влагане на $\mathfrak{D}_e$ в $\mathfrak{D}_\omega$. Оттук нататък с $\mathbf{D}_{e,1}$ ще означаваме областта от стойностите на $\kappa_e$.

В допълнение на по-горе разгледаното влагане $\kappa_e$ на номерационните в $\omega$-номерационните степени, дефинираме сюрективно, запазващо реда изображение $\lambda_e$ на $\mathbf{D}_\omega$ в $\mathbf{D}_e$, действуващо по правилото

$$\lambda_e(\deg_\omega(\mathcal{A})) = \deg_e(P_0^e(\mathcal{A})).$$

Свойствата на изображението $\lambda_e$, както и връзките му с влагането $\kappa_e$ са показани в следващата лема. Доказателствата им могат да бъдат намерени в [**8**].

**Лема 2.1.2.** *Изображенията $\kappa_e$ и $\lambda_e$ притежават следните свойства:*

- **(L1):** $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega)[\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \to \lambda_e(\mathbf{a}) \leq \lambda_e(\mathbf{b})]$;
- **(L2):** $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega)[\lambda_e(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \lambda_e(\mathbf{a}) \vee \lambda_e(\mathbf{b})]$;
- **(L3):** $(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{D}_\omega)[\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \lambda_e(\mathbf{a}) \wedge \lambda_e(\mathbf{b}) = \lambda_e(\mathbf{c})]$;
- **(KL1):** $(\forall \mathbf{a} \in \mathbf{D}_e)[\lambda_e(\kappa_e(\mathbf{a})) = \mathbf{a}]$;
- **(KL2):** $(\forall \mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega)[\kappa_e(\lambda_e(\mathbf{a})) \leq \mathbf{a}]$;

## 2.2. Операцията скок. Обръщане на скока

Следвайки дефиницията на Сосков и Ганчев, $\omega$-номерационният скок $\mathcal{A}'_\omega$ на $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е редицата

$$\mathcal{A}'_\omega = (P_1^e(\mathcal{A}), A_2, A_3, \ldots, A_k, \ldots).$$

В действителност, горната операция е дефинирана по такъв начин, че $e$-скок-класът $\mathfrak{J}^e(\mathcal{A}'_\omega)$ на $\mathcal{A}'_\omega$ се състои точно от Тюринговите скокове на степените в скок класа $\mathfrak{J}^e(\mathcal{A})$ на $\mathcal{A}$,

$$\mathfrak{J}^e(\mathcal{A}') = \{\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{J}^e(\mathcal{A})\}.$$

Операцията скок е строго монотонна, т.е.

$$\mathcal{A} \lneq_\omega \mathcal{A}'_\omega$$

и

$$\mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}'_\omega \leq_\omega \mathcal{B}'_\omega.$$

Това позволява да се дефинира операция скок и върху $\omega$-номерационните степени чрез

$$\mathbf{a}' = \deg_\omega(\mathcal{A}'_\omega),$$

където $\mathcal{A}$ е произволна редица в $\mathbf{a}$. При това, ясно е, че $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}' \leq \mathbf{b}'$. Оттук нататък, структурата $(\mathbf{D}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq, \vee, ')$ ще бъде означавана с $\mathfrak{D}'_\omega$.

Оказва се, че така въведената операция скок в $\mathbf{D}_\omega$ е съгласувана с операцията скок в структурата на номерационните степени,

$$\kappa_e(\mathbf{x}') = \kappa_e(\mathbf{x})', \text{ за всяко } \mathbf{x} \in \mathbf{D}_e. \tag{2.2.1}$$

По-нататък, за всяко $n \geq 0$ с ${}^{(n)}_\omega$ и ${}^{(n)}$ ще означаваме съответно $n$-тата итерация на ${}'_\omega$ и $'$. Да забележим, че от (2.1.1) лесно следва, че за всяко $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$ и $n < \omega$,

$$\mathcal{A}^{(n)}_\omega \equiv_\omega \{P^e_{n+k}(\mathcal{A})\}_{k<\omega}. \tag{2.2.2}$$

Ясно е също, че ако $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$, то $\mathcal{A}^{(n)}_\omega \in \mathbf{a}^{(n)}$. От (2.2.2) директно следва, че за всяко $n < \omega$

$$\lambda_e(\deg_\omega(\mathcal{A}^{(n)})) = \deg_e(P^e_n(\mathcal{A})). \tag{2.2.3}$$

В частност, можем да заключим, че за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$,

$$\lambda_e(\mathbf{x})' \leq \lambda_e(\mathbf{x}'),$$

виж [**8**].

От (2.2.3) може да се получи следната характеризация на частичната наредба $\leq$ в $\mathfrak{D}_\omega$.

**Лема 2.2.1.** *За всеки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$ и всяко $n < \omega$,*

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff (\forall k < n)[\lambda_e(\mathbf{a}^{(k)}) \leq \lambda_e(\mathbf{b}^{(k)})] \ \wedge \ \mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}^{(n)}.$$

Също както в случая на Тюринговите степени, областта от стойностите на оператора скок е точно горният конус от степените над скока $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$. По-общо, за всяка $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ образът на конусът от степените над $\mathbf{x}$, под действието на операцията скок, е точно конусът от степените над $\mathbf{x}'$. Последното, обаче, се дължи на едно свойство на скока в $\mathfrak{D}_\omega$, което не е в сила нито в $\mathfrak{D}_T$, нито в $\mathfrak{D}_e$. Именно, Сосков и Ганчев доказват в [**39**] следната теорема.

**Теорема 2.2.2.** *За всяко $n < \omega$ и всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$, за които $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}$, съществува най-малка степен $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ със свойствата $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}$.*

По-нататък, ще означаваме тази най-малка степен с $\mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Експлицитно можем да зададем редица от степента $\mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ като положим за всеки две редици $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$,

$$I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = (A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, B_0, B_1, \dots, B_k, \dots). \tag{2.2.4}$$

Сега за всяко $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$ над $\mathbf{a}^{(n)}$,

$$\mathcal{A} \in \mathbf{a} \;\&\; \mathcal{B} \in \mathbf{b} \iff I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \in \mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}). \tag{2.2.5}$$

Оказва се, че операцията за обръщане на скока е монотонна. По-точно, че за всеки степени $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_\omega$ и $n < \omega$ такива, че $\mathbf{a}^{(n)} < \mathbf{x}, \mathbf{y}$ е в сила, че

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{y}). \tag{2.2.6}$$

Оттук нататък, с цел облекчаване на изложението, когато $n = 1$ ще пишем $\mathbf{I}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{I}^1_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Ако $\mathbf{a}$ е най-малката степен $\mathbf{0}_\omega$, то ще използуваме означението $\mathbf{I}^n(\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_\omega}(\mathbf{b})$.

В следващата лема са събрани някои от по-важните свойства на операцията $\mathbf{I}^n$ за обръщане на скока.

**Лема 2.2.3.** *Нека $n < \omega$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_\omega$ са такива, че $\mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$. Тогава*

- **(I0):** $(\forall k < n)[\lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(k)})]$;
- **(I1):** $\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$;
- **(I2):** $(\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{u})[\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \to \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{x}]$;
- **(I3):** $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b}) = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$;
- **(I4):** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \wedge \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b}) = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{c})$;
- **(I5):** $(\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{u})(\forall k < n)[\lambda_e((\mathbf{x} \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}))^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{x}^{(k)})]$;
- **(I6):** $(\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{u})[(\mathbf{x} \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}))^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)} \vee \mathbf{a}]$;

*Доказателство.*

**(I0)** Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathbf{u} \in \mathbf{x}$. Тогава $(U_0, \dots, U_{n-1}, A_0, A_1, \dots) = I^n_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \in \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ и, следователно, за $k < n$, $P^e_k(I^n_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})) = P^e_k(\mathcal{U})$. Сега твърдението следва от (2.2.3).

**(I1)** Да предположим, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Тогава $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(n)} = \mathbf{a} \leq \mathbf{b} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})^{(n)}$. Освен това, за всяко $k < n$, $\lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})^{(k)})$. Сега, прилагайки Лема 2.2.1, получаваме, че $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$.

За обратната посока, да предположим, че $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$. Използувайки монотонността на оператора скок, достигаме до $\mathbf{a} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(n)} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})^{(n)} = \mathbf{b}$.

**(I2)** Нека $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$ е такова, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$. По Лема 2.2.1 и по **(I0)** получаваме, че за всяко $k < n$,

$$\lambda_e(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)})^{(k)}).$$

Но $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)})^{(n)}$. Оттук, отново Лема 2.2.1 ни дава, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)})$. Обратното сравнение е ясно.

**(I3)** Понеже $\mathbf{a} \vee \mathbf{b}$ ограничава $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то по **(I1)**, $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$ ограничава $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ и $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$, откъдето $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})$.

За да установим обратното сравнение, първо да забележим, че за всяко $k < n$,

$$\begin{aligned}\lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(k)}) \vee \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})^{(k)}) = \\ = \lambda_e(\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})^{(k)} \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})^{(k)}) \leq \lambda_e((\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b}))^{(k)}).\end{aligned}$$

Аналогично, $\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a} \vee \mathbf{b})^{(n)} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b} \leq (\mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}) \vee \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b}))^{(n)}$. Остава да приложим отново Лема 2.2.1.

**(I4)** Нека $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$. Да забележим, че $\mathbf{u}^{(n)} \leq \mathbf{c}$. Нека $\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{a}), \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{b})$. Тогава, по **(I2)**, $\mathbf{x} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)})$. Освен това, от факта, че $\mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ можем да заключим, че $\mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{c}$. Сега по **(I1)**, получаваме $\mathbf{x} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^{(n)}) \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{u}}(\mathbf{c})$.

**(I5)** и **(I6)** следват от наблюдението, че за произволни $\mathcal{X} \in \mathbf{x}, \mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{U} \in \mathbf{u}$, винаги когато $k < n$, то $P^e_k(\mathcal{X} \oplus I^n_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})) \equiv_e P^e_k(\mathcal{X})$ и $P^e_n(\mathcal{X} \oplus I^n_{\mathcal{U}}(\mathcal{A})) \equiv_e P^e_n(\mathcal{X}) \oplus P^e_0(\mathcal{A})$. ■

Да забележим, че според **(I4)** от последната лема, операцията $\mathbf{I}^n$ запазва точната долна граница, когато тя съществува. Както показва Ганчев, [**6**], същото свойство притежава и операцията скок. По-точно, за всеки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{D}_\omega$,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c} \to \mathbf{a}' \wedge \mathbf{b}' = \mathbf{c}'. \tag{2.2.7}$$

Пак от Лема 2.2.3, по **(I3)** имаме, че операцията за обръщане на скока запазва и точната горна граница. Както е известно, обаче това не винаги е вярно за операцията скок. В [**8**] Ганчев и М. Соскова дават следното необходимо условие за запазването на точната горна граница.

**Лема 2.2.4.** *Нека* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са* $\omega$*-номерационни степени. Тогава*

$$(\lambda_e(\mathbf{a}) \vee \lambda_e(\mathbf{b}))' = \lambda_e(\mathbf{a})' \vee \lambda_e(\mathbf{b})' \;\to\; (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})' = \mathbf{a}' \vee \mathbf{b}'.$$

Базирайки се на свойствата на операцията $\mathbf{I}^n$, в [**39**] Сосков и Ганчев показват, че изоморфното копие $\mathbf{D}_{e,1}$ на структурата на номерационните степени е определимо с формула от първи ред в структурата $\mathfrak{D}'_\omega$. В същата работа е показано още, че $\mathfrak{D}_e$ и $\mathfrak{D}'_\omega$ притежават изоморфни групи на автоморфизмите.

Така въведената операция скок дава началото на локалната подструктура на степените лежащи под първия скок $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малката $\omega$-номерационна степен $\mathbf{0}_\omega$. По-нататък с $\mathbf{G}_\omega$ ще означаваме интервала $[\mathbf{0}_\omega, \mathbf{0}'_\omega]$, а с $\mathfrak{G}_\omega$ – структурата $(\mathbf{G}_\omega, \leq)$ с индуцирана наредба от $\mathfrak{D}_\omega$.

## 2.3. *a.z.* степени. Наследени степени

Резултатите за определимост, които ще бъдат получени в разделите 2.5 и 2.7 се базират изключително на понятието за $\mathcal{K}$-двойка.

Както ще видим в по-горе споменатите раздели, всеки елемент на $\mathcal{K}$-двойка е или "почти нулева" степен, т.е. степен, различаваща се от $\mathbf{0}_\omega$ само по липсата на равномерност, или е степен, която е "наследена" от структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени. В този раздел ще разгледаме класовете на тези два типа степени и ще покажем как могат да бъдат отделени един от друг с помощта на условие от първи ред. Започваме с понятие, с което по-късно ще разкрием разликата между горните класове от степени.

**Определение 2.3.1.** *Нека* $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{0}, \leq, \vee)$ *е горна полурешетка с най-малък елемент. Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}$ *са такива, че* $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$. *Ще казваме, че* $\mathbf{a}$ *е разделима над* $\mathbf{b}$, *ако съществуват* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}$ *такива, че*

$$\mathbf{b} \leq \mathbf{x}, \mathbf{y} < \mathbf{a} \text{ и } \mathbf{a} = \mathbf{x} \vee \mathbf{y}.$$

*В противен случай ще казваме, че* $\mathbf{a}$ *е неразделима над* $\mathbf{b}$. *В случай, че* $\mathbf{b}$ *съвпада с най-малкия елемент* $\mathbf{0}$, *ще казваме съответно само, че* $\mathbf{a}$ *е разделима или неразделима.*

Сосков и Ганчев [**39**] въвеждат *почти нулевите* ($a.z.$) степени. Следвайки тяхната дефиниция, степента $\mathbf{x}$ ще наричаме $a.z.$ точно тогава, когато съществува редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че

$$(\forall k)[P_k^e(\mathcal{X}) \equiv_e \emptyset^{(k)}]. \tag{2.3.1}$$

От горната дефиниция веднага се вижда, че класът на $a.z.$ степените е затворен надолу. Друго полезно наблюдение е, че ако $\mathbf{x}$ е $a.z.$ степен, различна от $\mathbf{0}_\omega$, то за никое $n$, $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n)}$. Действително, ако имаше такова $n$, то щеше да има редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че за всяко $k \geq n$, $P_k^e(\mathcal{X}) \equiv_e \emptyset^{(k)}$ равномерно по $k$. Сега, отчитайки, че за $k < n$, $P_k^e(\mathcal{X}) \equiv_e \emptyset^{(k)}$, можем да стигнем до противоречието, че $\mathcal{X} \equiv_\omega \emptyset_\omega$, т.е. $\mathbf{x} = \mathbf{0}_\omega$. Следващата теорема установява връзката между $a.z.$ и разделимите степени.

**Теорема 2.3.2.** *Всяка ненулева $a.z.$ степен е разделима.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ е ненулева $a.z.$ степен и $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ удовлетворява (2.3.1). Ще построим редици $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ такива, че

$$\emptyset_\omega \lneq_\omega \mathcal{B}, \mathcal{C} \lneq_\omega \mathcal{A} \text{ и } \mathcal{B} \oplus \mathcal{C} \equiv_\omega \mathcal{A}.$$

Ще строим $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k<\omega}$ използувайки индукция по $k$. За всяко $k$ ще имаме или че $B_k = \emptyset$ и $C_k = A_k$, или че $B_k = A_k$ и $C_k = \emptyset$. Така, за да построим нужните $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, достатъчно е да имаме $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq_\omega \mathcal{A}$ и да удовлетворим следните изисквания:

$$R_{2e} : (\exists k) \left[\Phi_e(k) \uparrow \ \vee A_k \neq W_{\Phi_e(k)}(P_k^e(\mathcal{B}))\right],$$

$$R_{2e+1} : (\exists k) \left[\Phi_e(k) \uparrow \ \vee A_k \neq W_{\Phi_e(k)}(P_k^e(\mathcal{C}))\right].$$

Да забележим, че това автоматично ни дава, че $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ удовлетворяват (2.3.1).

*Конструкция:* По време на конструкцията ще използуваме глобална променлива $\mathfrak{r}$, указваща последното изискване, което е (възможно) все още неудовлетворено. Започваме, задавайки $\mathfrak{r} = 0$. Нека, също, $B_0 = B_1 = \emptyset$, $C_0 = A_0$ и $C_1 = A_1$. Да предположим, че $k \geq 2$ и, че $B_s$ и $C_s$ са вече определени за $s \leq k$. Да забележим, че предположението ни влече, че за $s \leq k$, $P^e_s(\mathcal{B})$ и $P^e_s(\mathcal{C})$ също са определени. Ще разгледаме два случая, в зависимост от четността на $\mathfrak{r}$.

(1) $\mathfrak{r} = 2e$. Ако $\Phi_e(k-2)\uparrow$ или $A_{k-2} \neq W_{\Phi_e(k-2)}(P_{k-2}(\mathcal{B}))$, то определяме $B_k = A_k$, $C_k = \emptyset$ и увеличаваме $\mathfrak{r}$ с 1. Иначе определяме $B_k = \emptyset$, $C_k = A_k$ и не променяме $\mathfrak{r}$.

(2) $\mathfrak{r} = 2e + 1$. Ако $\Phi_e(k-2)\uparrow$ или $A_{k-2} \neq W_{\Phi_e(k-2)}(P_{k-2}(\mathcal{C}))$, то определяме $B_k = \emptyset$, $C_k = A_k$ и увеличаваме $\mathfrak{r}$ с 1. Иначе определяме $B_k = A_k$, $C_k = \emptyset$ и не променяме $\mathfrak{r}$.

*Край на конструкцията.*

Да отбележим първо, че според определението на номерационната скок редица $\mathcal{P}^e(\mathcal{A})$, $\emptyset'' \leq_e P^e_k(\mathcal{A})$ за $k \geq 2$ равномерно по $k$. Следователно за $k \geq 2$, по дадена номерация на $P^e_k(\mathcal{A})$ можем равномерно да отговорим дали $\Phi_e(k-2)\uparrow$. Освен това, за $k \geq 2$, $P^e_{k-2}(\mathcal{A})'' \leq_e P^e_k(\mathcal{A})$ равномерно по $k$. Тези свойства на $P^e_k(\mathcal{A})$ и проста индукция по $k \geq 2$, влекат, че всяка номерация на $P^e_k(\mathcal{A})$ може равномерно да отговори на въпросите дали

$$\Phi_e(k-2)\uparrow \ \vee A_{k-2} \neq W_{\Phi_e(k-2)}(P^e_{k-2}(\mathcal{B}))$$

и

$$\Phi_e(k-2)\uparrow \ \vee A_{k-2} \neq W_{\Phi_e(k-2)}(P^e_{k-2}(\mathcal{C})).$$

В частност равномерно по $k$ всяка номерация на $P^e_k(\mathcal{A})$ може да изчисли стойността на $\mathfrak{r}$ на етап $k$ и следователно може равномерно да изчисли $B_k$ и $C_k$. Следователно $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq_\omega \mathcal{A}$.

Остава да покажем, че всички изисквания са удовлетворени. За целта да допуснем, че има изисквания, които не са удовлетворени и нека $n$ е най-малкият индекс на такова изискване. Да забележим, че от вида на конструкцията следва, че на някой етап $m$ глобалната променлива $\mathfrak{r}$ е била установена на $n$ като след това никога повече не променя стойността си. Да предположим първо, че $n = 2e$ за някое естествено число $e$. Тогава за всяко $k > m$,

$$A_{k-2} = W_{\Phi_e(k-2)}(P^e_{k-2}(\mathcal{B})),$$

следователно $B_k = \emptyset$ за $k > m$ и $A_k \leq_e P^e_k(\mathcal{B})$ равномерно по $k > m$. Освен това за $0 \leq k \leq m$,

$$B_k \leq_e P^e_k(\mathcal{A}) \leq_e \emptyset^{(k)},$$

което заедно с предишните ни наблюдения влече, че

$$\mathcal{B} \leq_\omega \emptyset_\omega \text{ и } \mathcal{A} \leq_\omega \mathcal{B}.$$

Така $\mathcal{A} \leq_\omega \emptyset_\omega$, което противоречи на избора на $\mathcal{A}$.

Ако $n = 2e + 1$, то по аналогичен начин стигаме до извода

$$\mathcal{A} \leq_\omega \emptyset_\omega,$$

което отново противоречи с избора на $\mathcal{A}$. Следователно нашето предположение, че някои от изискванията не са удовлетворени е погрешно. Така $\emptyset_\omega \lneq_\omega \mathcal{B}, \mathcal{C} \lneq_\omega \mathcal{A}$. ■

От факта, че класът на $a.z.$ степените е затворен надолу и от предишната лема, получаваме, че всяка ненулева степен, лежаща под $a.z.$ степен е разделима.

Следващото определение формализира понятието за наследеност.

**Определение 2.3.3.** *Ще казваме, че степента* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$ *е наследена, ако съществуват* $A \subseteq \omega$ *и* $n < \omega$ *(, които ще наричаме свидетели за наследеността на* $\mathbf{a}$*) такива, че*

- $\emptyset^{(n)} \leq_e A \leq_e \emptyset^{(n+1)}$;
- $A' \equiv_e \emptyset^{(n+1)}$;
- $(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots) \in \mathbf{a}$.

*Ако* $n$ *е свидетел за наследеността на степента* $\mathbf{a}$*, то ще казваме, че* $\mathbf{a}$ *е* $n$*-наследена.*

Използвайки явната дефиниция на оператора $\mathbf{I}^n$ за обръщане на скока, лесно можем да преформулираме горното определение в следния по-алгебричен вариант:

Степента $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_\omega$ е $n$-наследена, ако съществува степен $\widetilde{\mathbf{a}}$ от интервала $\mathbf{D}_e[\mathbf{0}_e^{(n)}, \mathbf{0}_e^{(n+1)}]$ такава, че

$$\widetilde{\mathbf{a}}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)} \text{ и } \mathbf{a} = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\widetilde{\mathbf{a}})).$$

Да забележим, че най-голямата наследена степен е $\mathbf{0}'_\omega$. Освен това, единствената степен, която е едновременно $a.z.$ и наследена е най-малкият елемент $\mathbf{0}_\omega$. Оказва се, че също както класът на $a.z.$ степените, така и този на наследените е затворен надолу.

**Лема 2.3.4.** *Класът на наследените степени е затворен надолу.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ е наследена степен и $A$ и $n$ са свидетели за това. Нека $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ е произволна. Да разгледаме редица $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Използвайки (2.1.1) не е трудно да се покаже, че

$$\mathcal{P}^e((\underbrace{\emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots)) \equiv_e$$

$$\equiv_e (\underbrace{\emptyset, \emptyset', \ldots, \emptyset^{(n-1)}}_{n}, A, \emptyset^{(n+1)}, \ldots, \emptyset^{(k)}, \ldots).$$

Тогава $P_k^e(\mathcal{B}) \equiv_e \emptyset^{(k)}$ равномерно по $k \neq n$ и $P_n^e(\mathcal{B}) \leq_e A$. Следователно,

$$\mathcal{P}^e(\mathcal{B}) \equiv_e (\underbrace{\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}}_{n}, P_n^e(\mathcal{B}), \emptyset^{(n+1)}, \dots, \emptyset^{(k)}, \dots),$$

а значи според (2.1.2), последните две редици са от една и съща $\omega$-номерационна степен. Пак от там имаме, че

$$(\underbrace{\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}}_{n}, P_n^e(\mathcal{B}), \emptyset^{(n+1)}, \dots, \emptyset^{(k)}, \dots) \equiv_\omega$$
$$\equiv_\omega (\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, P_n^e(\mathcal{B}), \emptyset, \dots, \emptyset, \dots).$$

Сега остава да забележим, че $\mathcal{P}^e(\mathcal{B}) \in \mathbf{b}$. ■

За да отделим $a.z.$ от наследените степени, ще покажем, че всяка ненулева наследена степен ограничава ненулева степен, която не може да бъде разделена. За целта ще ни бъде нужен следния резултат на Kent и Sorbi [**11**].

**Теорема 2.3.5.** *Всяка ненулева номерационна степен* $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_e[\mathbf{0}_e, \mathbf{0}_e']$ *ограничава ненулева неразделима степен* $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_e[\mathbf{0}_e, \mathbf{0}_e']$.

**Теорема 2.3.6.** *Всяка ненулева наследена степен ограничава ненулева неразделима степен.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ е наследена степен като $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$ свидетелстват за това. Релативизирайки резултата на Kent и Sorbi, 2.3.5, над $\mathbf{0}_e^{(n)}$, можем да заключим, че съществува множество $A_0 \subseteq \omega$ такова, че $\emptyset^{(n)} <_e A_0 \leq_e A$ като $A_0$ е от неразделяща се над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ степен . Но тогава степента

$$\mathbf{a}_0 = \deg_\omega((\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, A_0, \emptyset, \dots, \emptyset, \dots))$$

е неразделяща се. Действително, да предположим, че $\mathbf{a}_0$ е разделяща се, т.е. $\mathbf{a}_0 = \mathbf{c} \vee \mathbf{d}$ за някои $\mathbf{0}_\omega < \mathbf{c}, \mathbf{d} < \mathbf{a}_0$. Да фиксираме редици $\mathcal{C} = \{C_m\}_{m<\omega} \in \mathbf{c}, \mathcal{D} = \{D_m\}_{m<\omega} \in \mathbf{d}$. Първо, да забележим, че

$$\mathcal{P}^e(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{P}^e(\mathcal{D}) \leq_e (\underbrace{\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}}_{n}, A_0, \emptyset^{(n+1)}, \dots),$$

следователно $P_n^e(\mathcal{C}) \oplus P_n^e(\mathcal{D}) \leq_e A_0$. Също така имаме, че

$$\mathcal{P}^e(\mathcal{C}) \equiv_e (\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}, P_n^e(\mathcal{C}), \emptyset^{(n+1)}, \dots)$$

и

$$\mathcal{P}^e(\mathcal{D}) \equiv_e (\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}, P_n(\mathcal{D}), \emptyset^{(n+1)}, \dots).$$

Понеже $\mathbf{a}_0 \leq \mathbf{c} \vee \mathbf{d}$, то

$$(\emptyset, \emptyset', \dots, \emptyset^{(n-1)}, A_0, \emptyset^{(n+1)}, \dots) \leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{P}(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{P}^e(\mathcal{D})).$$

Тогава имаме, че $A_0 \leq_e P_n^e(\mathcal{P}^e(\mathcal{C}) \oplus \mathcal{P}^e(\mathcal{D})) \equiv_e P_n^e(\mathcal{C}) \oplus P_n^e(\mathcal{D})$, откъдето получаваме $A_0 \equiv_e P_n^e(\mathcal{C}) \oplus P_n^e(\mathcal{D})$. Понеже $A_0$ е от неразделима над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ степен, то $P_n^e(\mathcal{C}) \equiv_e A_0$ или $P_n^e(\mathcal{D}) \equiv_e A_0$. В първия случай получаваме, че $\mathbf{a}_0 = \mathbf{c}$, а във втория – $\mathbf{a}_0 = \mathbf{d}$. Противоречие.

Ясно е, че $\mathbf{a}_0 \not\leq \mathbf{0}_\omega$. Накрая, понеже $\mathbf{a}_0 \leq \mathbf{a}$, то $\mathbf{a}$ ограничава ненулева неразделима степен. ■

Следователно, наследените и *a.z.* степените могат да бъдат отделени помежду си с формула от първи ред.

**Следствие 2.3.7.** *Нека $\mathfrak{C} \subseteq \mathbf{D}_\omega$ е клас, съдържащ единствено степени, които са a.z. или наследени. Тогава, за всяка степен $\mathbf{a} \in \mathfrak{C}$, $\mathbf{a}$ е наследена точно тогава, когато или $\mathbf{a} = \mathbf{0}_\omega$, или $\mathbf{a}$ ограничава ненулева неразделима степен.*

## 2.4. $\mathcal{K}$-двойки

$\mathcal{K}$-двойките са въведени от Калимулин, [**10**], с цел дефинирането на номерационния скок с формула от първи ред в езика на структурата $\mathfrak{D}_e$. В този раздел ще въведем понятието за $\mathcal{K}$-двойка за произволно частично наредено множество. След това, използвайки характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките за локалната подструктура $\mathfrak{G}_\omega$ от [**8**], ще направим аналогична характеризация и на $\mathcal{K}$-двойките за глобалната структура $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени.

**Определение 2.4.1.** *Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq)$ е частична наредба. Ще казваме, че $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка (строго) над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}$, ако $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}, \mathbf{u} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ ($\mathbf{u} \lneq \mathbf{a}, \mathbf{b}$) и за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ такова, че $\mathbf{u} \leq \mathbf{x}$, точните горни граници $\mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{b}$ и точната долна граница $(\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{b})$ съществуват като при това е в сила:*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{b}). \tag{2.4.1}$$

Да забележим, че съществува формула от първи ред $\mathcal{K}$ с две свободни променливи такава, че ако $\mathfrak{D}$ има най-малък елемент $\mathbf{0}$, то

$$\mathfrak{D} \models \mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ е } \mathcal{K}\text{-двойка строго над } \mathbf{0} \text{ за } \mathfrak{D}.$$

**Лема 2.4.2.** *Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq, \vee)$ е горна полурешетка и $\mathbf{a}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}$ като $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}$. Тогава класът*

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in \mathbf{D} \mid \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \textit{ е } \mathcal{K}\textit{-двойка над } \mathbf{u} \textit{ за } \mathfrak{D}\}$$

*е идеал*[1].

*Доказателство.* При предположенията на лемата имаме, че класът $\mathcal{I}(\mathbf{u}, \mathbf{a})$ не е празен, понеже съдържа елемента $\mathbf{u}$. За да покажем, че даденият клас е затворен надолу, да предположим, че $\mathbf{b} \in \mathcal{I}(\mathbf{u}, \mathbf{a})$ и да разгледаме произволно $\mathbf{u} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$. Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{D}$ е произволен елемент над $\mathbf{u}$ и $\mathbf{y} \geq \mathbf{u}$ е такъв, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, \mathbf{c} \vee \mathbf{x}$. Тогава $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, \mathbf{b} \vee \mathbf{x}$, което заедно с факта, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуват $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$, влече $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$.

[1] Ще казваме, че непразното множество $\mathcal{I} \subseteq \mathbf{D}$ е *идеал*, ако е затворено надолу относно $\leq$ и относно операцията за точна горна граница $\vee$.

Остава да покажем, че $\mathcal{I}(\mathbf{u},\mathbf{a})$ е затворен по отношение на операцията за точна горна граница. За целта, нека $\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathcal{I}(\mathbf{u},\mathbf{a})$ и $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$ са произволни. Ясно е, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \vee \mathbf{x}$. Да разгледаме произволен елемент $\mathbf{u} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, (\mathbf{b} \vee \mathbf{c}) \vee \mathbf{x}$. Следвайки Определение 2.4.1, достатъчно е да докажем, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. Действително, от това, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуват $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$ получаваме, че

$$\mathbf{c} \vee \mathbf{x} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \vee \mathbf{x}).$$

Имайки, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ образуват $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$, заключаваме, че

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{c} \vee \mathbf{x}).$$

Това, заедно с предишното равенство, влече:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{x}) \wedge [(\mathbf{a} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x})].$$

Сега да забележим, че $\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}$ и, следователно, $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, \mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}, \mathbf{a} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}$. Тогава $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, [(\mathbf{a} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{b} \vee \mathbf{c} \vee \mathbf{x})]$, тъй като последната точна долна граница съществува, и по-точно е равна на $\mathbf{c} \vee \mathbf{x}$. Следователно, $\mathbf{y} \leq \mathbf{a} \vee \mathbf{x}, \mathbf{c} \vee \mathbf{x}$. Накрая, понеже $\mathbf{x} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{x}) \wedge (\mathbf{c} \vee \mathbf{x})$, можем да заключим, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. ■

Да отбележим, че ако $\mathbf{u} < \mathbf{a}$ и усилим в $\mathcal{I}(\mathbf{u},\mathbf{a})$ да участват само тези $\mathbf{b}$, които образуват с $\mathbf{a}$ $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{u}$, то е възможно $\mathcal{I}(\mathbf{u},\mathbf{a})$ да бъде празно. В случай, обаче, че не е такова, отново можем да твърдим, че $\mathcal{I}(\mathbf{u},\mathbf{a})$ е идеал.

В процеса на характеризация на $\mathcal{K}$-двойките за $\mathfrak{D}_\omega$ ще ни бъде необходим следния факт, характеризиращ $\mathcal{K}$-двойките за структурата на номерационните степени $\mathfrak{D}_e$.

**Теорема 2.4.3** (Калимулин, [**10**]). *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_e$ *като* $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$. *Тогава* $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{u}]$ *точно тогава, когато съществуват множества* $A, B$ *и* $U$ *от номерационни степени съответно* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *и* $\mathbf{u}$*, и множество* $W \leq_e U$ *такива, че*

$$A \times B \subseteq W \text{ и } \overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{W}.$$

*Ако, в допълнение,* $\mathbf{u} \lneq \mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{u}'$*, то* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}'$.

**Следствие 2.4.4.** *Нека* $\mathbf{u}, \mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са номерационни степени такива, че* $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{u}'$ *и* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}'$. *Освен това, нека* $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{u}]$. *Тогава за всяко* $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$*, ако* $\mathbf{x} \lneq \mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{b}$*, то*

$$(\mathbf{x} \vee \mathbf{a})' = (\mathbf{x} \vee \mathbf{b})' = \mathbf{x}'.$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{u}, \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са както в предпоставката на твърдението. Нека $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}$ е такова, че $\mathbf{x} \lneq \mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{a}$. Тогава

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{x} \lneq \mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{b} \leq \mathbf{x}' \vee \mathbf{u}' = \mathbf{x}'.$$

Да забележим, че $\{\mathbf{x} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x} \vee \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{x}$ за $\mathfrak{D}_e$. Действително, нека $\mathbf{y} \geq \mathbf{x}$. Тогава

$$((\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \vee \mathbf{y}) \wedge ((\mathbf{x} \vee \mathbf{b}) \vee \mathbf{y}) = \mathbf{x} \vee \mathbf{y} = \mathbf{y}.$$

Сега твърдението следва от Теорема 2.4.3. ■

Продължаваме с две леми, показващи, че операциите скок и обръщане на скока запазват свойството на $\mathcal{K}$-двойките.

**Лема 2.4.5.** *Нека* $n < \omega$ *и* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_\omega$ *са такива, че* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$*. Тогава* $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}'$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}']$*.*

*Доказателство.* Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$, т.е. $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}, \mathbf{b}$ и

$$(\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{u})[\mathbf{x} = (\mathbf{x} \vee \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \vee \mathbf{b})]. \tag{2.4.2}$$

Да разгледаме произволно $\mathbf{x} \geq \mathbf{u}'$ и нека $\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \vee \mathbf{a}', \mathbf{x} \vee \mathbf{b}'$ като без ограничение можем да считаме, че $\mathbf{u}' \leq \mathbf{y}$. От **(I1)** и **(I3)** на Лема 2.2.3 получаваме, че

$$\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{a}'), \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{b}'),$$

и, следователно,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{y}) \vee \mathbf{u} \leq (\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{u}) \vee (\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{a}') \vee \mathbf{u}),& \\ (\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{u}) \vee (\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{b}') \vee \mathbf{u}).& \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Понеже $\mathbf{u} \leq \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{a}') \vee \mathbf{u} \leq \mathbf{a}$ и $\mathbf{u} \leq \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{b}') \vee \mathbf{u} \leq \mathbf{b}$, то $\{\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{a}') \vee \mathbf{u}, \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{b}') \vee \mathbf{u}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$. Така по (2.4.2) и (2.4.3) получаваме, че

$$\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{y}) \vee \mathbf{u} \leq (\mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}) \vee \mathbf{u}).$$

Накрая, възползувайки се от **(I6)** на Лема 2.2.3, можем да заключим верността на лемата,

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}' \vee \mathbf{y} = (\mathbf{u} \vee \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{y}))' \leq (\mathbf{u} \vee \mathbf{I}^1_\mathbf{u}(\mathbf{x}))' = \mathbf{u}' \vee \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

■

**Лема 2.4.6.** *Нека* $n < \omega$ *и* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_\omega$ *са такива, че* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}^{(n)}$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}^{(n)}]$*. Тогава* $\{\mathbf{I}^n_\mathbf{u}(\mathbf{a}), \mathbf{I}^n_\mathbf{u}(\mathbf{b})\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$*.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ удовлетворяват предпоставката на лемата. Нека $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{u}$ са такива, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \vee \mathbf{I}^n_\mathbf{u}(\mathbf{a}), \mathbf{x} \vee \mathbf{I}^n_\mathbf{u}(\mathbf{b})$. **(I6)** на Лема 2.2.3 ни дава,

$$\mathbf{y}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)} \vee \mathbf{a}, \mathbf{x}^{(n)} \vee \mathbf{b}.$$

Така, $\mathbf{y}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)}$. По-нататък, от **(I5)** на Лема 2.2.3 получаваме, че за всяко $k < n$,

$$\lambda_e(\mathbf{y}^{(k)}) \leq \lambda_e((\mathbf{x} \vee \mathbf{I}^n_\mathbf{u}(\mathbf{b}))^{(k)}) = \lambda_e(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Накрая, за да заключим верността на лемата, е достатъчно да използуваме Лема 2.2.1. ■

В следващите две леми е изследвано как изображенията $\lambda_e$ и $\kappa_e$ преминават през понятието за $\mathcal{K}$-двойка.

**Лема 2.4.7.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_\omega$ *са такива, че* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$. *Тогава за всяко* $n < \omega$, $\{\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}), \lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})]$. *Ако, допълнително,* $n < \omega$ *е такова, че* $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})'$, *то* $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})' = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})'$.

*Доказателство.* Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ удовлетворява предпоставката в лемата. Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}, \mathcal{B} \in \mathbf{b}$ и $\mathcal{U} \in \mathbf{u}$ и да разгледаме произволна степен $\mathbf{x}$ от $\mathbf{D}_e[\geq \mathbf{u}^{(n)}]$. Нека $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_e[\geq \mathbf{u}^{(n)}]$ е такова, че

$$\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \vee \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}), \mathbf{x} \vee \lambda_e(\mathbf{b}^{(n)}).$$

Ако $X \in \mathbf{x}$ и $Y \in \mathbf{y}$, то използувайки, че $P^e_n(\mathcal{A}) \in \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$ и $P^e_n(\mathcal{B}) \in \lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})$, получаваме:

$$\begin{aligned}
&(\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, Y, U_{n+1}, \ldots) \leq_\omega \\
&\qquad\leq_\omega (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, P^e_n(\mathcal{A}) \oplus X, U_{n+1}, \ldots) \equiv_\omega \\
&\equiv_\omega (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, P^e_n(\mathcal{A}), U_{n+1}, \ldots) \oplus (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, X, U_{n+1}, \ldots).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
&(\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, Y, U_{n+1}, \ldots) \leq_\omega \\
&\leq_\omega (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, P^e_n(\mathcal{B}), U_{n+1}, \ldots) \oplus (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, X, U_{n+1}, \ldots).
\end{aligned}$$

Понеже $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{u}$, то

$$(\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, Y, U_{n+1}, \ldots) \leq_\omega (\underbrace{U_0, \ldots, U_{n-1}}_{n}, X, U_{n+1}, \ldots).$$

Тогава $Y \leq_e X$ и, следователно, за всяко $n < \omega$, $\{\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}), \lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})\}$ е $\mathcal{K}$-двойка над $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$ за $\mathfrak{D}_e[\geq \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})]$. Оттук, по **[10]**, всяка от степените $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$ и $\lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})$ е или квазиминимална[2] над $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$, или съвпада с $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$.

Нека, накрая, $n$ е такова, че $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})'$. Тогава,

$$\begin{aligned}
&\lambda_e(\mathbf{u}^{(n+1)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})' \leq \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \\
&\qquad\qquad = \deg_e(P^e_n(\mathcal{A}))' \leq \deg_e(P^e_{n+1}(\mathcal{A})) = \lambda_e(\mathbf{a}^{(n+1)}),
\end{aligned}$$

като при това $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})'$ е тотална (както и всяка друга степен, която е в областта от стойностите на операцията скок) номерационна степен. Следователно, за това $n$, $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})'$. Същите разсъждения, очевидно, са в сила и за $\lambda_e(\mathbf{b}^{(n)})$. ■

[2] номерационната степен $\mathbf{a}$ е квазиминимална над номерационната степен $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ точно тогава, когато няма тотална степен $\mathbf{c}$ такава, че $\mathbf{b} \lneq \mathbf{c} \leq \mathbf{a}$.

**Лема 2.4.8.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u} \in \mathbf{D}_e$ *са такива, че* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка строго над* $\mathbf{u}$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{u}]$ *като* $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}'$. *Тогава* $\{\kappa_e(\mathbf{a}), \kappa_e(\mathbf{b})\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка строго над* $\kappa_e(\mathbf{u})$ *за* $\mathfrak{D}_\omega[\geq \kappa_e(\mathbf{u})]$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{u}$ са както в условието на лемата. Да фиксираме $\mathbf{x} \geq \kappa_e(\mathbf{u})$ и нека $\kappa_e(\mathbf{u}) \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a}), \mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a})$ е произволно. Ще покажем, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$. За целта ще разгледаме следните два случая.

Първо, нека $\mathbf{a} \leq \lambda_e(\mathbf{x})$ или $\mathbf{b} \leq \lambda_e(\mathbf{y})$. Двете възможности се разглеждат напълно аналогично, затова ще проследим само този, когато $\mathbf{a} \leq \lambda_e(\mathbf{x})$. Тогава от **(KL2)** на 2.1.2 следва, че

$$\kappa_e(\mathbf{a}) \leq \kappa_e(\lambda_e(\mathbf{x})) \leq \mathbf{x},$$

така, че $\mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a}) = \mathbf{x}$ и, следователно, $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$.

Нека сега $\mathbf{a}, \mathbf{b} \not\leq \kappa_e(\mathbf{x})$. От **(L1)**, **(L2)** и **(KL1)** на Лема 2.1.2 получаваме последователно,

$$\mathbf{u} \leq \lambda_e(\mathbf{x}), \lambda_e(\mathbf{y}),$$

$$\lambda_e(\mathbf{y}) \leq \lambda_e(\mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a})) = \lambda_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{a},$$

$$\lambda_e(\mathbf{y}) \leq \lambda_e(\mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{b})) = \lambda_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{b}.$$

Поради факта, че $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{u}]$, последните две неравенства влекат $\lambda_e(\mathbf{y}) \leq \lambda_e(\mathbf{x})$. Сега според Лема 2.2.1, достатъчно е да покажем, че $\mathbf{y}' \leq \mathbf{x}'$. Поради това, че $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}'$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b} \not\leq \kappa_e(\mathbf{x})$, Следствие 3.1.7 ни дава, че

$$(\lambda_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{a})' = (\lambda_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{b})' = \lambda_e(\mathbf{x})'.$$

Понеже $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}' \leq \lambda_e(\mathbf{x})'$, то $(\lambda_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{a})' = \lambda_e(\mathbf{x})' \vee \mathbf{a}'$. Накрая, използувайки Лема 2.2.4 можем да заключим, че

$$(\mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a}))' = \mathbf{x}' \vee \kappa_e(\mathbf{a})' = \mathbf{x}' \vee \kappa_e(\mathbf{u}') = \mathbf{x}',$$

което заедно с факта, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x} \vee \kappa_e(\mathbf{a})$ влече търсеното $\mathbf{y}' \leq \mathbf{x}'$. ■

По-нататък ще ни бъде необходим следния резултат, касаещ структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени. Цитираният резултат е доказан от Ганчев и М. Соскова в работата [**8**].

**Теорема 2.4.9.** *За всяка тотална степен* $\mathbf{g} \in \mathbf{D}_e$ *и всяка степен* $\mathbf{e} \in \mathbf{D}_e$ *такива, че* $\mathbf{g} \leq \mathbf{e}$ *и* $\mathbf{e}$ *съдържа* $\Delta^0_2$ *относно* $\mathbf{g}$ *множество, съществува* $\mathcal{K}$*-двойка* $\{\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}\}$ *строго над* $\mathbf{g}$ *за* $\mathfrak{D}_e[\mathbf{g}, \mathbf{g}']$, *за която*

$$\widetilde{\mathbf{a}} \vee \mathbf{e} = \widetilde{\mathbf{a}}' = \mathbf{g}'.$$

*В случая, когато* $\mathbf{e} \lneq \mathbf{g}'$ *допълнително имаме, че* $\widetilde{\mathbf{a}}|_e \mathbf{e}$ *и* $\widetilde{\mathbf{b}} \leq \mathbf{e}$ *(понеже* $\mathbf{e} = (\widetilde{\mathbf{a}} \vee \mathbf{e}) \wedge (\widetilde{\mathbf{b}} \vee \mathbf{e})$ *и* $\widetilde{\mathbf{a}} \vee \mathbf{e} = \mathbf{g}'$*).*

**Следствие 2.4.10.** *Нека* $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка над* $\mathbf{0}_\omega$ *за* $\mathfrak{D}_\omega$. *Нека за някое* $n < \omega$, $\mathbf{0}_e^{(n)} \lneq \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$ *и* $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$. *Тогава* $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $n$ са като в условието. Понеже $\mathbf{0}_e^{(n)} \leq \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}) \leq \mathbf{0}_e^{(n+1)}$, то равенството $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$ (т.е. че $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$ е ниско над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ и, следователно, съдържа множество, което е $\Delta_2^0$ релативно $\mathbf{0}_e^{(n)}$) заедно с Теорема 2.4.9 (приложена за $\mathbf{g} = \mathbf{0}_e^{(n)}$ и $\mathbf{e} = \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$), влече съществуването на $\mathbf{0}_e^{(n)} \lneq \mathbf{x} \leq \mathbf{0}_e^{(n+1)}$, за което

$$\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}) \vee \mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}.$$

Следователно, $\mathbf{0}_\omega^{(n)} \leq \kappa_e(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$ и от монотонността на операцията за обръщане на скока получаваме, че $\mathbf{I}^n(\kappa_e(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0}'_\omega$. Нека $\mathbf{a}^- = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})))$. Тогава $\{\mathbf{a}^-, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$, като при това $\mathbf{a}^- \leq \mathbf{0}'_\omega$. Следователно,

$$\mathbf{I}^n(\kappa_e(\mathbf{x})) = (\mathbf{I}^n(\kappa_e(\mathbf{x})) \vee \mathbf{a}^-) \wedge (\mathbf{I}^n(\kappa_e(\mathbf{x})) \vee \mathbf{b}).$$

Оттук, използувайки (2.2.7) и **(I6)** на Лема 2.2.3, получаваме

$$\kappa_e(\mathbf{x}) = (\kappa_e(\mathbf{x}) \vee (\mathbf{a}^-)^{(n)}) \wedge (\kappa_e(\mathbf{x}) \vee \mathbf{b}^{(n)}).$$

Понеже $\kappa_e(\mathbf{x} \leq \mathbf{0}_\omega^{(n+1)})$ и $\mathbf{a}^- \leq \mathbf{0}'_\omega$, то $\kappa_e(\mathbf{x}) \vee (\mathbf{a}^-)^{(n)} \leq \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$. От друга страна, да забележим, че $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}) = \lambda_e((\mathbf{a}^-)^{(n)})$ и, следователно $\lambda_e((\mathbf{a}^-)^{(n)}) \vee \mathbf{x} = \mathbf{x}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$. Тогава

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_\omega^{(n+1)} = \kappa_e(\mathbf{0}_e^{(n+1)}) = \kappa_e(\lambda_e((\mathbf{a}^-)^{(n)}) \vee \mathbf{x}) = \\ = \kappa_e(\lambda_e((\mathbf{a}^-)^{(n)})) \vee \kappa_e(\mathbf{x}) \leq \kappa_e(\mathbf{x}) \vee (\mathbf{a}^-)^{(n)}. \end{aligned}$$

Така, $\kappa_e(\mathbf{x}) \vee (\mathbf{a}^-)^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$. Следователно, $\mathbf{b}^{(n)} \leq \kappa_e(\mathbf{x})$. Но понеже $\kappa_e(\mathbf{x})' = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$, можем да заключим, че $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$. ■

Накрая, за да характеризираме $\mathcal{K}$-двойките в $\mathfrak{D}_\omega$, ще ни бъде необходима следната характеризация на $\mathcal{K}$-двойките в $\mathfrak{G}_\omega$.

**Теорема 2.4.11** (Ганчев, М. Соскова, [8])**.** *Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{G}_\omega$. Тогава е в сила точно едно от двете:*

- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са a.z. степени;*
- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са наследени като има свидетели $A \subseteq \omega$ и $n < \omega$ за $\mathbf{a}$ и $B \subseteq \omega$ и $n < \omega$ за $\mathbf{b}$ такива, че $\{deg_e(A), deg_e(B)\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_e$ за $\mathfrak{D}_e[\mathbf{0}_e^{(n)}, \mathbf{0}_e^{(n+1)}]$.*

Да отбележим, че определенията на оператора за обръщане на скока $I^n_{\emptyset_\omega}$ и на влагането $\kappa_e$, заедно с горната теорема, влекат, че ако $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{G}_\omega$ като поне едно измежду $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не е *a.z.*, то съществуват естествено число $n$ и $\mathcal{K}$-двойка $\{\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}\}$ строго над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ за $\mathfrak{D}_e[\mathbf{0}_e^{(n)}, \mathbf{0}_e^{(n+1)}]$ със свойството $\widetilde{\mathbf{a}}' = \widetilde{\mathbf{b}}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$ такива, че

$$\mathbf{a} = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\widetilde{\mathbf{a}})) \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\widetilde{\mathbf{b}})).$$

Характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките за $\mathfrak{D}_\omega$ е в духа на Теорема 2.4.11.

**Теорема 2.4.12.** *Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$. Тогава е в сила точно едно от двете:*

- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са* $a.z.$ *степени;*
- $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са наследени като има свидетели* $A \subseteq \omega$ *и* $n < \omega$ *за* $\mathbf{a}$ *и* $B \subseteq \omega$ *и* $n < \omega$ *за* $\mathbf{b}$ *такива, че* $\{deg_e(A), deg_e(B)\}$ *е* $\mathcal{K}$*-двойка строго над* $\mathbf{0}_e$ *за* $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{0}_e^{(n)}]$.

*Доказателство.* Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ удовлетворява предпоставката в теоремата. Да предположим, че поне една от степените $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ не е $a.z.$. Без да ограничаваме общността на разглежданията, да предположим, че $\mathbf{a}$ не е $a.z.$ степен и да разгледаме редица $\mathcal{A}$ в $\mathbf{a}$. Следователно, съществува $n < \omega$ такова, че $P_n^e(\mathcal{A}) \not\equiv_e \emptyset^{(n)}$. По Лема 2.4.7 имаме, че $\mathbf{0}_e^{(n)} \lneq \deg_e(P_n^e(\mathcal{A})) \leq \mathbf{0}_e^{(n+1)}$ като $\deg_e(P_n^e(\mathcal{A}))' = \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$.

Нека $\mathbf{a}^-$ е $\omega$-номерационната степен, която съдържа редицата

$$(\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{n}, P_n^e(\mathcal{A}), \emptyset, \ldots).$$

Да забележим, че $\mathbf{a}^-$ е под $\mathbf{0}'_\omega$ и, че $\{\mathbf{a}^-, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$. Така Следствие 2.4.10 ни дава, че $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$. Оттук, забелязвайки, че $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_\omega$ и припомняйки си, че за всяка ненулева $a.z.$ степен $\mathbf{p}$ и всяко $n < \omega$, $\mathbf{p}^{(n)} \not\leq \mathbf{0}_\omega^{(n)}$, можем да заключим, че $\mathbf{b}$ също не е $a.z.$ степен.

Следователно, съществува $m < \omega$ такова, че $P_m^e(\mathcal{B}) \not\equiv_e \emptyset^{(m)}$. Нека $\mathbf{b}^-$ е степента, съдържаща редицата

$$(\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{m}, P_m^e(\mathcal{B}), \emptyset, \ldots).$$

Тогава $\mathbf{a}^-, \mathbf{b}^- \leq \mathbf{0}'_\omega$ и $\{\mathbf{a}^-, \mathbf{b}^-\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$. Да забележим, че $\{\mathbf{a}^-, \mathbf{b}^-\}$ също е и $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{G}_\omega$, чийто елементи не са $a.z.$ степени. От характеризацията в Теорема 2.4.11 заключаваме, че $m = n$. Поради избора на $n$ и $m$ имаме, че за всяко $k \neq n$,

$$P_k^e(\mathcal{A}) \equiv_e P_k^e(\mathcal{B}) \equiv_e \emptyset^{(k)}.$$

Следователно, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^- \vee \mathbf{p}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}^- \vee \mathbf{q}$, където $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ са $a.z.$. Но $\mathbf{p} \leq \mathbf{a}$ така, че ако $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}_\omega$, то $\{\mathbf{p}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$. Тогава, понеже $\mathbf{b}$ не е $a.z.$ степен, Следствие 2.4.10 ще ни изведе до противоречието, че $\mathbf{p}$ също не е $a.z.$. Следователно $\mathbf{p}$ е равно на $\mathbf{0}_\omega$. Аналогично, $\mathbf{q} = \mathbf{0}_\omega$ и така $\mathbf{a} = \mathbf{a}^-, \mathbf{b} = \mathbf{b}^-$. С това теоремата е доказана. ■

Отново, също както при характеризацията на Калимулиновите двойки за локалната подструктура $\mathfrak{G}_\omega$, определенията на оператора за обръщане на скока $I_{\emptyset_\omega}^n$ и на влагането $\kappa_e$ ни дават, че ако $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$ като поне едно измежду $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не е $a.z.$, то съществуват естествено число $n$ и $\mathcal{K}$-двойка $\{\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}\}$ строго над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ за $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{0}_e^{(n)}]$ със свойството $\widetilde{\mathbf{a}}' = \widetilde{\mathbf{b}}' = \mathbf{0}_e^{(n+1)}$ такива, че

$$\mathbf{a} = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\widetilde{\mathbf{a}})) \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{I}^n(\kappa_e(\widetilde{\mathbf{b}})).$$

Накрая, да отбележим едно тривиално, но полезно наблюдение. Не е трудно да се види, че всички $\mathcal{K}$-двойки строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$, които не съдържат $a.z.$ степени, се състоят от елементи, ограничени отгоре от $\mathbf{0}'_\omega$.

## 2.5. Определимост на $\mathbf{0}'_\omega$

В този раздел ще разгледаме въпроса за определимостта от първи ред на първия скок $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$ на $\mathfrak{D}_\omega$. За целта ще използваме характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките от предишния раздел, както и някои свойства на $a.z.$ и наследените степени. До края на този раздел, с цел облекчаване на изложението, под $\mathcal{K}$-двойка ще имаме предвид $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{D}_\omega$. Под $a.z.$ $\mathcal{K}$-двойка ще разбираме $\mathcal{K}$-двойка и двата елемента, на която са $a.z.$ степени. $\mathcal{K}$-двойките, за които съществува $n < \omega$ такова, че елементите и са $n$-наследени и номерационните степени на съответните свидетели за тази наследеност образуват $\mathcal{K}$-двойка над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ за $\mathfrak{D}_e[\geq \mathbf{0}_e^{(n)}]$, ще наричаме *наследени*. Според Теорема 2.4.12, $a.z.$ и наследените $\mathcal{K}$-двойки изчерпват всички $\mathcal{K}$-двойки.

Да се спрем първо върху характеризацията на $\mathcal{K}$-двойките от Теорема 2.4.12. Според нея, елементите на всяка наследена $\mathcal{K}$-двойка са под $\mathbf{0}'_\omega$ и, следователно, точната горна граница на елементите на такива $\mathcal{K}$-двойка също е под $\mathbf{0}'_\omega$. Оказва се, че $\mathbf{0}'_\omega$ е точна горна граница на елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка. За да докажем това, ще ни бъде нужен следният резултат за структурата на номерационните степени, доказан от Калимулин в **[10]**.

**Теорема 2.5.1.** *За всяко $\mathbf{u} \in \mathbf{D}_e$ съществува $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ строго над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}_e$ такава, че*

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \mathbf{u}' \text{ и } \mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{u}'.$$

Следователно, $\mathbf{0}'_e$ може да бъде представена като точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка $\{\widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}\}$ строго над $\mathbf{0}_e$ за $\mathfrak{D}_e$ такава, че $\widetilde{\mathbf{a}}$ и $\widetilde{\mathbf{b}}$ са ниски. Тогава от Лема 2.4.8 получаваме, че $\{\kappa_e(\widetilde{\mathbf{a}}), \kappa_e(\widetilde{\mathbf{b}})\}$ е наследена $\mathcal{K}$-двойка с $\kappa_e(\widetilde{\mathbf{a}}) \vee \kappa_e(\widetilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}'_\omega$.

Накрая, ще се възползуваме от резултатите от Раздел 2.3 за да отделим с формула от първи ред $a.z.$ от наследените $\mathcal{K}$-двойки. Да припомним, че ако една ненулева степен е наследена, то тя задължително ограничава ненулева неразделима степен. Ако пък една ненулева степен е $a.z.$, то задължително ненулевите степени, които са ограничени от нея, са разделими. Да забележим също, че и двата елемента на наследена $\mathcal{K}$-двойка са винаги наследени степени. Така една $\mathcal{K}$-двойка е наследена точно тогава, когато всеки един от елементите ѝ ограничава ненулева неразделима степен. Следователно за всеки $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_\omega$,

$$\mathfrak{D}_\omega \models \mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ е наследена } \mathcal{K}\text{-двойка},$$

където в ролята на $\mathcal{K}_{inh}$ може да бъде взета формулата,

$$\mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathcal{K}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \ \& \ (\exists \mathbf{x})[\mathbf{0}_\omega \lneq \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \ \& \\ \& \ (\forall \mathbf{u},\mathbf{v})[\mathbf{u},\mathbf{v} < \mathbf{x} \to \mathbf{u} \vee \mathbf{v} < \mathbf{x}]].$$

Тогава $\mathbf{0}'_\omega$ може да бъде определено като най-голямата степен, която е точна горна граница на елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка. Така получаваме следната теорема.

**Теорема 2.5.2.** *Скокът $\mathbf{0}'_\omega$ на най-малкия елемент $\mathbf{0}_\omega$ на $\mathfrak{D}_\omega$ е определим с формула от първи ред в структурата $\mathfrak{D}_\omega$.*

Въпросът дали самата операция $'$ за скок е определима от първи ред все още остава отворен. Оказва се, обаче, че скокът е определим върху тези степени от $\mathfrak{D}_{e,1}$, които имат тотален праобраз под действието на влагането $\kappa_e$. Наистина, получените характеризации на Калимулиновите двойки над $\mathbf{0}_\omega$, както за локалната структура $\mathfrak{G}_\omega$, така и за глобалната $\mathfrak{D}_\omega$, разчитат основно на следния факт за степента $\mathbf{0}_\omega$. Винаги, когато изберем Калимулинова двойка над $\mathbf{0}_\omega$, която има елемент $\mathbf{a}$, който не е $a.z.$, то за всяко $n$, свидетелствуващо за последното[3], е в сила, че $\lambda_e(\mathbf{0}_\omega^{(n)}) = \mathbf{0}_e^{(n)}$ е тотална номерационна степен и, че $\lambda_e(\mathbf{0}_\omega^{(n)})' = \mathbf{0}_e^{(n+1)} = \lambda_e(\mathbf{0}_\omega^{(n+1)})$. Така класът на степените, за които е възможна релативизация на горните резултати, се състои точно от степените $\mathbf{u}$ такива, че всеки път, когато изберем Калимулинова двойка над $\mathbf{u}$, която има елемент, който не е $a.z.$ относно $\mathbf{u}$[4], то за всяко $n$, свидетелствуващо за последното, е в сила, че $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$ е тотална номерационна степен и, че $\lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})' = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n+1)})$. Сега, не е трудно да се забележи, че Лемите 2.4.8 и 2.4.6, ни позволяват да твърдим, че класът на степените $\mathbf{u} \in \mathbf{D}_\omega$, за които можем да релативизираме, съвпада именно с класа $\{\kappa_e(\iota(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T\}$[5].

## 2.6. Локална теория. Степените $\mathbf{o}_n$

Както е прието, под локална теория ще разбираме теорията на степените заключени в интервала между най-малката $\omega$-номерационна степен и нейния първи скок. Както се условихме по-рано, с $\mathbf{G}_\omega$ ще означаваме съвкупността от $\omega$-номерационните степени под $\mathbf{0}'_\omega$, т.е.

$$\mathbf{G}_\omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_\omega\},$$

а с $\mathfrak{G}_\omega$ – структурата $(\mathbf{G}_\omega, \leq)$ с индуцирана наредба от $\mathfrak{D}_\omega$.

---

[3] т.е., че $\mathbf{0}_e^{(n)} < \lambda_e(\mathbf{a}^{(n)})$

[4] Понятието за $a.z.$ степен тривиално се релативизира над произволна степен: $\mathbf{a}$ е $a.z.$ относно $\mathbf{u}$, ако за всяко $n < \omega$, $\lambda_e(\mathbf{a}^{(n)}) = \lambda_e(\mathbf{u}^{(n)})$

[5] защото за всяко $n$ можем да изберем наследена относно $\mathbf{u}$ Калимулинова двойка над $\mathbf{u}$ за $\mathfrak{D}_\omega[\geq \mathbf{u}]$, за чиято наследеност, а следователно и за не $a.z.$-тостта ѝ относно $\mathbf{u}$, ще свидетелствува именно това $n$.

Да припомним, че степен в локалната структура е *$n$-висока* за някое $n$, ако $n$-тият и скок е възможно най-голям. Аналогично, степен в локалната структура е *$n$-ниска* за някое $n$, ако $n$-тият и скок е възможно най-малък. Формално, степента $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_\omega$ е $n$-висока, ако

$$\mathbf{a}^{(n)} = (\mathbf{0}'_\omega)^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)},$$

и е $n$-ниска, ако

$$\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n)}.$$

Осланяйки се на общоприетите означения, с $\mathbf{H}_n$ ще бележим съвкупността на всички $n$-високи степени, а с $\mathbf{L}_n$ – съвкупността на всички $n$-ниски степени. По-нататък $\mathbf{H}$ ще означава обединението на класовете $\mathbf{H}_n$ и аналогично $\mathbf{L}$ ще бележи обединението на класовете $\mathbf{L}_n$. Накрая, с $\mathbf{I}$ ще обозначаваме съвкупността на степените в $\mathbf{G}_\omega$, които не са нито $n$-високи, нито $n$-ниски за никое $n$. Степените в $\mathbf{I}$ ще наричаме *междинни*.

Използувайки аналогични резултати за структурата $\mathfrak{D}_e$ на номерационните степени, може лесно да се покаже, че съществуват междинни степени и, че за всяко естествено число $n$, съществуват степени в $\mathbf{G}_\omega$, които са $(n+1)$-високи (съответно $(n+1)$-ниски), но не са $n$-високи (съответно $n$-ниски).

В **[39]** Сосков и Ганчев дават характеризация на класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, която не включва директно операцията скок. За тази цел те използват един клас от експлицитно дефинирани елементи на $\mathbf{G}_\omega$. Действително, нека $\mathbf{o}_n$ е най-малката степен, чийто $n$-ти скок е равен на $\mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$, т.е.

$$\mathbf{o}_n = \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_\omega^{(n+1)}).$$

Понеже $\mathbf{o}_n^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)} = (\mathbf{0}'_\omega)^{(n)}$, то $\mathbf{o}_n \leq \mathbf{0}'_\omega$, т.е. $\mathbf{o}_n \in \mathbf{G}_\omega$. Тъй като оператора $\mathbf{I}^n$ е определим с формула от първи ред в структурата $\mathfrak{D}'_\omega$, то такава ще бъде и всяка една от степените $\mathbf{o}_n$.

За да намерим експлицитен представител на степента $\mathbf{o}_n$, достатъчно е да отбележим, че

$$(\emptyset^{(n+1)}, \emptyset^{(n+2)}, \emptyset^{(n+3)}, \ldots) \in \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}.$$

Тогава, от явното определение на оператора за обръщане на скока (2.2.4), и свойството (2.2.5), получаваме

$$(\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{n}, \emptyset^{(n+1)}, \emptyset^{(n+2)}, \ldots) \in \mathbf{o}_n. \tag{2.6.1}$$

Понеже $\mathbf{o}_n$ е най-малката степен, чийто $n$-ти скок е равен на $(n+1)$-скок на най-малкия елемент, и поради факта, че степените в $\mathbf{G}_\omega$са ограничени от $\mathbf{0}'_\omega$, можем да заключим, че за всяка степен $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega$,

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}_\omega^{(n+1)} \iff \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}.$$

Следователно, $\mathbf{o}_n$ е най-малкият елемент в класа $\mathbf{H}_n$ като е в сила характеризацията

$$(2.6.2)\qquad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega)[\mathbf{x} \in \mathbf{H}_n \iff \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}].$$

В частност, понеже всяка $n$-висока степен е също и $(n+1)$-висока, то $\mathbf{o}_{n+1} \leq \mathbf{o}_n$. От друга страна, понеже $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n \neq \emptyset$, то равенството $\mathbf{o}_{n+1} = \mathbf{o}_n$ е невъзможно. Следователно, степените $\mathbf{o}_n$ образуват строго намаляваща редица, т.е.

$$\mathbf{0}'_\omega = \mathbf{o}_0 > \mathbf{o}_1 > \mathbf{o}_2 > \cdots > \mathbf{o}_n > \ldots .$$

От **(I2)** на Лема 2.2.3 имаме, че ако $\mathbf{y} \leq \mathbf{o}_n$, то $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{y}^{(n)})$. В частност, $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{z})$ за някое $\mathbf{0}_\omega^{(n)} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}$. Обратно, ако $\mathbf{y} \in \mathbf{G}_\omega$ е равно на $\mathbf{I}^n(\mathbf{z})$ за някое $\mathbf{z}$, то от монотоността на $\mathbf{I}^n$ следва, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{o}_n$. Така

$$\{\mathbf{y} \in \mathbf{G}_\omega \mid \mathbf{y} \leq \mathbf{o}_n\} = \{\mathbf{I}^n(\mathbf{z}) \mid \mathbf{0}_\omega^{(n)} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}\}.$$

В частност, понеже $\mathbf{I}^n$ е инективна,

$$[\mathbf{0}_\omega, \mathbf{o}_n] \simeq [\mathbf{0}_\omega^{(n)}, \mathbf{0}_\omega^{(n+1)}].$$

В **[8]** Ганчев и Соскова показват, че за произволно $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega$,

$$(2.6.3)\qquad \mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n.$$

Действително, нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega$. Ясно е, че $\mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) \leq \mathbf{o}_n$. Обратно, ако $\mathbf{y}$ е такова, че $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{y} \leq \mathbf{o}_n$, то от второто неравенство получаваме $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{z})$ за някое $\mathbf{z}$. Това, заедно с първото, ни дава, че $\mathbf{z} = (\mathbf{I}^n(\mathbf{z}))^{(n)} = \mathbf{y}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)}$. Така $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{z}) \leq \mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)})$.

Оттук получаваме характеризация на $n$-ниските степени в термините на частичната наредба $\leq$ и степените $\mathbf{o}_n$. По-конкретно,

$$(2.6.4)\qquad \mathbf{x} \in \mathbf{L}_n \iff \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_\omega.$$

Оказва се, че степента $\mathbf{o}_1$ е достатъчна за да характеризира степените под $\mathbf{0}'_\omega$, които са образ на номерационна степен под действието на влагането $\kappa_e$. Наистина, отново в работата **[8]** е показано, че една степен $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_\omega$ е в $\mathbf{D}_{e,1}$ точно тогава, когато

$$(2.6.5)\qquad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega)[\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_1 = \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_1 \to \mathbf{x} \geq \mathbf{a}].$$

В остатъка от този раздел ще насочим вниманието си върху $a.z.$ степените в локалната теория. Да припомним, че степента $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_\omega$ наричаме $a.z.$, ако съществува редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че

$$(\forall k)[P_k^e(\mathcal{X}) \equiv_e \emptyset^{(k)}].$$

Да отбележим, че не всички $a.z.$ степени са в $\mathbf{G}_\omega$. Сосков и Ганчев показват в **[39]**, че $a.z.$ степените под $\mathbf{0}'_\omega$ могат да бъдат характеризирани в термините на степените $\mathbf{o}_n$,

$$(2.6.6)\qquad \mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega \text{ е } a.z. \iff (\forall n < \omega)[\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n].$$

В същата работа Сосков и Ганчев успяват да намерят характеризация на класовете $\mathbf{H}$ и $\mathbf{L}$ в термините на наредбата $\leq$ и $a.z.$ степените. Именно, за всяка степен $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_\omega$,

$$\mathbf{a} \in \mathbf{H} \iff (\forall \mathbf{x} - a.z.)[\mathbf{x} \leq \mathbf{a}], \tag{2.6.7}$$

и

$$\mathbf{a} \in \mathbf{L} \iff (\forall \mathbf{x} - a.z.)[\mathbf{x} \leq \mathbf{a} \to \mathbf{x} = \mathbf{0}_\omega]. \tag{2.6.8}$$

От втората еквивалентност следва, че единствената $n$-ниска $a.z.$ степен е $\mathbf{0}_\omega$. Но от (2.6.2), никоя $a.z.$ степен не е $n$-висока за никое $n$. Следователно всички ненулеви $a.z.$ степени под $\mathbf{0}'_\omega$ са междинни, т.е. са от класа $\mathbf{I}$.

## 2.7. Определимост на скок класове в локалната теория

В този раздел ще се съсредоточим върху въпросите за определимост от първи ред в локалната подструктура $\mathfrak{G}_\omega$ на някои класове от степени, първично определени в термините на операцията скок. Основна роля тук ще играят нетривиалните $\mathcal{K}$-двойки за $\mathfrak{G}_\omega$. Според по-рано цитирана тяхна характеризация, една такава двойка се състои или от $a.z.$ степени, или от $n$-наследени степени, за някое естествено число $n$. Използувайки тази характеризация, Ганчев и М. Соскова показват, че за всяко $n$, $\mathbf{o}_n$ е най-голямата степен в $\mathfrak{G}_\omega$, която е точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка за $\mathfrak{G}_\omega$ и удовлетворяваща допълнително условие от първи ред. По този начин е получено определение от първи ред в $\mathfrak{G}_\omega$ на всяка една от степените $\mathbf{o}_n$. Тази определимост, заедно с характеризациите (2.6.2) и (2.6.4), влече определимостта на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, $n < \omega$. Нашата цел е да намерим дефиниция от първи ред на класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$ в подструктурата $\mathfrak{G}_\omega$. За целта е достатъчно да определим множеството $\mathfrak{O} = \{\mathbf{o}_n | n < \omega\}$ в $\mathfrak{G}_\omega$. Действително, за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_\omega$ е в сила, че

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \in \mathbf{H} \iff (\exists n < \omega)[\mathbf{x} \in \mathbf{H}_n] \iff \\ \iff (\exists n < \omega)[\mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}] \iff (\exists \mathbf{o} \in \mathfrak{O})[\mathbf{o} \leq \mathbf{x}].\end{aligned}$$

Подобно основание може да се използува и за класа $\mathbf{L}$. За да определим пък $\mathbf{I}$ е достатъчно да забележим изразяването $\mathbf{I} = \mathbf{G}_\omega - (\mathbf{H} \cup \mathbf{L})$.

За да определим множеството $\mathfrak{O}$ ще изследваме отношенията на елементите му с $\mathcal{K}$-двойките за $\mathfrak{G}_\omega$. С цел облекчаване на изложението, до края на този раздел под $\mathcal{K}$-двойка ще разбираме $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_\omega$ за $\mathfrak{G}_\omega$. Както споменахме неведнъж, възможностите за всяка $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ се изчерпват от следните два непресичащи се случая:

- $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са $a.z.$ степени ($\mathcal{K}$-двойки с такива елементи до края на този раздел ще наричаме $a.z.$);

- $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са $n$-наследени, за някое $n < \omega$, със свидетели съответно $A$ и $B$ като при това $\{\deg_e(A), \deg_e(B)\}$ е $\mathcal{K}$-двойка строго над $\mathbf{0}_e^{(n)}$ за $\mathfrak{D}_e[\mathbf{0}_e^{(n)}, \mathbf{0}_e^{(n+1)}]$ ( $\mathcal{K}$-двойки с такива елементи до края на този раздел ще наричаме наследени).

В [**8**] е показано, че всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{G}_\omega$, които изпълняват условията от втория случай, образуват наследена $\mathcal{K}$-двойка.

Както бе споменато вече, използувайки характеризацията от погоре, може да се намери определение в $\mathfrak{G}_\omega$ от първи ред на всяка една от степените $\mathbf{o}_n$. Именно, за всяко $n < \omega$, $\mathbf{o}_{n+1}$ е най-голямата степен (в $\mathfrak{G}_\omega$), която е точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ такава, че

$$(\forall \mathbf{x} \lneq \mathbf{o}_n)[\mathbf{a} \vee \mathbf{x} \lneq \mathbf{o}_n].$$

Да забележим, че по Лема 7 от [**8**], $\mathbf{o}_0 = \mathbf{0}_\omega'$ също е точна горна граница на елементите на $\mathcal{K}$-двойка.

От характеризацията на *a.z.* степените в локалната теория и от монотонността на редицата $\{\mathbf{o}_n\}_{n<\omega}$, е ясно, че за никое $n < \omega$, $\mathbf{o}_n$ не може да бъде точна горна граница на елементите на *a.z.* $\mathcal{K}$-двойка. Използувайки резултатите от раздел 2.3, можем да отделим наследените $\mathcal{K}$-двойки от *a.z.* $\mathcal{K}$-двойките. Да припомним, че ако една степен е наследена, то съществува ненулева неразделима степен под нея. В случая на *a.z.* степените, това не е вярно – всяка ненулева степен ограничена от *a.z.* степен е разделима. Следователно, също както в Раздел 2.5 заключаваме, че съществува формула $\mathcal{K}_{inh}$ от първи ред с две свободни променливи такава, че за всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{G}_\omega$,

$$\mathfrak{G}_\omega \models \mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \iff \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \text{ е наследена } \mathcal{K}\text{-двойка.}$$

По-точно, можем да вземем

$$\mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathcal{K}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ \&\ (\exists \mathbf{x}) \\ [\mathbf{0}_\omega \lneq \mathbf{x} \leq \mathbf{a} \ \&\ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{u}, \mathbf{v} <_\omega \mathbf{x} \to \mathbf{u} \vee \mathbf{v} <_\omega \mathbf{x}]].$$

Следващата ни задача е да разграничим (със свойство от първи ред) степените $\mathbf{o}_n, n < \omega$ от всички останали степени в $\mathbf{G}_\omega$, които са точни горни граници на елементи на наследена $\mathcal{K}$-двойка. За целта ще изследваме възможните начини, по които точната горна граница на елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка може да се отнася към елементите на наследена $\mathcal{K}$-двойка. Случаят, когато точната горна граница е елемент на $\mathfrak{O}$ е разгледан в следващата Лема.

**Лема 2.7.1.** *Нека $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ наследена $\mathcal{K}$-двойка. Тогава за всяко $n < \omega$ е в сила точно един от случаите:*

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} < \mathbf{o}_n$;
- $\mathbf{a}, \mathbf{b} |_\omega \mathbf{o}_n$.

*Доказателство.* Нека $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ е наследена $\mathcal{K}$-двойка и нека $A, B \subseteq \omega$ и $m < \omega$ са свидетели за това. Използувайки, че

$$(\underbrace{\emptyset,\ldots,\emptyset}_{n},\emptyset^{(n+1)},\emptyset,\ldots) \in \mathbf{o}_n$$

стигаме до извода, че ако $n \leq m$, то $\mathbf{a},\mathbf{b} < \mathbf{o}_n$. Когато пък $n > m$ имаме, че

$$\mathbf{a},\mathbf{b} \not\leq \mathbf{o}_n \text{ и } \mathbf{o}_n \not\leq \mathbf{a},\mathbf{b},$$

защото в противен случай бихме получили, че $A \leq_e \emptyset^{(m)}$ и $\emptyset^{(n+1)} \leq_e \emptyset^{(n)}$ съответно. Следователно, за всяко $n < \omega$ и всяка наследена $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, или $\mathbf{a},\mathbf{b} < \mathbf{o}_n$, или $\mathbf{a},\mathbf{b}|_\omega \mathbf{o}_n$. ■

Оказва се, че винаги когато точната горна граница не е от множеството $\mathfrak{O}$, то можем да построим наследена $\mathcal{K}$-двойка, чиито елементи не се отнасят към точната горна граница по никой от двата начина описани в горната Лема.

**Лема 2.7.2.** *Нека* $\mathbf{x}$ *е точна горна граница на елементите на наследена* $\mathcal{K}$*-двойка като за всяко* $n < \omega$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}_n$. *Тогава съществува наследена* $\mathcal{K}$*-двойка* $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ *такава, че* $\mathbf{a}|_\omega \mathbf{x}$ *и* $\mathbf{b} \leq \mathbf{x}$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x}$ е както в условието на лемата. Да предположим, че $\mathbf{x}$ е точната горна граница на наследената $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{c},\mathbf{d}\}$ като множествата $C, D$ и естественото число $n$ са свидетелите за наследеността и. Тогава редицата

$$(\underbrace{\emptyset,\ldots,\emptyset}_{n},C\oplus D,\emptyset,\ldots)$$

е елемент на степента $\mathbf{x}$. Да забележим, че $C \oplus D \lneq_e \emptyset^{(n+1)}$. Понеже $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ не са *a.z.*, то $C$ и $D$ са ниски над $\emptyset^{(n)}_e$ и, следователно[6],

$$C, D \in \Delta^0_2(\emptyset^{(n)}).$$

Но тогава също $C \oplus D \in \Delta^0_2(\emptyset^{(n)})$.

Нека $\{\widetilde{\mathbf{a}},\widetilde{\mathbf{b}}\}$ е съответната $\mathcal{K}$-двойка от Теорема 2.4.9 приложена за $\mathbf{g} = \mathbf{0}^{(n)}_e$ и $\mathbf{e} = \deg_e(C \oplus D)$. Да разгледаме множества $A$ и $B$ съответно от степени $\widetilde{\mathbf{a}}$ и $\widetilde{\mathbf{b}}$. Тогава $\omega$-номерационните степени

$$\mathbf{a} = \deg_\omega(\underbrace{\emptyset,\ldots,\emptyset}_{n},A,\emptyset,\ldots)$$

и

$$\mathbf{b} = \deg_\omega(\underbrace{\emptyset,\ldots,\emptyset}_{n},B,\emptyset,\ldots)$$

[6]Тук използуваме следната характеризация на ниските над $B$ множества (т.е. на тези множества $A$, за които $B \leq_e A$ и $A' \equiv_e B'$), дължаща се на Cooper и McEvoy, [**18**]:

$$A \text{ е ниско над } B \iff \text{за всяко } i < \omega, W_i(A) \text{ е } \Delta^0_2 \text{ относно } B.$$

В частност, ако $A$ е ниско над $B$ множество, то $A$ е $\Delta^0_2$ относно $B$.

образуват наследена $\mathcal{K}$-двойка за $\mathfrak{G}_\omega$, която притежава желаните свойства. ■

Така показахме, че дадена степен $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_\omega$ е $\mathbf{o}_n$ за някое естествено число $n$ точно тогава, когато $\mathbf{x}$ е точна горна граница на наследена $\mathcal{K}$-двойка и за всяка наследена $\mathcal{K}$-двойка $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ или $\mathbf{a}, \mathbf{b} < \mathbf{x}$, или $\mathbf{a}, \mathbf{b}|_\omega \mathbf{x}$. Именно,

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{O} \iff (\exists \mathbf{a}, \mathbf{b})[\mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \ \& \ \mathbf{x} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}] \&$$
$$(\forall \mathbf{a}, \mathbf{b})[\mathcal{K}_{inh}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{x} \ \vee \ \mathbf{a}, \mathbf{b}|_\omega \mathbf{x}].$$

Това ни дава определимостта от първи ред в $\mathcal{G}_\omega$ на множеството $\mathfrak{O}$, а следователно, и на класовете $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ и $\mathbf{I}$.

**Теорема 2.7.3.** *Всеки един от класовете* $\mathbf{H}, \mathbf{L}$ *и* $\mathbf{I}$ *е определим с формула от първи ред в локалната подструктура* $\mathfrak{G}_\omega$.

Определимостта на множеството $\mathfrak{O}$, заедно с (2.6.6) директно влекат следващото следствие.

**Следствие 2.7.4.** *Множестовото на a.z. степените под* $\mathbf{0}'_\omega$ *е определимо с формула от първи ред в локалната подструктура* $\mathfrak{G}_\omega$.

Глава 3

# $\omega$-Тюрингови степени

Тази глава е посветена на структурата на $\omega$-Тюринговите степени $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Първо, в Раздел 3.1 ще въведем релация на предпнаредба $\leq_{T,\omega}$ между редици от множества от естествени числа и ще дефинираме понятието за $\omega$-Тюрингова степен. Ще покажем, че по отношение на индуцираната от $\leq_{T,\omega}$ частична наредба, $\omega$-Тюринговите степени образуват горна полурешетка с най-малък елемент. Ще бъдат изследвани основните свойства на релацията $\leq_{T,\omega}$. След това, в Раздел 3.2 ще покажем съществуването на естествено влагане $\kappa_T$ на Тюринговите степени в $\omega$-Тюринговите степени. В Раздел 3.3 ще въведем оператор скок и ще покажем, че е съгласуван с влагането $\kappa_T$. В 3.4 е показано наличието на естествено влагане $\iota_\omega$ на $\omega$-Тюринговите степени в $\omega$-номерационните степени като операцията скок отново е съгласувана с това влагане.

Раздел 3.5 установява една теорема за най-малко обръщане на скока, с чиято помощ в следващите два раздела е установено последователно определимостта от първи ред на изоморфното копие под действието на влагането $\kappa_T$ на Тюринговите степени в структурата $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ с добавена операция скок и изоморфността на групите на автоморфизмите на $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$.

Следващият Раздел 3.8 е посветен на почти нулевите $(a.z.)$ степени. В Раздел 3.9 е направена характеризация на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ в термините на минималните ниски покрития в структурата $\mathfrak{D}_T$ на Тюринговите степени.

В последните два раздела сме съсредоточили вниманието си върху подструктурата на степените под първия скок на най-малкия елемент. Показани са няколко резултата за определимост, измежду които и определимостта на всяко ниво от скок йерархията (т.е. на класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, за всяко $n < \omega$).

Резултатите от тази глава са съвместни с Христо Ганчев и са представени в публикацията [**30**].

С цел облекчаване на изложението, в тази глава, ако $X$ е множество от естествени числа, то с $X'$ ще бележим Тюринговия скок $X'_T$ на множеството $X$. По-общо, $X^{(n)}$ ще бележи $n$-тия Тюрингов скок $X^{(n)}_T$ на $X$.

## 3.1. Дефиниция и основни свойства

Да припомним, че с $\mathcal{S}_\omega$ означаваме множеството на всички редици с дължина $\omega$, състоящи се от множества от естествени числа. С $\emptyset_\omega$ бележим редицата $\{\emptyset\}_{k<\omega}$.

Също както при $\omega$-номерационната сводимост, и при $\omega$-Тюринговата такава, основна роля заема понятието за скок-клас. Главната разлика е, че тук скок-класовете са породени от релацията за Тюрингова сводимост, вместо тази за рекурсивна номеруемост в.

**Определение 3.1.1.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е елемент на $\mathcal{S}_\omega$. Тюрингов скок-клас (Т-скок-клас) на редицата $\mathcal{A}$ ще наричаме множеството*

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{deg_T(X) \mid A_k \leq_T X^{(k)} \text{ равномерно по } k\}.$$

С помощта на скок-класовете дефинираме две бинарни релации в $\mathcal{S}_\omega$.

**Определение 3.1.2.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Ще казваме, че редицата $\mathcal{A}$ е $\omega$-Тюрингово сводима към редицата $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$, ако $\mathfrak{J}^T(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$. Ще казваме, че редицата $\mathcal{A}$ е $\omega$-Тюрингово еквивалентна на редицата $\mathcal{B}$ и ще записваме $\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} \mathcal{B}$, ако $\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \mathfrak{J}^T(\mathcal{B})$.*

От дефиницията е ясно, че релацията $\leq_{T,\omega}$ е преднаредба, т.е. тя е рефлексивна и транзитивна, а $\equiv_{T,\omega}$ е релация на еквивалентност, като при това е изпълнено, че

$$\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \,\&\, \mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}. \tag{3.1.1}$$

Множеството

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega \mid \mathcal{A} \equiv_{T,\omega} \mathcal{B}\}$$

ще наричаме $\omega$-Тюрингова степен породена от $\mathcal{A}$. С $\mathbf{D}_{T,\omega}$ ще означаваме множеството на всички $\omega$-Тюрингови степени:

$$\mathbf{D}_{T,\omega} = \{\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega\}.$$

В $\mathbf{D}_{T,\omega}$ въвеждаме релация $\leq$ по следния начин,

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \deg_{T,\omega}(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}.$$

От (3.1.1) следва, че така въведената релация е коректно дефинирана. Лесно се проверява, че тя е и частична наредба.

Да означим с $\mathbf{0}_{T,\omega} = \deg_{T,\omega}(\emptyset_\omega)$ $\omega$-Тюринговата степен на редицата $\emptyset_\omega$. Не е трудно да се види, че $\mathfrak{J}^T(\emptyset_\omega) = \mathbf{D}_T$. Така $\mathbf{0}_{T,\omega}$ е най-малкият елемент на $\mathbf{D}_{T,\omega}$ и, следователно, $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \leq)$ е частично наредено множество с най-малък елемент.

Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ са елементи на $\mathcal{S}_\omega$. Припомняме, че с $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ означаваме редицата $\{A_k \oplus B_k\}_{k<\omega}$. Тогава

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) = \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) \cap \mathfrak{J}^T(\mathcal{B}),$$

откъдето следва, че всеки две степени $\mathbf{a} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{b} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{B})$ от $\mathbf{D}_{T,\omega}$ имат точна горна граница $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$. Следователно $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \leq)$ е горна полурешетка с най-малък елемент.

Структурата $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq, \vee)$ по-нататък ще отбелязваме с $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Ясно е, че в означенията на Раздел 1.6,

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{\deg_T(f) \mid f \in \mathcal{M}_T(\mathcal{A})\},$$

т.е. $\omega$-Тюринговите степени съвпадат точно с $\omega$-$T$ степените.

Следващата поредица от твърдения ще установи връзката между $\omega$-номерационната и $\omega$-Тюринговата сводимости. Първата лема получаваме директно от определението на релацията $\leq_{T,\omega}$.

**Лема 3.1.3.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff (\forall X \subseteq \omega)[\mathcal{B} \leq_T \{X^{(k)}\}_{k<\omega} \Rightarrow \mathcal{A} \leq_T \{X^{(k)}\}_{k<\omega}].$$

Следващата лема разкрива връзката между Тюринговия и номерационния скок класове.

**Лема 3.1.4.** *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава $\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \mathfrak{J}^e(\mathcal{A}^+)$.*

*Доказателство.* По дефиниция,

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_k \leq_T X^{(k)} \text{ равномерно по } k\}.$$

От Теорема 1.5.8,

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_k^+ \leq_e (X_T^{(k)})^+ \text{ равномерно по } k\}.$$

Накрая, от Лема 1.3.2 можем да заключим, че

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{\deg_T(X) \mid A_k^+ \leq_e (X^+)_e^{(k)} \text{ равномерно по } k\} = \mathfrak{J}^e(\mathcal{A}^+).$$

■

**Следствие 3.1.5.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+.$$

*Доказателство.* В сила е следната поредица от еквивалентности: $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathfrak{J}^T(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) \iff \mathfrak{J}^e(\mathcal{B}^+) \subseteq \mathfrak{J}^e(\mathcal{A}^+) \iff \mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+$. ■

**Теорема 3.1.6.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B}).$$

*Доказателство.* От предходното Следствие,

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+.$$

От Теорема 2.1.1 пък имаме, че $\mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+ \iff \mathcal{A}^+ \leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B}^+)$. Лема 1.5.4 ни дава основание да твърдим, че $\mathcal{A}^+ \leq_e \mathcal{P}^e(\mathcal{B}^+) \iff \mathcal{A}^+ \leq_e (\mathcal{P}^T(\mathcal{B}))^+$. Сега от Теорема 1.5.8, окончателно получаваме, че $\mathcal{A}^+ \leq_e (\mathcal{P}^T(\mathcal{B}))^+ \iff \mathcal{A} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. ■

Оттук, и от (2.1.1) и (2.1.2) лесно получаваме:

**Следствие 3.1.7.** *За всеки $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$ са в сила:*

(1) $\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} \mathcal{P}^T(\mathcal{A})$;

(2) $\mathcal{A} \leq_T \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$.

Освен това, Теорема 3.1.6 влече, че ако заместим в дадена редица $\mathcal{A}$ краен брой от елемнтите ѝ, да речем $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, съответно с $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_n}$, за които $A_{i_j} \equiv_T B_{i_j}$, то новата редица е $\omega$-Тюрингово еквивалентна на $\mathcal{A}$.

Ще завършим този раздел с теорема, описваща някои от основните свойства на релацията $\leq_{T,\omega}$.

**Теорема 3.1.8.** *Нека* $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. *Тогава:*

(1) $\mathbf{b}$ *съдържа изброимо много елементи на* $\mathcal{S}_\omega$*;*
(2) $\mathbf{D}_{T,\omega}$ *съдържа континуум много елементи;*
(3) *Множеството* $[\mathbf{0}_{T,\omega}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{b}\}$ *е изброимо;*
(4) *Ако* $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$, *то множеството* $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}\}$ *е неизброимо;*
(5) *Множеството* $[\mathbf{b}, \infty) = \{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{a}\}$ *е неизброимо.*

*Доказателство.*
(1) Нека $\mathbf{b} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{B})$. Тогава $\mathcal{A} \in \mathbf{b}$ точно тогава, когато съществуват рекурсивни функция $g$ и $h$ такива, че за всяко $k$, $A_k = \Phi_{g(n)}(P_k^T(\mathcal{B}))$ и $B_k = \Phi_{h(n)}(P_k^T(\mathcal{A}))$, съответно. Понеже рекурсивните функции са изброимо много, то толкова ще бъдат и елементите на $\mathbf{b}$.
(2) Понеже всеки елемент на $\mathbf{D}_{T,\omega}$ съдържа изброимо много елементи на $\mathcal{S}_\omega$, а самото $\mathcal{S}$ има континуум много елементи, то и $\mathbf{D}_{T,\omega}$ има континуум много елементи.
(3) Аналогично на (1).
(4) Нека $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$ и да допуснем, че множеството $\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} : \mathbf{a}|\mathbf{b}\}$ е изброимо, като елементите му са $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2, \ldots$,$\mathbf{a}_n, \ldots$. Нека, освен това, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \ldots$ са всички ненулеви $\omega$-Тюрингови степени под $\mathbf{b}$. Нека $\mathcal{B}, \mathcal{A}_1$,$\mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$ и $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots, \mathcal{R}_n, \ldots$ са фиксирани елементи съответно на $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \ldots$ и $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n, \ldots$. Понеже $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$, то $\mathcal{B} \not\leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$. Освен това за всяко $n$, $\mathcal{A}_n \not\leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$ и $\mathcal{R}_n \not\leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$. Тогава съгласно Теорема 1.5.10, съществува множество $F$ такова, че $\mathcal{B} \not\leq_T \{F_T^{(k)}\}_{k<\omega}$ и за всяко $n$, $\mathcal{A}_n \not\leq_T \{F_T^{(k)}\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{R}_n \not\leq_T \{F_T^{(k)}\}_{k<\omega}$. Нека $\mathcal{F} = (F, \emptyset, \emptyset, \ldots)$. Тогава $\mathcal{F} \leq_T \{F_T^{(k)}\}_{k<\omega}$ и от Теорема 3.1.3 получаваме, че $\mathcal{B} \not\leq_{T,\omega} \mathcal{F}$ и за всяко $n$, $\mathcal{A}_n \not\leq_{T,\omega} \mathcal{F}, \mathcal{R}_n \not\leq_{T,\omega} \mathcal{F}$. Да положим $\mathbf{f} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{F})$. Тогава $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{f}$ и за всяко $n$, $\mathbf{a}_n \not\leq \mathbf{f}, \mathbf{r}_n \not\leq \mathbf{f}$. Така получаваме, че $\mathbf{f}$ е несравнимо с $\mathbf{b}$ и не съвпада с нито една от всичките степени несравними с $\mathbf{b}$. Противоречие.
(5) Ако $\mathbf{b} = \mathbf{0}_{T,\omega}$, то твърдението следва от (2). Да предположим, тогава, че $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$ и да разгледаме множеството

$$Q = \{\mathbf{b} \vee \mathbf{a} \mid \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}\}.$$

Очевидно $Q \subseteq [\mathbf{b}, \infty)$. Тъй като

$$\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}\} \subseteq \bigcup_{\mathbf{c} \in Q} [\mathbf{0}_{T,\omega}, \mathbf{c}]$$

и множествата $[\mathbf{0}_{T,\omega}, \mathbf{c}]$ са изброими, а

$$\{\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{a} \not\leq \mathbf{b} \,\&\, \mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}\}$$

е неизброимо, то тогава $Q$ е неизброимо и, следователно, такова е и $[\mathbf{b}, \infty)$. ∎

## 3.2. Подструктурата $\mathfrak{D}_{T,1}$

В този раздел ще покажем, че полурешетката на $\omega$-Тюринговите степени съдържа подструктура, изоморфна на горната полурешетка $\mathfrak{D}_T$ на Тюринговите степени. Да припомним, че ако $A$ е множество от естествени числа, то с $A \uparrow \omega$ ще означаваме редицата $(A, \emptyset, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots)$. Дефиницията на Тюринговия скок клас на една редица и факта, че $\emptyset \leq_T X_T^{(k)}$ равномерно по $k$, ни позволяват да заключим, че Тюринговият скок клас на редицата $A \uparrow \omega$ е $\mathfrak{J}^T(A \uparrow \omega) = \{\deg_T(X) \mid A \leq_T X\}$.

Връзката между Тюринговата и $\omega$-Тюринговата сводимости, в контекста на по-горе припомненото означение, се дава от следващата лема.

**Лема 3.2.1.** *Нека $A, B \subseteq \omega$. Тогава*

$$A \uparrow \omega \leq_{T,\omega} B \uparrow \omega \iff A \leq_T B.$$

*Доказателство.* Нека $A \uparrow \omega \leq_{T,\omega} B \uparrow \omega$. Тогава, според определението, имаме $\mathfrak{J}^T(B \uparrow \omega) \subseteq \mathfrak{J}^T(A \uparrow \omega)$. Тогава, понеже $B \leq_T B$, то $\deg_T(B) \in \mathfrak{J}^T(B \uparrow \omega)$, а следователно $\deg_T(B) \in \mathfrak{J}^T(A \uparrow \omega)$, откъдето $A \leq_T B$. Обратната посока следва от транзитивността на релацията $\leq_T$. ∎

Както вече споменахме, ще покажем, че $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ съдържа подструктура изоморфна на структурата на Тюринговите степени $\mathfrak{D}_T$. Подтикнати от предишната лема, да разгледаме множеството

$$\mathbf{D}_{T,1} = \{\deg_{T,\omega}(A \uparrow \omega) \mid A \subseteq \omega\},$$

за което не представлява особена трудност да се забележи, че е носител на една от изоморфните структури. Формалното доказателство е събрано в следващата лема.

**Лема 3.2.2.** *В сила са следните твърдения:*

(1) $(\mathbf{D}_{T,1}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq \restriction (\mathbf{D}_{T,1})^2, \vee)$ *е подструктура на* $\mathfrak{D}_{T,\omega}$*;*
(2) $(\mathbf{D}_{T,1}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq \restriction (\mathbf{D}_{T,1})^2, \vee)$ *е изоморфна на* $\mathfrak{D}_T$*;*

*Доказателство.*
(1) Достатъчно е да покажем, че $\mathbf{0}_{T,\omega} \in \mathbf{D}_{T,1}$ и, че $\mathbf{D}_{T,1}$ е затворено относно операцията $\vee$ за точна горна граница. Понеже $\emptyset_\omega = \emptyset \uparrow \omega$

и $\mathbf{0}_{T,\omega} = \deg_{T,\omega}(\emptyset_\omega)$, то $\mathbf{0}_{T,\omega} \in \mathbf{D}_{T,1}$. Нека сега $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,1}$ и нека $\mathbf{a} = \deg_{T,\omega}(A \uparrow \omega)$ и $\mathbf{b} = \deg_{T,\omega}(B \uparrow \omega)$. Тогава

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \deg_{T,\omega}((A \uparrow \omega) \oplus (B \uparrow \omega)).$$

Но

$$(A \uparrow \omega) \oplus (B \uparrow \omega) \equiv_{T,\omega} (A \oplus B) \uparrow \omega,$$

откъдето $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,1}$.
(2) По аналогия с изображението $\kappa_e$, влагащо номерационните в $\omega$-номерационните степени, да разгледаме изображението $\kappa_T : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_{T,1}$, действуващо по правилото

$$\kappa_T(\deg_T(A)) = \deg_{T,\omega}(A \uparrow \omega),$$

за всяко $A \subseteq \omega$. Коректността на дефиницията следва от Лема (3.2.1). Както може да се очаква, $\kappa_T$ е хомоморфизъм. Наистина,

$$\kappa_T(\mathbf{0}_T) = \kappa_T(\deg_T(\emptyset)) = \deg_{T,\omega}(\emptyset \uparrow \omega) = \mathbf{0}_{T,\omega}.$$

Освен това имаме

$$\deg_T(A) \leq \deg_T(B) \iff A \leq_T B \iff A \uparrow \omega \leq_{T,\omega} B \uparrow \omega \iff$$
$$\deg_{T,\omega}(A \uparrow \omega) \leq \deg_{T,\omega}(B \uparrow \omega) \iff \kappa_T(\deg_T(A)) \leq \kappa_T(\deg_T(B)).$$

И накрая

$$\kappa_T(\deg_T(A) \vee \deg_T(B)) = \kappa_T(\deg_T(A \oplus B)) =$$
$$= \deg_{T,\omega}((A \oplus B) \uparrow \omega) = \deg_{T,\omega}(A \uparrow \omega) \vee \deg_{T,\omega}(B \uparrow \omega) =$$
$$= \kappa_T(\deg_T(A)) \vee \kappa_T(\deg_T(B)).$$

От това, че $\kappa_T$ запазва частичната наредба следва, че $\kappa_T$ е инективно. Това, че $\kappa_T$ е сюрективно следва директно от дефиницията на $\mathbf{D}_{T,1}$ и $\kappa_T$. Окончателно, изображението $\kappa_T$ е изоморфизъм между двете структури, което доказва лемата. ■

По-нататък структурата $(\mathbf{D}_{T,1}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq \restriction (\mathbf{D}_{T,1})^2, \vee)$ ще означаваме с $\mathfrak{D}_{T,1}$. В оставащата част на този раздел ще бъдат показани няколко интересни свойства на степените от изоморфното копие $\mathbf{D}_{T,1}$ на Тюринговите степени. Като естествен завършек ще установим, че степените от $\mathbf{D}_{T,1}$ образуват база на автоморфизмите на структурата $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

**Лема 3.2.3.** *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T \mid deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \kappa_T(\mathbf{x})\}.$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$ и $X \in \mathbf{x}$ е фиксирано. Тогава за всяко $k$, $A_k \leq_T X^{(k)}$, равномерно по $k$. Ясно е, че $\mathcal{P}^T(X \uparrow \omega) \equiv_T \{X^{(k)}\}_{k<\omega}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_T \{X^{(k)}\}_{k<\omega} \equiv_T \mathcal{P}^T(X \uparrow \omega)$ и, следователно, $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} X \uparrow \omega$, откъдето $\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \kappa_T(\mathbf{x})$.

Нека $\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \kappa_T(\mathbf{x})$. Да разгледаме $X \in \mathbf{x}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} X \uparrow \omega$ или $\mathcal{A} \leq_T \mathcal{P}^T(X \uparrow \omega) \equiv_T \{X^{(k)}\}_{k<\omega}$. Следователно за всяко $k$, $A_k \leq_T X^{(k)}$ равномерно по $k$, т.е. $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$. ■

**Лема 3.2.4.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$*. Тогава съществува* $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,1}$ *такова, че* $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ и $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Тогава $\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Действително, да допуснем, че $\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) = \emptyset$. Тогава $\mathbf{a}$ ще бъде най-големият елемент на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Следователно $P_0^T(\mathcal{A})' \uparrow \omega \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$, откъдето $P_0^T(\mathcal{A})' \leq_T P_0^T(\mathcal{A})$, което е невъзможно.

Нека $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$ е произволен и $\mathbf{b} = \kappa_T(\mathbf{x})$. Тогава $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,1}$ и според Лема 3.2.3, $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. ■

Следващото свойство показва, че всяка $\omega$-Тюрингова степен се определя еднозначно от всички степени от $\mathbf{D}_T$, които са над нея.

**Теорема 3.2.5.** *Нека* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *са* $\omega$*-Тюрингови степени. Тогава*

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)[\mathbf{b} \leq \kappa_T(\mathbf{x}) \to \mathbf{a} \leq \kappa_T(\mathbf{x})].$$

*Доказателство.* Следва непосредствено от дефиницията на релацията $\leq_{T,\omega}$ и Лема 3.2.3. ■

**Лема 3.2.6.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{x} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ *като* $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$*. Тогава съществува* $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_{T,1}$ *такова, че* $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

*Доказателство.* Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}, \mathcal{X} \in \mathbf{x}$. Нека $\mathcal{T}$ е множеството

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{R} \in \mathcal{S}_\omega \mid \mathcal{R} \leq_{T,\omega} \mathcal{X} \ \&\ \mathcal{R} \not\leq_{T,\omega} \mathcal{A}\}.$$

Тогава $\mathcal{T}$ е изброимо и по Теорема 1.5.10 следва, че съществува множество $F$ такова, че $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} F \uparrow \omega$ и за всяко $\mathcal{R} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{R} \not\leq_{T,\omega} F \uparrow \omega$. Нека $\mathbf{y} = \deg_{T,\omega}(F \uparrow \omega)$. Тогава $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_{T,1}$, $\mathbf{a} \leq \mathbf{y}$ и за всяко $\mathcal{R} \in \mathcal{T}$, $\deg_{T,\omega}(\mathcal{R}) \not\leq \mathbf{y}$.

Нека $\mathbf{z} \leq \mathbf{x}, \mathbf{y}$. Следователно, за всяко $\mathcal{R} \in \mathcal{T}$, $\mathbf{z} \neq \deg_{T,\omega}(\mathcal{R})$. От дефиницията на $\mathcal{T}$ получаваме, че $\mathbf{z} \leq \mathbf{a}$. Тогава $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. ■

**Лема 3.2.7.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$*. Тогава съществуват* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}_{T,1}$ *такива, че* $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. Тогава според Лема 3.2.4 съществува $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_{T,1}$ такова, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$. Сега от Лема (3.2.6) следва, че съществува $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_{T,1}$ такова, че $\mathbf{a} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$. ■

**Теорема 3.2.8.** $\mathbf{D}_{T,1}$ *е база на автоморфизмите на* $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

*Доказателство.* Нека $\varphi$ е автоморфизъм на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ като за всяко $\mathbf{y} \in \mathbf{D}_{T,1}$, $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ е произволен елемент. Тогава за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$,

$$\mathbf{a} \leq \kappa_T(\mathbf{x}) \iff \varphi(\mathbf{a}) \leq \varphi(\kappa_T(\mathbf{x})) \iff \varphi(\mathbf{a}) \leq \kappa_T(\mathbf{x}).$$

Следователно, $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. ■

## 3.3. Операторът скок

Операторът скок е строго растяща функция от $\mathbf{D}_{T,\omega}$ в $\mathbf{D}_{T,\omega}$. В този раздел ще определим операторът скок и ще покажем някои от основните му свойства. Започваме със съответното определение върху редици от множества.

**Определение 3.3.1.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega} \in \mathcal{S}_\omega$. Скок на редицата $\mathcal{A}$ ще наричаме редицата $\mathcal{A}' = (P_1^T(\mathcal{A}), A_2, A_3, \dots, A_k, \dots)$.*

**Лема 3.3.2.** *Нека $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathcal{A}' \equiv_{T,\omega} \{P_{k+1}^T(\mathcal{A})\}_{k<\omega}.$$

*Доказателство.* Да забележим, че за всяко $k$, $P_k^T(\mathcal{A}') = P_{k+1}^T(\mathcal{A})$. Следователно, $\mathcal{A}' \equiv_{T,\omega} \mathcal{P}^T(\mathcal{A}') = \{P_{k+1}^T(\mathcal{A})\}_{k<\omega}$. ∎

Следващата лема установява връзката между скок-класът на редица и този на скока ѝ. Именно, показано е, че последният се състои точно от скоковете на елементите на първия скок-клас.

**Лема 3.3.3.** *Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

$$\mathfrak{J}^T(\mathcal{A}') = \{\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})\}.$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$ и $X \in \mathbf{x}$. Тогава за всяко $k$, $A_k \leq_T X^{(k)}$ равномерно по $k$. Следователно, $P_1^T(\mathcal{A}) = A_0' \oplus A_1 \leq_T X'$ и $A_{k+1} \leq_T (X')^{(k)}$ равномерно по $k$. Тогава, $\mathbf{x}' = \deg_T(X') \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}')$.

Обратно, нека $\mathbf{y} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}')$ и $Y \in \mathbf{y}$. Тогава $P_1^T(\mathcal{A}) \leq_T Y$ и за всяко $k$, $A_{k+1} \leq_T Y^{(k)}$ равномерно по $k$. Но

$$A_0' \leq_T A_0' \oplus A_1 = P_1^T(\mathcal{A}) \leq_T Y,$$

т.е. $A_0' \leq_T Y$. Тогава, по теоремата на Фридберг за обръщане на скока, съществува $X \subseteq \omega$ такова, че $A_0 \leq_T X$, $X' \equiv_T Y$. Така за всяко $k$, $A_k \leq_T X^{(k)}$ равномерно по $k$. Полагайки $\mathbf{x} = \deg_T(X)$, то очевидно $\mathbf{y} = \mathbf{x}'$ и $\mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{A})$. ∎

Като следствие от горните твърдения можем лесно да заключим, че въведената операция скок върху редици е строго монотонна и запазваща наредбата.

**Следствие 3.3.4.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$. Тогава*

(J1) $\mathcal{A} \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}'$;

(J2) $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}' \leq_{T,\omega} \mathcal{B}'$.

Последното свойство ни дава възможност да въведем оператор скок върху $\omega$-Тюринговите степени.

**Определение 3.3.5.** *Скок на $\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{a}$ ще наричаме степента $\mathbf{a}' = deg_{T,\omega}(\mathcal{A}')$, където $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ е произволно.*

Очевидно са в сила следните свойства:

$$\mathbf{a} \lneq \mathbf{a}'; \tag{3.3.1}$$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}' \leq \mathbf{b}'. \tag{3.3.2}$$

Да забележим, че монотонността на скока влече, че областта от стойностите на последния се съдържа в горния конус $\mathbf{D}_{T,\omega}[\geq \mathbf{0}'_{T,\omega}]$ над скока $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ на най-малкия елемент. Оказва се, че всяка степен над $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ е скок на някоя друга степен. Действително, нека $\mathbf{a}$ е $\omega$-Тюрингова степен над $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ и $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{a}$ е произволна. Тогава, ако $\mathbf{b}$ е степента, съдържаща редицата $(\emptyset, A_0, A_1, \dots, A_k, \dots)$, то не е трудно да се забележи, че $\mathbf{b}' = \mathbf{a}$. По този начин доказахме следната

**Теорема 3.3.6.** *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ *такова, че* $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}'_{T,\omega}$ *съществува* $\mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$, *за което* $\mathbf{b}' = \mathbf{a}$.

Може да се покаже, че така конструираната $\mathbf{b}$ е най-малката степен, чийто скок съвпада с $\mathbf{a}$. В Раздел 3.5, това наблюдение ще ни помогне да покажем една по-силна теорема за обръщане на скока.

Следната лема показва, че така въведеният оператор скок е съгласуван с Тюринговия скок.

**Лема 3.3.7.** *Нека* $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$. *Тогава* $\kappa_T(\mathbf{x}') = \kappa_T(\mathbf{x})'$.

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$ и $X \in \mathbf{x}$. Тогава $(X \uparrow \omega)' = (X, \emptyset, \ldots)' \equiv_{T,\omega} (X' \oplus \emptyset, \emptyset, \ldots) = (X' \oplus \emptyset) \uparrow \omega \equiv_{T,\omega} X' \uparrow \omega$. Следователно, $\kappa_T(\mathbf{x}') = \kappa_T(\mathbf{x})'$. ■

**Следствие 3.3.8.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. *Тогава*

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}' \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)[\mathbf{b} \leq \kappa_T(\mathbf{x}) \to \mathbf{a} \leq \kappa_T(\mathbf{x}')].$$

*Доказателство.* Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}, \mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Тогава

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}' \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}' \iff$$

$$\iff \mathfrak{J}^T(\mathcal{B}') \subseteq \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}) \iff \{\mathbf{x}' \mid \mathbf{x} \in \mathfrak{J}^T(\mathcal{B})\} \subseteq \mathfrak{J}^T(\mathcal{A}).$$

■

Както е добре известно (виж, например, **[15]**), в общия случай Тюринговият скок не преминава през операцията за точна горна граница $\vee$. С други думи, съществуват Тюрингови степени $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ такива, че $\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}' < (\mathbf{a} \vee \mathbf{b})'$. Тъй като $\mathfrak{D}_{T,1}$ е подструктура на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ (а, следователно, е затворена относно операцията за точна горна граница), то това наблюдение може да се пренесе директно и върху структурата на $\omega$-Тюринговите степени. Оказва се, обаче, че винаги, когато точната долна граница на две $\omega$-Тюрингови степени $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ съществува, то съществува и точната долна граница на скоковете им, като при това е равна на скока на точната долна граница на $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

**Лема 3.3.9.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. *Тогава*

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \to \mathbf{a}' = \mathbf{b}' \wedge \mathbf{c}'.$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ са както в предпоставката на лемата и да фиксираме редици $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в тях. Да забележим, първо, че $\mathbf{a} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ влече, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \mathbf{c}$, и от монотонността на скока получаваме $\mathbf{a}' \leq \mathbf{b}', \mathbf{c}'$.

Нека сега $\mathbf{x} \leq \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ и да фиксираме редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$. Тогава, равномерно по $n < \omega$,

$$X_n \leq_T P^T_{n+1}(\mathcal{B}), P^T_{n+1}(\mathcal{C}).$$

Да разгледаме редицата $\mathcal{Y} = (\emptyset, X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$. Ясно е, че $\mathcal{X} \leq_{T,\omega} \mathcal{Y}'$. Освен това, равномерно по $n < \omega$,

$$Y_n \leq_T P_n^T(\mathcal{B}), P_n^T(\mathcal{C}).$$

Следователно, $\mathcal{Y} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}, \mathcal{C}$, откъдето $\mathcal{Y} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$. Накрая, използувайки монотонността на скока, получаваме, че $\mathcal{X} \leq \mathcal{A}'$. ■

За дадено $n \geq 0$, означаваме $\mathcal{A}^{(n)} = \{P_{n+k}^T(\mathcal{A})\}_{k<\omega}$. Лесно може да се провери, че $\mathcal{A}^{(0)} \equiv_T \mathcal{P}^T(\mathcal{A})$ и за всяко $n \geq 0$, $\mathcal{A}^{(n+1)} \equiv_T (\mathcal{A}^{(n)})'$. За всяка $\omega$-Тюрингова степен $\mathbf{a} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$, нека $\mathbf{a}^{(n)} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A}^{(n)})$. Тогава $\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{a}$ и за всяко $n \geq 0$, $\mathbf{a}^{(n+1)} = (\mathbf{a}^{(n)})'$.

По-нататък, структурата $(\mathbf{D}_{T,\omega}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq, \vee, ')$ на $\omega$-Тюринговите степени с добавен оператор скок ще означаваме с $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$.

Сега, по аналогия на случая с $\omega$-номерационните степени, да разгледаме изображението $\lambda_T : \mathbf{D}_{T,\omega} \to \mathbf{D}_T$, действуващо по правилото

$$\lambda_T(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) = \deg_T(P_0^T(\mathcal{A})).$$

Понеже $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$ влече, че $P_0^T(\mathcal{A}) \leq_T P_0(\mathcal{B})$, то следва, че $\lambda_T$ е коректно дефинирано и запазващо наредбата изображение. От $\mathcal{A}^{(n)} = \{P_{n+k}^T(\mathcal{A})\}_{k<\omega}$ следва, че $\lambda_T(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}^{(n)})) = \deg_T(P_n^T(\mathcal{A}))$. В сила е следната характеризация на частичната наредба "$\leq_{T,\omega}$":

**Лема 3.3.10.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. *Тогава за всяко* $n < \omega$,

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff (\forall k)[0 \leq k < n \to \lambda_T(\mathbf{a}^{(k)}) \leq \lambda_T(\mathbf{b}^{(k)})] \,\&\, \mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}^{(n)}.$$

*Доказателство.* Да допуснем, че $(\forall 0 \leq k < n)(\lambda_T(\mathbf{a}^{(k)}) \leq \lambda_T(\mathbf{b}^{(k)}))$ и $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}^{(n)}$. Нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Тогава $\mathcal{A}^{(n)} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}^{(n)}$. Следователно, за всяко $k < \omega$, $P_{n+k}^T(\mathcal{A}) \leq_T P_{n+k}^T(\mathcal{B})$ равномерно по $k$. Неравенствата $\lambda_T(\mathbf{a}^{(k)}) \leq \lambda_T(\mathbf{b}^{(k)})$ за $0 \leq k < n$ ни дават

$$(\forall 0 \leq k < n)(P_k^T(\mathcal{A}) \leq_T P_k^T(\mathcal{B})).$$

Така окончателно получаваме, че $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$. Обратната посока е ясна. ■

## 3.4. Влагане на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ в $\mathfrak{D}_{\omega}$

В този раздел ще покажем, че $\mathfrak{D}_{\omega}$ съдържа структура изоморфна на структурата на $\omega$-Тюринговите степени $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Основната идея е да разширим влагането $\iota : \mathbf{D}_T \to \mathbf{D}_e$ на Тюринговите в номерационните степени върху $\mathbf{D}_{T,\omega}$. Да припомним, че

$$\iota(\deg_T(A)) = \deg_e(A^+)$$

и областта от стойностите на последното изображение е точно множеството на тоталните номерационни степени. Оказва се, че изображението $\iota_{\omega} : \mathbf{D}_{T,\omega} \to \mathbf{D}_{\omega}$, определено с

$$\iota_{\omega}(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) = \deg_{\omega}(\mathcal{A}^+),$$

е разширение на $\iota$, задаващо изоморфно влагане. Следващата лема формално установява това, където с $\mathfrak{Tot}_\omega$ сме означили множеството на тоталните $\omega$-номерационни степени,

$$\mathfrak{Tot}_\omega = \{\deg_\omega(\mathcal{A}^+) \mid \mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega\}.$$

**Лема 3.4.1.** *В сила са следните твърдения:*

(1) $(\mathfrak{Tot}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq\restriction (\mathfrak{Tot}_\omega)^2, \vee)$ *е подструктура на* $\mathfrak{D}_\omega$*;*
(2) $(\mathfrak{Tot}_\omega, \mathbf{0}_\omega, \leq\restriction (\mathfrak{Tot}_\omega)^2, \vee)$ *е изоморфна на* $\mathfrak{D}_{T,\omega}$*.*

*Доказателство.*
(1) Достатъчно е да покажем, че $\mathbf{0}_\omega \in \mathfrak{Tot}_\omega$ и, че $\mathfrak{Tot}_\omega$ е затворено относно операцията $\vee$. Понеже $\emptyset \equiv_e \omega$ и $\emptyset^+ \equiv_e \omega$, то $\emptyset_\omega \equiv_\omega (\omega, \ldots, \omega, \ldots) \equiv_\omega \emptyset^+_\omega$ и, следователно, $\emptyset^+_\omega \in \mathbf{0}_\omega$. Тогава $\mathbf{0}_\omega \in \mathfrak{Tot}_\omega$. Нека сега $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathfrak{Tot}_\omega$ и нека $\mathbf{a} = \deg_\omega(\mathcal{A}^+)$ и $\mathbf{b} = \deg_\omega(\mathcal{B}^+)$. Тогава $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} = \deg_\omega(\mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{B}^+)$. От Лема 1.3.1 лесно получаваме: $\mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{B}^+ \equiv_\omega (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^+$, от където $\mathbf{a} \vee \mathbf{b} \in \mathfrak{Tot}_\omega$.
(2) Да разгледаме изображението $\iota_\omega : \mathbf{D}_{T,\omega} \to \mathfrak{Tot}_\omega$, действуващо по правилото

$$\iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) = \deg_\omega(\mathcal{A}^+),$$

за всяко $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$. Коректността на дефиницията следва от Следствие 3.1.5. Сега ще покажем, че $\iota_\omega$ е хомоморфизъм. Наистина,

$$\iota_\omega(\mathbf{0}_{T,\omega}) = \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\emptyset_\omega)) = \deg_\omega(\emptyset^+_\omega) = \deg_\omega(\emptyset_\omega) = \mathbf{0}_\omega.$$

Освен това имаме

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \leq \deg_{T,\omega}(\mathcal{B}) \iff \mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^+ \leq_\omega \mathcal{B}^+ \iff$$
$$\deg_\omega(\mathcal{A}^+) \leq \deg_\omega(\mathcal{B}^+) \iff \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) \leq \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{B})).$$

И накрая,

$$\begin{aligned}\iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \vee \deg_{T,\omega}(\mathcal{B})) &= \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})) = \\ &= \deg_\omega((\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^+) = \deg_\omega(\mathcal{A}^+ \oplus \mathcal{B}^+) = \\ &= \deg_\omega(\mathcal{A}^+) \vee \deg_\omega(\mathcal{B}^+) = \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) \vee \iota_\omega(\deg_{T,\omega}(\mathcal{B})).\end{aligned}$$

От това, че $\iota_\omega$ запазва частичната наредба следва, че $\iota_\omega$ е инективно. Това, че $\iota_\omega$ е сюрективно, следва директно от дефиницита на $\mathfrak{Tot}_\omega$ и на самото $\iota$. Окончателно, $\iota_\omega$ е изоморфизъм между двете структури, което доказва лемата. ∎

Оказва се, че влагането $\iota_\omega$ е съгласувано с оператора скок и, следователно, $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ се влага в структурата на $\omega$-номерационните степени с добавена операция скок $\mathfrak{D}'_\omega$. По-точно в сила е:

**Лема 3.4.2.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$*. Тогава* $\iota_\omega(\mathbf{a}') = \iota_\omega(\mathbf{a})'$*.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$ е $\omega$-Тюрингова степен. Имаме, че $\mathcal{A}' \equiv_{T,\omega} (P^T_1(\mathcal{A}), A_2, \ldots, A_n, \ldots)$, откъдето

$$\iota_\omega(\mathbf{a}') = \deg_\omega(((P^T_1(\mathcal{A}))^+, A^+_2, \ldots, A^+_n, \ldots)).$$

Освен това $\iota_\omega(\mathbf{a}) = \deg_\omega(A_0^+, A_1^+, \ldots, A_n^+, \ldots)$ и от свойствата на $\omega$-номерационния скок получаваме, че

$$\iota_\omega(\mathbf{a})' = \deg_\omega((P_1^e(\mathcal{A}^+), A_2^+, \ldots, A_n^+)).$$

От Лема 1.5.4, в частност, получаваме, че $(P_1^T(\mathcal{A}))^+ \equiv_e P_1^e(\mathcal{A}^+)$. Следователно, $\iota_\omega(\mathbf{a}') = \iota_\omega(\mathbf{a})'$. ∎

Не е трудно да се забележи, че следващата диаграмата е комутативна:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{D}_T \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, bend right, "\kappa_T"'] & \mathbf{D}_e \arrow[d, bend left, "\kappa_e"] \\
\mathbf{D}_{T,\omega} \arrow[r, "\iota_\omega"'] \arrow[u, bend right, "\lambda_T"'] & \mathbf{D}_\omega \arrow[u, bend left, "\lambda_e"]
\end{tikzcd}$$

## 3.5. Обръщане на скока

В този раздел ще покажем обещаната по-рано "по-силна" теорема за обръщаме на скока, а именно, че за всяко естествено число $n \geq 1$, за всяка степен $\mathbf{a}$ и за всяка степен $\mathbf{b}$ над $n$-тия скок на $\mathbf{a}$, съществува най-малка степен $\mathbf{x}$ по-голяма от $\mathbf{a}$, чийто $n$-ти скок е точно $\mathbf{b}$. Строенето на представител на тази най-малка степен ще бъде направено експлицитно по дадени представители на степените $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Да отбележим, че такава теорема не е в сила нито в Тюринговите, нито в номерационните степенни структури. За разлика от последните две структури, тази на $\omega$-номерационните притежава горното свойство за обръщане на скока. Определенията и доказателствата на необходимите ни твърденията, изключително следват тези, които са използувани в $\omega$-номерационния случай, [**39**].

**Определение 3.5.1.** *Нека $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$, $n \geq 1$. С $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ ще означаваме редицата $\{C_k\}_{k<\omega}$, където за всяко $k < n$, $C_k = A_k$ и за $k \geq n$, $C_k = B_{k-n}$.*

Да забележим, че в случая, когато $\mathcal{A}^{(n)} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$ е в сила, че

$$I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \equiv_T (A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, P_0^T(\mathcal{B}), P_1^T(\mathcal{B}), \ldots, P_k^T(\mathcal{B}), \ldots).$$

С други думи, по модул равномерната Тюрингова сводимост, $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ е скок редицата на $\mathcal{B}$, към която от ляво са "залепени" първите $n$ члена на редицата $\mathcal{A}$.

Същността на теоремата за обръщане на скока се обхваща в следващата лема.

**Лема 3.5.2.** *Нека $\mathcal{A}^{(n)} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$. Тогава:*

(1) *$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$;*
(2) *$I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})^{(n)} \equiv_{T,\omega} \mathcal{B}$;*
(3) *Ако $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{C}^{(n)}$, то $I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$.*

*Доказателство.* Доказателствата на (1) и (2) следват директно от дефинициите. Нека сега $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$ и $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{C}^{(n)}$. Тогава $\mathcal{B} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{C}^{(n)})$. Директно се проверява, че $\mathcal{P}^T(\mathcal{C}^{(n)}) \equiv_T \mathcal{C}^{(n)}$. Тогава $\mathcal{B} \leq_T$

$\mathcal{C}^{(n)}$, следователно $\mathcal{P}^T(\mathcal{B}) \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{C}^{(n)}) \equiv_T \mathcal{C}$. Така получаваме, че за всяко $k < \omega$, $P_k^T(\mathcal{B}) \leq_T P_{n+k}^T(\mathcal{C})$ равномерно по $k$. От $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$ имаме, че за $k < n$, $A_k \leq_T P_k^T(\mathcal{C})$. Тогава $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}) \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{C})$ и, следователно, $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}) \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$. ■

Лесно могат да се докажат и следните свойства на операцията $I_\mathcal{A}^n$:

(I1) $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{A}^{(n)}) \equiv_{T,\omega} \mathcal{A}$;

(I2) Нека $\mathcal{A}, \mathcal{A}^* \in \mathcal{S}_\omega$. Ако за някои $\mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{S}_\omega$, $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}) \equiv_{T,\omega} I_{\mathcal{A}^*}^n(\mathcal{C})$, то
$$(\forall k < n)(P_k^T(\mathcal{A}) \equiv_T P_k^T(\mathcal{A}^*));$$

(I3) Ако $\mathcal{B} \equiv_{T,\omega} \mathcal{C}$, то $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}) \equiv_{T,\omega} I_\mathcal{A}^n(\mathcal{C})$;

(I4) Ако $(\forall k < n)(P_k^T(\mathcal{A}) \equiv_T P_k^T(\mathcal{A}^*))$, то за всяка редица $\mathcal{B} \in \mathcal{S}_\omega$, $I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}) \equiv_{T,\omega} I_{\mathcal{A}^*}^n(\mathcal{B})$.

(I5) За всяко естествено $n$ число и всеки три редици $\mathcal{A}, \mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ такива, че $\mathcal{A}^{(n)} \leq_{T,\omega} \mathcal{X}, \mathcal{Y}$,
$$\mathcal{X} \leq_{T,\omega} \mathcal{Y} \iff I_\mathcal{A}^n(\mathcal{X}) \leq_{T,\omega} I_\mathcal{A}^n(\mathcal{Y}).$$

Нека $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$, $n \geq 1$. Нека, освен това, $\mathcal{A} \in \mathbf{a}, \mathcal{B} \in \mathbf{b}$. Дефинираме $\mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{b}) = \deg_{T,\omega}(I_\mathcal{A}^n(\mathcal{B}))$. От $(I3)$ и $(I4)$ следва, че операцията $\mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{b})$ е коректно дефинирана бинарна операция в $\mathbf{D}_{T,\omega}$.

Непосредствено от предходното твърдение получаваме:

**Теорема 3.5.3** (Теорема за обръщане на скока)**.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$, $n \geq 1$ *и* $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{b}$. *Тогава* $\mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{b})$ *е най-малкият елемент на множеството*
$$\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \,\&\, \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{b}\}.$$

**Лема 3.5.4.** *За всяко* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ *и* $n \geq 1$,
$$\{\mathbf{x}^{(n)} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{a}'\} = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{a}^{(n+1)}\}.$$

*Доказателство.* От монотонността на скока имаме, че за всяко $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{a}']$, $\mathbf{x}^{(n)} \in [\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}]$.

Нека сега $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{a}^{(n+1)}$. Нека $\mathbf{x} = \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{y})$. Тогава $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{y}$. Имаме, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}'$, $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \leq \mathbf{a}^{(n+1)} = (\mathbf{a}')^{(n)}$. Тогава от Лема 3.5.2 получаваме, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}'$. Това доказва лемата. ■

Оказва се, че интервалът $\mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{a}, \mathbf{a}']$ съдържа подструктура изоморфна на $\mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}]$:

**Лема 3.5.5.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ *и* $n \geq 1$. *Тогава*
$$\mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{a}^{(n)}, \mathbf{a}^{(n+1)}] \cong \mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{a}, \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{a}^{(n+1)})].$$

*Доказателство.* От $(I5)$ имаме, че ако $\mathbf{a}^{(n)} \leq \mathbf{x}, \mathbf{y}$, то
$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \iff \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{x}) \leq \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{y}).$$

Тогава ще е достатъчно да докажем, че
$$\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{a}^{(n+1)}) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{I}_\mathbf{a}^n(\mathbf{x}^{(n)}).$$

За целта, нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{X}$ и $\mathcal{X} \leq_{T,\omega} I_\mathcal{A}^n(\mathcal{A}^{(n+1)})$. Следователно, $\mathcal{P}^T(\mathcal{A}) \leq_{T,\omega} \mathcal{X}$ и $\mathcal{P}^T(\mathcal{X}) \leq_{T,\omega} I_\mathcal{A}^n(\mathcal{A}^{(n+1)})$, откъдето, за всяко $k < n$, $P_k^T(\mathcal{A}) \leq_T P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T P_k^T(\mathcal{A})$. Следователно, $(\forall k < n)[P_k^T(\mathcal{A}) \equiv_T P_k^T(\mathcal{X})]$, откъдето, по свойство $(I4)$,

$$\mathcal{X} \equiv_{T,\omega} I^n_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}^{(n)}) \equiv_{T,\omega} I^n_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}^{(n)}).$$

Така получаваме, $\mathbf{x} = \mathbf{I}^n_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^{(n)})$. ■

Накрая ще докажем една помощна лема, показваща някои връзки между операцията $\mathbf{I}$ за обръщане на скока и изображението $\lambda_T$, дефинирано по-рано в (3.3).

**Лема 3.5.6.** *Нека $n < \omega$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ е такова, че $(\mathbf{0}_{T,\omega})^{(n)} \leq \mathbf{a}$. Тогава:*

(1) $(\forall k < n)[\lambda_T(\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{a})^{(k)}) = \mathbf{0}_T^{(k)}]$;

(2) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_{T,\omega})[\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{a}) \Rightarrow \mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{x}]$.

*Доказателство.* (1) следва директно от дефинициите на $\mathbf{I}$ и $\lambda_T$.

Нека сега $\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{a})$. Тогава според Лема (3.3.10), за всяко $k < n$ имаме, че

$$\lambda_T(\mathbf{x}^{(k)}) \leq \lambda_T(\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{a})^{(k)}) = \mathbf{0}_T^{(k)} = \lambda_T(\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{x}^{(n)})^{(k)}).$$

От друга страна имаме, че $\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{x}^{(n)})^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}$ и от Лема 3.3.10 следва, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{x}^{(n)})$. Накрая, използувайки Теорема 3.5.3, установяваме верността и на (2). ■

Оттук нататък, както и в случая на $\omega$-номерационните степени, когато $n = 1$ ще пишем $\mathbf{I}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{I}^1_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$. Ако $\mathbf{a}$ е най-малката степен $\mathbf{0}_{T,\omega}$, то ще използуваме означението $\mathbf{I}^n(\mathbf{b})$ вместо $\mathbf{I}^n_{\mathbf{0}_{T,\omega}}(\mathbf{b})$.

## 3.6. Определимост на $\mathbf{D}_{T,1}$ в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$

В този раздел ще се съсредоточим върху определимостта от първи ред на изоморфното копие $\mathbf{D}_{T,1}$ на Тюринговите степени в структурата $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени с добавена операция скок. Да припомним, че една $\omega$-Тюрингова степен $\mathbf{a}$ е в $\mathbf{D}_{T,1}$ точно тогава, когато съществува множество $A$ такова, че $A \uparrow \omega \in \mathbf{a}$. Да забележим, че ако $\mathcal{B}$ е редица, чийто първи елемент е Тюрингово еквивалентен на $A$, то задължително $A \uparrow \omega \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$. Следователно, $\omega$-Тюринговата степен на $A \uparrow \omega$ е най-малката измежду $\omega$-Тюринговите степени на редиците, притежаващи като първи елемент множество, Тюрингово еквивалентно на $A$. Така

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \iff (\forall \mathbf{b})(\forall \mathcal{A} \in \mathbf{a})(\forall \mathcal{B} \in \mathbf{b})[A_0 \equiv_T B_0 \Rightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{b}].$$

Следователно е достатъчно да покажем, че условието

$$(\forall \mathcal{A} \in \mathbf{a})(\forall \mathcal{B} \in \mathbf{b})[A_0 \equiv_T B_0 \Rightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{b}] \tag{3.6.1}$$

е определимо от първи ред в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. Това се установява в следващата лема.

**Лема 3.6.1.** *Условието* (3.6.1) *е еквивалентно на*

$$(\forall \mathbf{c})[\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}' \leq \mathbf{c} \to \mathbf{I_a}(\mathbf{c}) = \mathbf{I_b}(\mathbf{c})].$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са $\omega$-Тюрингови степени и съответно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са редици от тях. Да предположим първо, че $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са степени, удовлетворяващи условието (3.6.1). Нека $\mathbf{c}$ е такава, че $\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}' \leq \mathbf{c}$ и да фиксираме редица $\mathcal{C}$ от $\mathbf{c}$. Понеже $A_0 \equiv_T B_0$, то по свойство $(I4)$ на операцията за обръщане на скока, получаваме, че $I^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \equiv_{T,\omega} I^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Да забележим, че понеже $\mathcal{A}' \oplus \mathcal{B}' \leq_{T,\omega} \mathcal{C}$, то $I^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ и $I^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ са добре дефинирани. Следователно, $\mathbf{I_a}(\mathbf{c}) = \mathbf{I_b}(\mathbf{c})$.

Нека сега $\mathbf{I_a}(\mathbf{c}) = \mathbf{I_b}(\mathbf{c})$ за някоя степен $\mathbf{c}$, за която $\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}' \leq \mathbf{c}$. Нека $\mathcal{C} \in \mathbf{c}$ е фиксирана редица. Тогава е ясно, че $I^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \equiv_{T,\omega} I^1_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Окончателно, по свойство $(I2)$, последната еквивалентност влече $A_0 \equiv_T B_0$. ■

Следователно, можем да заключим, че

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \iff (\forall \mathbf{b})[(\forall \mathbf{c})[\mathbf{a}' \vee \mathbf{b}' \leq \mathbf{c} \to \mathbf{I_a}(\mathbf{c}) = \mathbf{I_b}(\mathbf{c})] \to \mathbf{a} \leq \mathbf{b}].$$

Ясно е, че дясната страна на последната еквивалентност е еквивалентна на формула от първи ред в езикът, използващ единствено символите $\leq$ и $'$. Така получаваме следващата теорема.

**Теорема 3.6.2.** *Множеството* $\mathbf{D}_{T,1}$ *е определимо с формула от първи ред в* $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$.

Следствие на горната теорема се оказва фактът, че всяка изброима $n$-арна релация в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ е определима с формула от първи ред с параметри. За да установим верността на последното, ще ни бъде необходим следващия резултат, показан от Slaman и Woodin, [**34**].

**Теорема 3.6.3.** *Всяка изброима $n$-арна релация в $\mathfrak{D}_T$ е определима с формула от първи ред с параметри.*

Нека изброимата релация $R \subseteq (\mathbf{D}_{T,\omega})^n$ е фиксирана. За краткост, да означим с $dom(R)$ съвкупността от онези степени, участващи в някоя наредена $n$-орка, която е елемент на релацията $R$. Понеже $R$ е изброима, то съществува степен $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1}$, ограничаваща $dom(R)$ т.е. за която

$$(\forall \mathbf{x} \in dom(R))[\mathbf{x} \leq \mathbf{a}].$$

Нека за определеност, $dom(R) = \{\mathbf{x}_k \mid k < \omega\}$. Съгласно Лема 3.2.6, за всяко $k < \omega$, съществува $\mathbf{a}_k \in \mathbf{D}_{T,1}$ такова, че $\mathbf{x}_k$ е точната долна граница на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_k$, т.е. $\mathbf{x}_k = \mathbf{a} \vee \mathbf{a}_k$. Идеята е да представим $R$ като $n$-арна релация в $\mathfrak{D}_{T,1}$, възприемайки $\mathbf{a}_k$ като представител на $\mathbf{x}_k$ в $\mathfrak{D}_{T,1}$. За целта, да означим с $R_1$ подмножеството на $(\{\mathbf{a}_k \mid k < \omega\})^n$, определено чрез

$$(\mathbf{a}_{k_1}, \mathbf{a}_{k_2}, \ldots, \mathbf{a}_{k_n}) \in R_1 \iff (\mathbf{x}_{k_1}, \mathbf{x}_{k_2}, \ldots, \mathbf{x}_{k_n}) \in R.$$

Да заблежим, че една наредена $n$-орка $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n)$ принадлежи на $R$ точно в този случай, когато

$$(\exists \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathbf{D}_{T,1})[(\forall k)[1 \leq k \leq n \rightarrow \mathbf{y}_k = \mathbf{a} \vee \mathbf{z}_k] \ \& \\ \& \ (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in R].$$

Тъй като $R_1$ е изброима релация в $\mathfrak{D}_{T,1}$, като последното представлява структура изоморфна на структурата $\mathfrak{D}_T$ на Тюринговите степени, то съществуват естествено число $l$ и формула $\psi$ на $l+n$ променливи, както и параметри $\vec{b} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_l) \in (\mathbf{D}_{T,1})^l$ такива, че за всяко $\vec{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in (\mathbf{D}_{T,1})^n$,

$$\vec{z} \in R_1 \iff \mathfrak{D}_{T,1} \models \psi(\vec{b}, \vec{z}).$$

Нека $\psi_1$ е формулата, получаваща се от $\psi$, ограничавайки всички квантори до $\mathbf{D}_{T,1}$. Следователно, за всяко $\vec{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in (\mathbf{D}_{T,1})^n$,

$$\vec{z} \in R_1 \iff \mathfrak{D}_{T,\omega} \models \psi_1(\vec{b}, \vec{z}).$$

Окончателно, получаваме верността на следващата теорема.

**Теорема 3.6.4.** *Всяка изброима $n$-арна релация в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ е определима чрез формула от първи ред с параметри.*

Остава отворен въпросът дали операторът скок е определим в структурата $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Интересно е да отбележим, че последния въпрос е еквивалентен на този дали множеството $\mathbf{D}_{T,1}$ е определимо в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Действително, както вече видяхме, $\mathbf{D}_{T,1}$ е определимо в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$, така че, ако скокът е определим, то такова би било и $\mathbf{D}_{T,1}$. Обратно, нека $\mathbf{D}_{T,1}$ е определимо в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Тогава, понеже операторът скокът е определим в $\mathfrak{D}_T$, **[33]**, то той ще бъде такъв и в $(\mathbf{D}_{T,1}, \leq, \vee)$. Освен това, според Лема 3.3.9, скокът на степента $\mathbf{a}$ е точна долна граница на скокове на коя и да е минимална двойка над $\mathbf{a}$. Остава да забележим само, че съгласно Лема 3.2.7, над всяка степен има минимална двойка, съставена от степени от $\mathbf{D}_{T,1}$.

## 3.7. Автоморфизмите на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$

Както вече видяхме, $\mathbf{D}_{T,1}$ е определима от първи ред база на автоморфизмите на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$, изоморфна на структурата на Тюринговите степени. Следователно, съществува инективно естествено влагане $\Lambda$ на групата $Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$ на автоморфизмите на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ в групата $Aut(\mathfrak{D}_T)$ на автоморфизмите на $\mathfrak{D}_T$. По-точно, изображението $\Lambda$ действува по правилото

$$\Lambda(\Phi) = \kappa_T^{-1} \circ \Phi \circ \kappa_T,$$

където $\Phi$ е произволен автоморфизъм на структурата $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. Целта на този раздел е да покаже, че в действителност изображението $\Lambda$ е изоморфизъм на групи.

**Теорема 3.7.1.** *Групите $Aut(\mathfrak{D}_T)$ и $Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$ са изоморфни.*

*Доказателство.* Достатъчно е да покажем, че изображението $\Lambda : Aut(\mathfrak{D}_T) \to Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$ е сюрективно. За целта, нека $\varphi$ е фиксиран автоморфизъм на $\mathfrak{D}_T$. Понеже операторът скок в $\mathfrak{D}_T$ е определим от първи ред (Shore и Slaman, [**33**]), то $\varphi$ трябва да е съгласуван с оператора скок в $\mathfrak{D}_T$, т.е.

$$\varphi(\mathbf{x}') = \varphi(\mathbf{x})',$$

за всяка Тюрингова степен $\mathbf{x}$. Освен това, според резултат доказан от Slaman и Woodin [**34**], $\varphi$ съвпада с идентитетния автоморфизъм върху горния конус над $\mathbf{0}''_T$, т.е.

$$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)[\mathbf{x} \geq \mathbf{0}''_T \to \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}].$$

Ще определим изображението $\Phi : \mathbf{D}_{T,\omega} \to \mathbf{D}_{T,\omega}$ по следния начин. Нека $\mathbf{a}$ е $\omega$-Тюрингова степен и нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ е неин представител. Дефинираме $\Phi(\mathbf{a})$ да бъде $\omega$-Тюринговата степен на коя и да е редица $\mathcal{A}^\varphi$ такава, че

$$A_0^\varphi \in \varphi(\deg_T(P_0^T(\mathcal{A}))),$$
$$A_1^\varphi \in \varphi(\deg_T(P_1^T(\mathcal{A})))$$

и

$$A_k^\varphi = A_k, \text{ за всяко } k \geq 2.$$

Не е трудно да се забележи, че $\Phi(\mathbf{a})$ е коректно дефинирано, т.е. не зависи нито от избора на $\mathcal{A}$, нито от избора на $\mathcal{A}^\varphi$. Ще покажем, че $\Phi$ е автоморфизъм на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ и, че $\Lambda(\Phi) = \varphi$.

Да забележим първо, че за всяка редица $\mathcal{A} \in \mathcal{S}_\omega$, редицата $\mathcal{A}^\varphi$, получена по по-горе описания начин, е такава, че

$$\mathcal{A}'' \equiv_{T,\omega} \mathcal{A}^{\varphi\prime\prime}.$$

Действително, понеже $\varphi$ действува неподвижно в конуса над $\mathbf{0}''_T$, получаваме

$$\begin{aligned}
\deg_T(P_2^T(\mathcal{A}^\varphi)) &= \deg_T((A_0^{\varphi\prime} \oplus A_1^\varphi)' \oplus A_2) = \\
&= (\deg_T(A_0^\varphi)' \vee \deg_T(A_1^\varphi))' \vee \deg_T(A_2) = \\
&= ((\varphi(\deg_T(A_0)))' \vee \varphi(\deg_T(A_1)))' \vee \deg_T(A_2) = \\
&= \varphi((\deg_T(A_0)' \vee \deg_T(A_1))') \vee \deg_T(A_2) = \\
&= (\deg_T(A_0)' \vee \deg_T(A_1))' \vee \deg_T(A_2) = \\
&= \deg_T((A_0' \oplus A_1)' \oplus A_2) = \deg_T(P_2^T(\mathcal{A})).
\end{aligned}$$

Така, $P_2^T(\mathcal{A}^\varphi) \equiv_T P_2^T(\mathcal{A})$. Но,

$$\mathcal{A}'' = (P_2^T(\mathcal{A}), A_3, A_4, \ldots)$$

и

$$\mathcal{A}^{\varphi\prime\prime} = (P_2^T(\mathcal{A}^\varphi), A_3, A_4, \ldots)$$

и, следователно, $\mathcal{A}'' \equiv_{T,\omega} \mathcal{A}^{\varphi\prime\prime}$.

За да установим, че $\Phi \in Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$, първо ще покажем, че $\Phi$ запазва наредбата, т.е. че за всеки две степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$,

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \iff \Phi(\mathbf{a}) \leq \Phi(\mathbf{b}).$$

Да забележим, че оттук непосредствено ще следва, че $\Phi$ е инективно. За целта, нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са произволни степени. Да фиксираме редици $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и $\mathcal{B} \in \mathbf{b}$ и нека редиците $\mathcal{A}^\varphi$ и $\mathcal{B}^\varphi$ са получени от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ съответно, по способа описан по-рано. В частност имаме, $\mathcal{A}^\varphi \in \Phi(\mathbf{a})$ и $\mathcal{B}^\varphi \in \Phi(\mathbf{b})$. От Следствие 3.1.7 получаваме, че $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$ точно тогава, когато

$$\begin{aligned} &P_k^T(\mathcal{A}) \leq_T P_k^T(\mathcal{B}), \text{ за } k \leq 1 \text{ и} \\ &\qquad A_k \leq_T P_k^T(\mathcal{B}) \text{ равномерно по } k \geq 2. \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

Тъй като $\varphi \in Aut(\mathfrak{D}_T)$, то условието

$$P_k^T(\mathcal{A}) \leq_T P_k^T(\mathcal{B}), \text{ за } k \leq 1,$$

е еквивалентно на

$$P_k^T(\mathcal{A}^\varphi) \leq_T P_k^T(\mathcal{B}^\varphi), \text{ за } k \leq 1.$$

По-нататък, $\mathcal{B}'' \equiv_{T,\omega} \mathcal{B}^{\varphi\prime\prime}$ влече, че условието

$$A_k \leq_T P_k^T(\mathcal{B}) \text{ равномерно по } k \geq 2,$$

е еквивалентен на

$$A_k \leq_T P_k^T(\mathcal{B}^\varphi) \text{ равномерно по } k \geq 2,$$

Следователно, (3.7.1) е еквивалентно с

$$\begin{aligned} &P_k^T(\mathcal{A}^\varphi) \leq_T P_k^T(\mathcal{B}^\varphi), \text{ за } k \leq 1 \text{ и} \\ &\qquad A_k \leq_T P_k^T(\mathcal{B}^\varphi) \text{ равномерно по } k \geq 2, \end{aligned}$$

което пък е изпълнено точно тогава, когато $\mathcal{A}^\varphi \leq_{T,\omega} \mathcal{B}^\varphi$. Така

$$\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B} \iff \mathcal{A}^\varphi \leq_{T,\omega} \mathcal{B}^\varphi.$$

Тогава, $\Phi$ е изображение, запазващо наредбата.

За да покажем, че $\Phi$ автоморфизъм на $\mathfrak{D}_{T,\omega}$, остава да видим, че $\Phi$ е сюрективно. За целта да фиксираме $\omega$-Тюрингова степен $\mathbf{a}^\varphi$. Нека $\mathcal{X}$ е произволна редица в $\mathcal{A}^\varphi$ и Нека $\mathcal{A}^\varphi$ е редицата $\mathcal{P}^T(\mathcal{X})$. Тогава, за $k \leq 1$, $A_l^\varphi \equiv_T P_k^T(\mathcal{A}^\varphi)$. Сега да разгледаме редица $\mathcal{A}$ със свойствата

$$A_k \in \varphi^{-1}(\deg_T(A_k^\varphi)) \text{ за } k \leq 1$$

и

$$A_k = A_k^\varphi, \text{ за } k \geq 2.$$

Да забележим, че редицата $\mathcal{A}^\varphi$ може да бъде получена от $\mathcal{A}$, използувайки способът, описан в определението на $\Phi$. Следователно, $\Phi(\deg_{T,\omega}(\mathcal{A})) = \mathbf{a}^\varphi$, и така $\Phi$ сюрективно.

Освен това $\Phi$ е и автоморфизъм на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$, тъй като е съгласувано с оператора скок, т.е.

$$\Phi(\mathbf{a}') = \Phi(\mathbf{a})',$$

за всяко $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. Наистина, нека $\mathbf{a}$ е $\omega$-Тюрингова степен и да фиксирама редица $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ и редица $\mathcal{A}^\varphi$, получена от $\mathcal{A}$ по начина описан в определението на $\Phi$. Сега, припомняйки си, че $\mathcal{A}' = (P_1^T(\mathcal{A}), A_2, A_3, \ldots)$, да забележим, че $\mathbf{0}''_T \leq \deg_T(P_1^T(\mathcal{A}'))$ и, следователно, $\varphi(\deg_T(P_1^T(\mathcal{A}'))) = \deg_T(P_1^T(\mathcal{A}'))$. Тогава, можем да вземем редицата $(\mathcal{A}')^\varphi$, дефинираща $\Phi(\mathbf{a}')$, да бъде $(\mathcal{A}^\varphi)'$. Така $\Phi(\mathbf{a}') = \Phi(\mathbf{a})'$.

Накрая, остава да покажем, че $\Lambda(\Phi) = \varphi$. За целта да фиксираме Тюрингова степен $\mathbf{a}$, множество $A \in \mathbf{a}$ и множество $A^\varphi \in \varphi(\mathbf{a})$. Понеже $\varphi$ е съгласувано с оператора скок в $\mathbf{D}_T$, то $(A^\varphi)' \in \varphi(\mathbf{a}')$. Освен това, $P_0^T(A \uparrow \omega) = A$ $P_1^T(A \uparrow \omega) \equiv_T A'$ така, че като редица $(A \uparrow \omega)^\varphi$, дефинираща $\Phi(\kappa_T(\mathbf{a}))$, можем да вземем редицата

$$(A^\varphi, (A^\varphi)', \emptyset, \emptyset, \ldots).$$

Да забележим, че $(A \uparrow \omega)^\varphi \equiv_{T,\omega} (A^\varphi) \uparrow \omega$ и, следователно,

$$\Phi(\kappa_T(\mathbf{a})) = \kappa_T(\varphi(\mathbf{a})).$$

Понеже последото е в сила за произволна Тюрингова степен $\mathbf{a}$, то

$$\Phi \circ \kappa_T = \kappa_T \circ \varphi.$$

Окончателно, $\Lambda(\Phi) = \varphi$. ■

Ще завършим този раздел с едно следствие, показващо, че всеки автоморфизъм на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ действува тривиално в горния конус над втория скок на най-малкия елемент.

**Теорема 3.7.2.** *Нека* $\Phi \in Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$. *Тогава* $\Phi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, *за всяко* $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}''_{T,\omega}$.

*Доказателство.* Нека $\Phi \in Aut(\mathfrak{D}'_{T,\omega})$ и $\mathbf{0}''_{T,\omega} \leq \mathbf{a}$. Нека $\varphi$ е елементът на $Aut(\mathfrak{D}_T)$, за който $\Lambda(\Phi) = \varphi$. Да забележим, че $\mathbf{0}''_{T,\omega} \leq \Phi(\mathbf{a})$ и, ако $\mathbf{x} \in \mathbf{D}_T$ и $\mathbf{0}''_{T,\omega} \leq \kappa_T(\mathbf{x})$, то $\mathbf{0}''_T \leq \mathbf{x}$. Тогава за всяка Тюрингова степен $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{a} \leq \kappa_T(\mathbf{x}) \iff \Phi(\mathbf{a}) \leq \Phi(\kappa_T(\mathbf{x})) \iff$$
$$\Phi(\mathbf{a}) \leq \kappa_T(\varphi(\mathbf{x})) \iff \Phi(\mathbf{a}) \leq \kappa_T(\mathbf{x}).$$

■

## 3.8. *a.z.* степени

В този раздел, по аналогия с $\omega$-номерационните степени, ще въведем понятието за *a.z.* степени. След това, ще докажем, че всяка ненулева *a.z.* степен ограничава ненулева *a.z.* степен, което понататък ще ни помогне в характеризацията на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Накрая ще покажем, че подструктурата на *a.z.* степените е достатъчно сложна за да вложи всяка изброима частична наредба.

**Определение 3.8.1.** *$\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{x}$ ще наричаме $a.z.$ точно тогава, когато съществува редица $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ такава, че*

$$(\forall k)[P_k^T(\mathcal{X}) \equiv_T \emptyset^{(k)}]. \tag{3.8.1}$$

От горната дефиниция веднага се вижда, че класът на $a.z.$ степените е затворен надолу.

### 3.8.1. Гъстота на $a.z.$ степените.

**Теорема 3.8.2.** *За всяка ненулева $a.z.$ степен $\mathbf{a}$ съществува ненулева $a.z.$ степен $\mathbf{b} < \mathbf{a}$. В частност, не съществуват минимални $a.z.$ степени.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a}$ е ненулева $a.z.$ степен и нека $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ е редица, удовлетворяваща (3.8.1). Ще построим редица $\mathcal{B}$ такава, че $\emptyset_\omega \lneq_{T,\omega} \mathcal{B} \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}$. Да фиксираме рекурсивна в $\emptyset''$ номерация $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ на всички рекурсивни функции. За да има $\mathcal{B}$ желаните свойства, достатъчно е $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$, както и да бъдат изпълнени следните изисквания:

$$R_{2e} : (\exists k)\left[A_k \neq \Phi_{f_e(k)}(P_k(\mathcal{B}))\right],$$

$$R_{2e+1} : (\exists k)\left[B_k \neq \Phi_{f_e(k)}(\emptyset^{(k)})\right].$$

Ще строим $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$, използвайки индукция по $k$. За всяко $k$, ще имаме или $B_k = \emptyset$, или $B_k = A_k$. Да забележим, че това автоматично ще ни даде, че $\mathcal{B}$ удовлетворява (3.8.1).

*Конструкция:* По време на конструкцията, ще използуваме глобална променлива $\mathfrak{r}$, която ще ни показва, изискването с най-малък индекс, което (възможно) все още не е удовлетворено. Започваме, задавайки $\mathfrak{r} = 0$ и $B_0 = B_1 = \emptyset$. Да предположим, че $k \geq 2$ и, че $B_s$ е определено за $s \leq k$. Да забележим, че предположението ни влече, че за $s \leq k$, $P_s^T(\mathcal{B})$ също е дефинирано.

*Случай 1:* $\mathfrak{r} = 2e$. Ако $A_{k-2} \neq \Phi_{f_e(k-2)}(P_{k-2}(\mathcal{B}))$, определяме $B_k = A_k$ и увеличаваме $\mathfrak{r}$ с 1. Иначе, определяме $B_k = \emptyset$ като $\mathfrak{r}$ не се променя.

*Случай 2:* $\mathfrak{r} = 2e + 1$. Ако $B_{k-2} \neq \Phi_{f_e(k-2)}(\emptyset^{(k-2)})$, определяме $B_k = \emptyset$ и увеличаваме $\mathfrak{r}$ с 1. Иначе, определяме $B_k = A_k$ като $\mathfrak{r}$ не се променя.

*Край на конструкцията.*

Първо да забележим, че според определението на Тюрингова скокредица $\mathcal{P}^T(\mathcal{A})$, $\emptyset''$ е равномерно рекурсивно в $P_k(\mathcal{A})$, за $k \geq 2$. Следователно, $k \geq 2$, $P_k(\mathcal{A})$ може равномерно да изчисли фиксираната ни номерация $f_0, f_1, f_2, \ldots$ на всички рекурсивни функции. Освен това, за $k \geq 2$, $P_{k-2}(\mathcal{A})'' \leq_T P_k(\mathcal{A})$ равномерно по $k$. Горе споменатите свойства на $P_k(\mathcal{A})$ и индукция върху $k \geq 2$ влече, че $P_k(\mathcal{A})$

може равномерно да изчисли $P_{k-2}(\mathcal{B})$, както и отговорите на въпросите $A_{k-2} \neq \Phi_{f_e(k-2)}(P_{k-2}(\mathcal{B}))$ и $B_{k-2} \neq \Phi_{f_e(k-2)}(\emptyset^{(k-2)})$. В частност, $P_k(\mathcal{A})$ може изчисли равномерно стойността на $\mathfrak{r}$ на етап $k$ и, следователно, може равномерно да изчисли $B_k$. Следователно, $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$.

Остава да покажем, че всички изисквания са удовлетворени. Да допуснем противното и, нека $n$ е най-малкият индекс на изискване, което не е удовлетворено. Да забележим, че конструкцията влече, че съществува етап $m$, на който глобалната променлива $\mathfrak{r}$ е била установена със стойност $n$, след което $\mathfrak{r}$ не променя вече стойноста си. Да предположим първо, че $n = 2e$ за някое естествено число $e$. Тогава, за всяко $k > m$, $A_{k-2} = \Phi_{f_e(k-2)}(P_{k-2}(\mathcal{B}))$ така, че $B_k = \emptyset$ за $k \geq m$, и $A_k \leq_T P_k(\mathcal{B})$ равномерно по $k > m$. От друга страна, за $0 \leq k \leq m$,

$$B_k \leq_T P_k(\mathcal{A}) \leq_T \emptyset^{(k)},$$

което заедно с предишното ни наблюдение влече, че $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$ и $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$. Така, $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$, което противоречи с избора на $\mathcal{A}$.

Ако $n = 2e + 1$, то по подобен начин получаваме, че $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \emptyset_\omega$, което отново противоречи с избора на $\mathcal{A}$. Следователно, предположението ни, че някои от изискванията не са удовлетворени, е погрешно и така $\emptyset_\omega \lneq_{T,\omega} \mathcal{B} \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}$. ■

### 3.8.2. Минимални двойки от $a.z.$ степени.

**Теорема 3.8.3.** *Съществуват $a.z.$ степени $\mathbf{a}, \mathbf{b} \leq \mathbf{0}'_{T,\omega}$ такива, че $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$ и $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$.*

*Доказателство.* По индукция дефинираме редиците $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ и $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k<\omega}$ като за всяко $k$,

$A_{2k} = \emptyset$,

$$B_{2k} = \begin{cases} \{0\}, & \text{ако } \Phi_k(2k)\downarrow \ \& \ \Phi_{\Phi_k(2k)}(P^T_{2k}(\mathcal{A}); 0) \downarrow\neq 1 \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases},$$

$B_{2k+1} = \emptyset$ и

$$A_{2k+1} = \begin{cases} \{0\}, & \text{ако } \Phi_k(2k+1)\downarrow \ \& \ \Phi_{\Phi_k(2k+1)}(P^T_{2k+1}(\mathcal{B}); 0) \downarrow\neq 1 \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Така за всяко $k < \omega$, $A_k \leq_T \emptyset^{(k)}$ & $B_k \leq_T \emptyset^{(k)}$. Чрез индукция по $k$, лесно се показва, че можем да построим $A_k$ и $B_k$, използувайки за оракул $\emptyset^{(k+1)}$, при това равномерно по $k$.

Действително, нека $e$ и $f$ са такива, че за всяко $X \subseteq \omega$, $\emptyset = \Phi_e(X)$ и $\{0\} = \Phi_f(X)$, съответно. Тогава $A_0 = P^T_0(\mathcal{A}) = \emptyset$, т.е. съществува $a_0 (= e)$ такова, че $A_0 = \Phi_{a_0}(\emptyset)$. Тогава с оракул $\emptyset'$ можем да определим дали $B_0$ е $\emptyset$ или $\{0\}$, т.е. с оракул $\emptyset'$ можем да намерим индекс $b_0 \in \{e, f\}$ такъв, че $P^T_0(\mathcal{B}) = B_0 = \Phi_{b_0}(\emptyset)$. Понеже $B_1 = \emptyset$, то съществува $b_1 (= e)$ такова, че $B_1 = \Phi_{b_1}(\emptyset')$. Тогава $P^T_1(\mathcal{B}) = P^T_0(\mathcal{B})' \oplus B_1 = (\Phi_{b_0}(\emptyset))' \oplus \Phi_{b_1}(\emptyset')$, и според Лема 1.2.1, с оракул $\emptyset'$ може да намерим равномерно по $b_0$ и $b_1$ индекс $pb_1$ такъв, че $P_1^T(\mathcal{B}) = \Phi_{pb_1}(\emptyset')$ (в означенията на Лема 1.2.1, $pb_1 = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}(b_0), b_1)$). Тогава с оракул $\emptyset''$ можем равномерно по $pb_1$ да определим дали $A_1$ е $\emptyset$ или $\{0\}$, т.е. с оракул $\emptyset''$ можем равномерно по $pb_1$ да намерим индекс $a_1 \in \{e, f\}$ такъв, че $A_1 = \Phi_{a_1}(\emptyset')$. Следователно, с оракул $\emptyset''$ равномерно по $a_0$ и $a_1$ можем да намерим индекс $pa_1$ такъв, че

$$P_1^T(\mathcal{A}) = P_0^T(\mathcal{A})' \oplus A_1 = (\Phi_{a_0}(\emptyset))' \oplus \Phi_{a_1}(\emptyset') = \Phi_{pa_1}(\emptyset').$$

Нека сега $k \geq 1$ и да допуснем, че за всяко $s < 2k$ с оракул $\emptyset^{(s+1)}$ можем да намерим индекси $a_s, b_s, pa_s$ и $pb_s$ такива, че $A_s = \Phi_{a_s}(\emptyset^{(s)})$, $B_s = \Phi_{b_s}(\emptyset^{(s)})$, $P_s^T(\mathcal{A}) = \Phi_{pa_s}(\emptyset^{(s)})$ и $P_s^T(\mathcal{B}) = \Phi_{pb_s}(\emptyset^{(s)})$, съответно. Понеже $A_{2k} = \emptyset$, то с оракул $\emptyset^{(2k)}$ (както и, с който и да е оракул) можем да намерим индекс $a_{2k}(= e)$ такъв, че $A_{2k} = \Phi_{a_{2k}}(\emptyset^{(2k)})$. Според индукционното предположение, с оракул $\emptyset^{(2k)}$ можем да намерим индекс $pa_{2k-1}$ такъв, че $P_{2k-1}^T(\mathcal{A}) = \Phi_{pa_{2k-1}}\emptyset^{(2k-1)})$. Понеже

$$P_{2k}^T(\mathcal{A}) = P_{2k-1}^T(\mathcal{A})' \oplus A_{2k} = (\Phi_{pa_{2k-1}}(\emptyset^{(2k-1)}))' \oplus \Phi_{a_{2k}}(\emptyset^{(2k)}),$$

то според Лема 1.2.1, с оракул $\emptyset^{(2k)}$ равномерно по $a_{2k}$ и $pa_{2k-1}$ можем да намерим индекс $pa_{2k} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}(pa_{2k-1}), a_{2k})$ такъв, че

$$P_{2k}^T(\mathcal{A}) = \Phi_{pa_{2k}}(\emptyset^{(2k)}). \tag{3.8.2}$$

Следователно, с оракул $\emptyset^{(2k+1)}$ равномерно по $pa_{2k}$ можем да определим дали $B_{2k}$ е $\emptyset$ или $\{0\}$. Тогава с оракул $\emptyset^{(2k+1)}$ равномерно по $pa_{2k}$ можем да намерим индекс $b_{2k} \in \{e, f\}$ такъв, че $B_{2k} = \Phi_{b_{2k}}(\emptyset^{(2k)})$. Пак от индукционното предположение следва, че с оракул $\emptyset^{(2k)}$ можем да намерим индекс $pb_{2k-1}$ такъв, че $P_{2k-1}(\mathcal{B}) = \Phi_{pb_{2k-1}}(\emptyset^{(2k-1)})$. Тогава от Лема 1.2.1 следва, че с оракул $\emptyset^{(2k+1)}$ можем равномерно по $b_{2k}$ и $pb_{2k-1}$ да намерим индекс $pb_{2k}$ такъв, че $P_{2k}^T(\mathcal{B}) = \Phi_{pb_{2k}}(\emptyset^{(2k)})$ ($pb_{2k} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}(pb_{2k-1}), b_{2k})$, в означенията на Лема 1.2.1). Сега, понеже $B_{2k+1} = \emptyset$, то с оракул $\emptyset^{(2k+1)}$ (както и, с който и да е оракул) можем да намерим индекс $b_{2k+1}(= e)$ такъв, че $B_{2k+1} = \Phi_{b_{2k+1}}(\emptyset^{(2k+1)})$. Тогава с оракул $\emptyset^{(2k+1)}$ равномерно по $b_{2k+1}$ и $pb_{2k}$ можем да намерим индекс $pb_{2k+1} = \mathfrak{i}(\mathfrak{j}(pb_{2k}), b_{2k+1})$ (в означенията на Лема 1.2.1) такъв, че

$$P_{2k+1}^T(\mathcal{B}) = \Phi_{pb_{2k+1}}(\emptyset^{(2k+1)}). \tag{3.8.3}$$

Следователно, с оракул $\emptyset^{(2k+2)}$ равномерно по $pb_{2k+1}$ можем да намерим индекс $a_{2k+1} \in \{e, f\}$ такъв, че $A_{2k+1} = \Phi_{a_{2k+1}}(\emptyset^{(2k+1)})$. Тогава с оракул $\emptyset^{(2k+2)}$ равномерно по $a_{2k+1}$ и $pa_{2k}$ можем да намерим индекс $pa_{2k+1}$ такъв, че $P_{2k+1}^T(\mathcal{A}) = \Phi_{pa_{2k+1}}(\emptyset^{(2k+1)})$. Съгласно принципа на математическата индукция, твърдението ще бъде вярно за всяко $k < \omega$, т.е. $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \emptyset'_\omega$ и $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \emptyset'_\omega$.

Като следствие ще отбележим, че от (3.8.2) и (3.8.3) лесно получаваме, че съществуват рекурсивни функции $h_{pa}$ и $h_{pb}$ такива, че за всяко $k < \omega$, $P_{2k}^T(\mathcal{A}) = \Phi_{h_{pa}(k)}(\emptyset^{(2k)})$ и $P_{2k+1}^T(\mathcal{B}) = \Phi_{h_{pb}(k)}(\emptyset^{(2k+1)})$.

Така от Лема 3.10.10 получаваме, че степените $\mathbf{a} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A})$ и $\mathbf{b} = \deg_{T,\omega}(\mathcal{B})$ са *a.z.*. Освен това те са и несравними. Наистина, да допуснем, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$. Тогава $\mathcal{A} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$, т.е. $\mathcal{A} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Тогава съществува рекурсивна функция $f$ такава, че за всяко $k$, $A_k = \Phi_{f(k)}(P^T_k(\mathcal{B}))$. Нека $n$ е такова, че $f = \Phi_n$. Тогава

$$\Phi_n(2n+1)\downarrow \ \& \ \Phi_{\Phi_n(2n+1)}(\mathcal{P}^T_{2n+1}(\mathcal{B}); 0)\downarrow.$$

От дефиницията на $A_{2n+1}$ следва, че

$$0 \in A_{2n+1} \iff \Phi_{\Phi_n(2n+1)}(\mathcal{P}^T_{2n+1}(\mathcal{B}); 0) \neq 1,$$

т.е. $A_{2n+1} \neq \Phi_{\Phi_n(2n+1)}(\mathcal{P}^T_{2n+1}(\mathcal{B}))$. Полученото противоречие показва, че $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{b}$. Аналогично се показва, че $\mathbf{b} \not\leq \mathbf{a}$. ■

**Определение 3.8.4.** *Нека* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$. *Ще казваме, че* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *образуват минимална двойка, ако е в сила, че*

$$(\forall \mathbf{c} \in \mathbf{D}_{T,\omega})[\mathbf{c} \leq \mathbf{a} \ \& \ \mathbf{c} \leq \mathbf{b} \ \rightarrow \ \mathbf{c} = \mathbf{0}_{T,\omega}].$$

**Следствие 3.8.5.** *Съществува минимална двойка от a.z. степени.*

*Доказателство.* Нека $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ са както в доказателството на Теорема 3.8.3. Тогава $\{P^T_{2k}(\mathcal{A})\}_{k<\omega} \leq_T \{\emptyset^{(2k)}\}_{k<\omega}$ и $\{P^T_{2k+1}(\mathcal{B})\}_{k<\omega} \leq_T \{\emptyset^{(2k+1)}\}_{k<\omega}$. Нека $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k<\omega}$ като $\mathcal{C} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$ и $\mathcal{C} \leq_{T,\omega} \mathcal{B}$. Тогава $\mathcal{C} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{A})$ и $\mathcal{C} \leq_T \mathcal{P}^T(\mathcal{B})$. Следователно $\{C_{2k}\}_{k<\omega} \leq_T \{\emptyset^{(2k)}\}_{k<\omega}$ и $\{C_{2k+1}\}_{k<\omega} \leq_T \{\emptyset^{(2k+1)}\}_{k<\omega}$. Оттук получаваме, че $\mathcal{C} \leq_T \{\emptyset^{(k)}\}_{k<\omega}$, т.е. $\mathcal{C} \equiv_{T,\omega} \emptyset_\omega$. ■

**Следствие 3.8.6.** *Съществува ненулева a.z. степен.*

### 3.8.3. Влагане на изброимите частични наредби.

**Определение 3.8.7.** *Нека $C$ е рекурсивно множество и $\{A_i\}_{i\in C}$ е съвкупност от множества от естествени числа. Тогава*

$$\bigoplus_{i\in C} A_i = \{\langle i, x\rangle \mid x \in A_i\}.$$

**Определение 3.8.8.** *Нека $C$ е рекурсивно множество и $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in C}$ е съвкупност от елементи на $\mathcal{S}$. Нека освен това, за всяко $i \in C$, $\mathcal{A}_i = \{A_{i,k}\}_{k<\omega}$. Тогава*

$$\bigoplus_{i\in C} \mathcal{A}_i = \{\bigoplus_{i\in C} A_{i,k}\}_{k<\omega}.$$

**Определение 3.8.9.** *Редицата от редици от множества от естествени числа $\{\mathcal{A}_i\}_{i<\omega}$ ще наричаме независима, ако за всяко $k < \omega$,*

$$\mathcal{A}_k \not\leq_{T,\omega} \bigoplus_{j\neq k} \mathcal{A}_j.$$

Директно следствие от горните дефиниции и от определението за *a.z.* степен е следната лема.

**Лема 3.8.10.** *Нека $C$ е рекурсивно*[1] *множество и* $\mathbf{a}_i = deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_i)$, $i \in C$ *са* $a.z.$ *степени. Тогава* $deg_{T,\omega}(\bigoplus_{i\in C} \mathcal{A}_i)$ *е* $a.z.$ *степен.*

**Лема 3.8.11.** *Съществува редица* $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_k\}_{k<\omega}$*, такава, че:*

(1) *$\mathbb{A}$ е независима редица;*
(2) *За всяко $k < \omega$, $deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_k)$ е $a.z.$ степен, ограничена от $\mathbf{0}'_{T,\omega}$;*
(3) *За всяко $k < \omega$, $deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_k)$ и $deg_{T,\omega}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i)$ образуват минимална двойка.*

*Доказателство.* Ще дефинираме елементите на $\mathbb{A}$ на етапи. Нека $n \geq 1$ и да положим $t_n = \frac{n^2+n-2}{2}$. Тогава на етап $n$, за всяко $l$ такова, че $0 \leq l \leq n$, дефинираме $A_{k,t_n+l} = \emptyset$, ако $k \neq l$ и

$$A_{l,t_n+l} = \begin{cases} \{0\}, & \text{ако } \Phi_{n-1}(t_n+l)\downarrow \ \& \\ & \qquad \& \ \Phi_{\Phi_{n-1}(t_n+l)}(\mathcal{P}^T_{t_n+l}(\bigoplus_{k\neq l} \mathcal{A}_k); 0) \downarrow \neq 1 \\ \emptyset, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Сега да допуснем, че $\mathbb{A}$ не е независима редица. Тогава съществува $k$, такова че $\mathcal{A}_k \leq_{T,\omega} \bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i$. Тогава съществува рекурсивна функция $f$, такава че за всяко $s$, $A_{k,s} = \Phi_{f(s)}(P^T_s(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i))$. Нека $f = \Phi_n$ като без ограничение можем да считаме, че $n \geq k$. Но тогава

$$0 \in A_{k,t_{n+1}+k} \iff 0 \notin \Phi_{\Phi_n(t_{n+1}+k)}(P^T_{t_{n+1}+k}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i)),$$

т.е. $A_{k,t_{n+1}+k} \neq \Phi_{\Phi_n(t_{n+1}+k)}(P^T_{t_{n+1}+k}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i))$. Полученото противоречие показва, че $\mathbb{A}$ е независима редица.

Както и в Теорема 3.8.3 имаме, че за всяко $k$, $A_{k,s} \leq_T \emptyset^{(s)}$ равномерно по $s$. Последното ще докажем с индукция по номера на етапа.

Наистина, на етап $n = 1$ за всяко $k \neq 0$, $A_{k,0} = \emptyset$. Тогава $P^T_0(\bigoplus_{k\neq 0} \mathcal{A}_k) = \emptyset$ и, следователно, с оракул $\emptyset'$ можем да намерим $a_{0,0}$ такова, че $A_{0,0} = \Phi_{a_{0,0}}(\emptyset)$. Тогава с оракул $\emptyset'$ можем да намерим $pa_{0,0}$ такова, че $P^T_0(\mathcal{A}_0) = \Phi_{pa_{0,0}}(\emptyset)$. Ясно е, че за всяко $k \neq 0$, с оракул $\emptyset'$ можем равномерно по $a_{0,0}$ да намерим $p_{0,k}$ такова, че $P^T_0(\bigoplus_{l\neq k} \mathcal{A}_l) = \Phi_{p_{0,k}}(\emptyset)$. Тогава с оракул $\emptyset'$ равномерно по $p_{0,1}$ можем да намерим $p_{1,1}$ такова, че

$$P^T_1(\bigoplus_{k\neq 1} \mathcal{A}_k) = P^T_0(\bigoplus_{k\neq 1} \mathcal{A}_k)' \oplus \bigoplus_{k\neq 1} A_{k,1} = \Phi_{p_{1,1}}(\emptyset').$$

Тогава с оракул $\emptyset''$ равномерно по $p_{1,1}$ можем да намерим $a_{1,1}$ такова, че $A_{1,1} = \Phi_{a_{1,1}}(\emptyset')$. Понеже за всяко $k \neq 1$, $A_{k,1} = \emptyset$, то с оракул $\emptyset''$ равномерно по $a_{1,1}$ и $p_{0,k}$ за всяко $k \neq 1$ можем да намерим индекс $p_{1,k}$ такъв, че $P^T_1(\bigoplus_{l\neq k} \mathcal{A}_l) = \Phi_{p_{1,k}}(\emptyset')$.

[1] Изискването за рекурсивност на $C$ е съществено.

Нека сега $n > 1$ и да допуснем, че за всяко $m < n$ и всяко $l$, такова че $0 \leq l \leq m$ чрез оракул $\emptyset^{(t_m+l+1)}$ за всяко $k < \omega$ можем да намерим числа $a_{k,t_m+l}$, $p_{t_m+l,k}$ и $pa_{t_m+l,k}$ такива, че

$$A_{k,t_m+l} = \Phi_{a_{k,t_m+l}}(\emptyset^{(t_m+l)}), P^T_{t_m+l}(\bigoplus_{l\neq k} \mathcal{A}_l) = \Phi_{p_{t_m+l,k}}(\emptyset^{(t_m+l)})$$

и $P^T_{t_m+l}(\mathcal{A}_k) = \Phi_{pa_{t_m+l,k}}(\emptyset^{(t_m+l)})$. Ще докажем, че това е в сила и за етап $n$.

Нека $l = 0$. Тогава, за всяко $k \neq 0$, $A_{k,t_n+l} = \emptyset$, т.е. с оракул $\emptyset^{(t_n+1)}$ (както и, с който и да е оракул) можем да намерим индекси $a_{k,t_n}$, за които $A_{k,t_n} = \Phi_{a_{k,t_n}}(\emptyset^{(t_n)})$. Така, използувайки Лема 1.2.1 получаваме, че за всяко $k \neq 0$, равномерно по $a_{k,t_n}$ и $pa_{t_{n-1}+n-1}$ използувайки оракул $\emptyset^{(t_n)}$ можем да намерим $pa_{t_n,k}$ такива, че

$$P^T_{t_n}(\mathcal{A}_k) = \Phi_{pa_{t_n}}(\emptyset^{(t_n)}). \tag{3.8.4}$$

Освен това, понеже

$$P^T_{t_n}(\bigoplus_{k\neq 0} \mathcal{A}_k) = P^T_{t_{n-1}+n-1}(\bigoplus_{k\neq 0} \mathcal{A}_k)' \oplus \bigoplus_{k\neq 0} A_{k,t_n},$$

то използувайки индукционното предположение за вече построените елементи на етап $n$ и Лема 1.2.1 получаваме, че чрез оракул $\emptyset^{(t_n)}$ равномерно по $p_{t_{n-1}+n-1,0}$ можем да намерим индекс $p_{t_n,0}$ такъв, че

$$P^T_{t_n}(\bigoplus_{k\neq 0} \mathcal{A}_k) = \Phi_{p_{t_n,0}}(\emptyset^{(t_n)}). \tag{3.8.5}$$

Тогава с оракул $\emptyset^{(t_n+1)}$ равномерно по $p_{t_n,0}$ можем да намерим $a_{0,t_n}$ такова, че $A_{0,t_n} = \Phi_{a_{0,t_n}}(\emptyset^{(t_n)})$. Следователно, с оракул $\emptyset^{(t_n+1)}$ равномерно по $a_{0,t_n}$ и $pa_{t_{n-1}+n-1,l}$, можем да намерим $pa_{t_n,0}$ такова, че $P^T_{t_n}(\mathcal{A}_0) = \Phi_{pa_{t_n}}(\emptyset^{(t_n)})$. Нека сега $k \neq 0$ е произволно. Тогава, понеже

$$P^T_{t_n}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i) = P^T_{t_{n-1}+n-1}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i)' \oplus \bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i,$$

то с оракул $\emptyset^{(t_n+1)}$ равномерно по $a_{0,t_n}$ и $p_{t_{n-1}+n-1,k}$ можем да намерим индекс $p_{t_n,k}$ такъв, че $P^T_{t_n}(\bigoplus_{i\neq k} \mathcal{A}_i) = \Phi_{p_{t_n,k}}(\emptyset^{(t_n)})$. В случая $l = 0$ сме използували, че $t_n = t_{n-1} + n$.

Нека $0 < l \leq n$ и да допуснем, че за всяко $j < l$ чрез оракул $\emptyset^{(t_n+j+1)}$ за всяко $k < \omega$, можем да намерим числа $a_{k,t_n+j}$, $p_{t_n+j,k}$ и $pa_{t_n+j,k}$ такива, че $A_{k,t_n+j} = \Phi_{a_{k,t_n+j}}(\emptyset^{(t_n+j)})$, $P^T_{t_n+j}(\bigoplus_{l\neq k} \mathcal{A}_l) = \Phi_{p_{t_n+j,k}}(\emptyset^{(t_n+j)})$ и $P^T_{t_n+j}(\mathcal{A}_k) = \Phi_{pa_{t_n+j,k}}(\emptyset^{(t_n+j)})$. Тогава, за всяко $k \neq l$, $A_{k,t_n+l} = \emptyset$, т.е. с оракул $\emptyset^{(t_n+l+1)}$ (както и, с който и да е оракул) можем да намерим индекси $a_{k,t_n+l}$, за които $A_{k,t_n+l} = \Phi_{a_{k,t_n+l}}(\emptyset^{(t_n+l)})$. Така, използувайки Лема 1.2.1 получаваме, че за всяко $k \neq l$, равномерно по $a_{k,t_n+l}$ и $pa_{t_n+l-1}$ използувайки оракул $\emptyset^{(t_n+l)}$ можем да намерим $pa_{t_n+l,k}$ такива, че

$$P^T_{t_n+l}(\mathcal{A}_k) = \Phi_{pa_{t_n+l}}(\emptyset^{(t_n+l)}). \tag{3.8.6}$$

Освен това, понеже

$$P^T_{t_n+l}(\bigoplus_{k\neq l}\mathcal{A}_k) = P^T_{t_n+l-1}(\bigoplus_{k\neq l}\mathcal{A}_k)' \oplus \bigoplus_{k\neq l} A_{k,t_n+l},$$

то от индукционното предположение за вече построените елементи на етап $n$ и Лема 1.2.1 получаваме, че чрез оракул $\emptyset^{(t_n+l)}$ равномерно по $p_{t_n+l-1,l}$ можем да намерим индекс $p_{t_n+l,l}$ такъв, че

$$P^T_{t_n+l}(\bigoplus_{k\neq l}\mathcal{A}_k) = \Phi_{p_{t_n+l,l}}(\emptyset^{(t_n+l)}). \tag{3.8.7}$$

Тогава с оракул $\emptyset^{(t_n+l+1)}$ равномерно по $p_{t_n+l,l}$ можем да намерим $a_{l,t_n+l}$ такова, че $A_{l,t_n+l} = \Phi_{a_{l,t_n+l}}(\emptyset^{(t_n+l)})$. Следователно, с оракул $\emptyset^{(t_n+l+1)}$ равномерно по $a_{l,t_n+l}$ и $pa_{t_n+l-1,l}$, можем да намерим $pa_{t_n+l,l}$ такова, че $P^T_{t_n+l}(\mathcal{A}_l) = \Phi_{pa_{t_n+l}}(\emptyset^{(t_n+l)})$. Нека сега $k \neq l$ е произволно. Тогава, понеже

$$P^T_{t_n+l}(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i) = P^T_{t_n+l-1}(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i)' \oplus \bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i,$$

то с оракул $\emptyset^{(t_n+l+1)}$ равномерно по $a_{l,t_n+l}$ и $p_{t_n+l-1,k}$ можем да намерим индекс $p_{t_n+l,k}$ такъв, че $P^T_{t_n+l}(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i) = \Phi_{p_{t_n+l,k}}(\emptyset^{(t_n+l)})$. Следователно, твърдението е вярно и за етап $n$. Тогава, съгласно принципа на математическата индукция твърдението ще бъде вярно за всяко $n$. Следователно за всяко $k$, $\mathcal{A}_k \leq_{T,\omega} \emptyset'_\omega$ и от това, че елементите на $\mathcal{A}_k$ са крайни множества, използувайки Лема 3.10.10 получаваме, че за всяко $k$, $\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_k)$ е $a.z.$ степен.

За всяко $k$, да означим $T_k = \{t_n + k \mid n \geq k\}$. От (3.8.4) и (3.8.6) следва, че за всяко $k$, $\{P^T_l(\mathcal{A}_k)\}_{l\in\omega\setminus T_k} \leq_T \{\emptyset^{(l)}\}_{l\in\omega\setminus T_k}$. От (3.8.5) и (3.8.7) получчваме, че $\{P^T_l(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i)\}_{l\in T_k} \leq_T \{\emptyset^{(l)}\}_{l\in T_k}$. Нека $k$ е произволно и да допуснем, че $\mathcal{C} = \{C_l\}_{l<\omega}$ е такова, че $\mathcal{C} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}_k$ и $\mathcal{C} \leq_{T,\omega} \bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i$. Тогава, $\{C_l\}_{l<\omega} \leq_T \{P^T_l(\mathcal{A}_k)\}_{l<\omega}$ и $\{C_l\}_{l<\omega} \leq_T \{P^T_l(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i)\}_{l<\omega}$. Следователно,

$$\{C_l\}_{l\in\omega\setminus T_k} \leq_T \{P^T_l(\mathcal{A}_k)\}_{l\in\omega\setminus T_k} \leq_T \{\emptyset^{(l)}\}_{l\in\omega\setminus T_k}$$

и

$$\{C_l\}_{l\in T_k} \leq_T \{P^T_l(\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i)\}_{l\in T_k} \leq_T \{\emptyset^{(l)}\}_{l\in T_k}.$$

Тогава $\mathcal{C} \leq_T \{\emptyset^{(l)}\}_{l<\omega}$ и, следователно, степените на $\mathcal{A}_k$ и $\bigoplus_{i\neq k}\mathcal{A}_i$ образуват минимална двойка. ■

В частност получаваме:

**Следствие 3.8.12.** *Съществуват безброй много $a.z.$ степени.*

От Лема 3.8.11 получаваме, че всяка изброима рекурсивна частична наредба може да се вложи в структурата на $a.z.$ степените с индуцираната наредба от $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

**Следствие 3.8.13.** *Нека $M = (\omega; \preceq)$ е изброима рекурсивна частична наредба. Тогава съществува влагане на $M$ в*

$$(\{\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{d} \text{ е } a.z. \text{ степен}\}; \leq\restriction \{\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{d} \text{ е } a.z. \text{ степен}\}).$$

*Доказателство.* Нека $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_k\}_{k<\omega}$ е независимата редица от Лема 3.8.11. Нека за всяко $k < \omega$, $\mathbf{a}_k = \deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_k)$. Ще дефинираме влагането $\zeta : \omega \to \{\mathbf{d} \in \mathbf{D}_{T,\omega} \mid \mathbf{d} \text{ е } a.z. \text{ степен}\}$ по следния начин:

$$\zeta(i) = \deg_{T,\omega}(\bigoplus_{k \preceq i} \mathcal{A}_k).$$

От Лема 3.8.10 следва, че $\zeta$ е коректно дефинирано. Ще докажем, че $\zeta$ е влагане на частични наредби.

Да предположим, че $i \preceq j$. Тогава множествата $M_i = \{k \mid k \preceq i\}$ и $M_j = \{k \mid k \preceq j\}$ са рекурсивни и от транзитивността на релацията " $\preceq$ " следва, че $M_i \subseteq M_j$. Тогава $\bigoplus_{k \in M_i} \mathcal{A}_k \leq_{T,\omega} \bigoplus_{k \in M_j} \mathcal{A}_k$ и, следователно, $\zeta(i) \leq \zeta(j)$.

Накрая да преположим, че $i \not\preceq j$. Тогава $i \notin M_j = \{k \mid k \preceq j\}$ и, следователно, $M_j \subseteq \{k \mid k \neq i\}$. От рефлексивността на релацията " $\preceq$ " имаме, че $i \in M_i = \{k \mid k \preceq i\}$. Сега, ако предположим, че $\zeta(i) \leq \zeta(j)$ ще получим противоречие с независимостта на редицата $\mathbb{A}$:

$$\deg_{T,\omega}(\mathcal{A}_i) \leq \deg_{T,\omega}(\bigoplus_{k \in M_i} \mathcal{A}_k) = \zeta(i) \leq$$
$$\leq \zeta(j) = \deg_{T,\omega}(\bigoplus_{k \in M_j} \mathcal{A}_k) \leq \deg_{T,\omega}(\bigoplus_{k \neq i} \mathcal{A}_k).$$

■

В **[19]** Mostowski доказва, че съществува рекурсивна частична наредба, в която може да се вложи всяка изброима частична наредба. Следователно всяка изброима частична наредба може да се вложи в структурата на $a.z.$ степените с индуцираната наредба от $\mathfrak{D}_{T,\omega}$.

### 3.9. Минимални степени

Да припомним, че степента $\mathbf{a}$ в дадена степенна структура $\mathfrak{D}$ се нарича минимална, ако единствената степен строго под нея е най-малкият елемент на структурата $\mathfrak{D}$. Така, например, структурите на номерационните и $\omega$-номерационните степени не притежават минимални степени, **[38]**. От друга страна, в структурата на Тюринговите степени има континуум много минимални степени. Нещо повече, за всяка Тюрингова степен $\mathbf{a}$, съществуват минимални Тюрингови степени $\mathbf{m}_0, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ и $\mathbf{m}_3$, за които

$$\mathbf{a} = (\mathbf{m}_0 \vee \mathbf{m}_1) \wedge (\mathbf{m}_2 \vee \mathbf{m}_3),$$

където $\wedge$ отбелязва точната долна граница на две степени. В частност, минималните степени в $\mathfrak{D}_T$ образуват база на автоморфизмите.

До сега видяхме, че структурата на $\omega$-Тюринговите степени изглежда близка до тази на Тюринговите степени, затова е естествено да се предположи, че $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ също притежава минимални степени. В този раздел ще проверим, че това наистина е така. Обаче, характеризацията на минималните $\omega$-Тюрингови степени ще разкрие, че те са строго ограничени отгоре от $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. В частност, $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ ще има най-много изброимо много минимални степени.

Ще започнем характеризацията на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$, намирайки необходимите условия, за това една $\omega$-Тюрингова степен да бъде минимална. За целта, да предположим, че е $\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,\omega}$ е минимална и да фиксираме редица $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Да допуснем, че съществуват поне две естествени числа $n < m$ такива, че $P^T_n(\mathcal{A}) \not\equiv_T \emptyset^{(n)}$ и $P^T_m(\mathcal{A}) \not\equiv_T \emptyset^{(m)}$. Тогава нека $\mathcal{A}^-$ е редицата, получена от $\mathcal{P}^T(\mathcal{A})$, замествайки всеки от елементите ѝ, с изключение на $P^T_m(\mathcal{A})$, с празното множество, т.е.

$$\mathcal{A}^- = (\emptyset, \emptyset, \ldots, P^T_m(\mathcal{A}), \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots).$$

Да забележим, че $\mathcal{A}^- \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$. Понеже $n < m$ и $P^T_n(\mathcal{A}) \not\equiv_T \emptyset^{(n)}$, то последното неравенство е строго, т.е. $\mathcal{A}^- \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}$. Освен това, тъй като $P^T_m(\mathcal{A}) \not\equiv_T \emptyset^{(m)}$, то $\emptyset_\omega$ е строго под $\mathcal{A}^-$, $\emptyset_\omega \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}^-$. Следователно,

$$\mathbf{0}_{T,\omega} \lneq \deg_{T,\omega}(\mathcal{A}^-) \lneq \mathbf{a},$$

което противиречи с минималността на $\mathbf{a}$.

Така, за всяка минималана степен $\mathbf{a}$ и всяка редица $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ или

$$P^T_k(\mathcal{A}) \equiv_T \emptyset^{(k)} \text{ за всяко естествено число } k, \tag{3.9.1}$$

или

$$\text{съществува единствено } n \text{ такова, че } P^T_n(\mathcal{A}) \not\equiv_T \emptyset^{(n)}. \tag{3.9.2}$$

Ако е изпълнено (3.9.1), то тогава степента $\mathbf{a}$ е $a.z.$. Това, обаче, е невъзможно, понеже според Теорема 3.8.2, никоя $a.z.$ степен не може да бъде минимална. Единствената възможност остава случай (3.9.2). По-нататък, да забележим, че ако $\mathbf{a}$ е минимална степен и $\mathcal{A}$ е редица в нея, за която е в сила (3.9.2), то Тюринговата степен на $P^T_n(\mathcal{A})$ е минимално покритие[2] на $\mathbf{0}^{(n)}_T$, защото иначе (т.е. ако

[2]Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \leq)$ е частично наредено множество и $\mathbf{m}, \mathbf{a} \in \mathbf{D}$. Ще казваме, че $\mathbf{m}$ е минимално покритие на $\mathbf{a}$, ако $\mathbf{a} < \mathbf{m}$ и $\mathfrak{D}(\mathbf{a}, \mathbf{m}) = \emptyset$. В частност, всяка минимална степен е минимално покритие на най-малкия елемент.

има множество такова, че $\emptyset^{(n)} \lneq_T B \lneq_T P_n^T(\mathcal{A})$) редицата

$$\mathcal{B} = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, B, \emptyset, \dots),$$

ще бъде такава, че $\emptyset_\omega \lneq_{T,\omega} \mathcal{B} \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}$.

Освен това, $P_n^T(\mathcal{A})$ трябва да бъде ниско над $\emptyset^{(n)}$ (т.е. $P_n^T(\mathcal{A})' \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$), тъй като $\emptyset^{(n)} \leq_T P_n^T(\mathcal{A})$ и $P_{n+1}^T(\mathcal{A}) = P_n^T(\mathcal{A})' \oplus A_{n+1} \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$.

Накрая, да разгледаме редицата $\mathcal{A}^-$, получена от $\mathcal{A}$, замествайки първите ѝ $n+1$ елемента с празното множество, т.е.

$$\mathcal{A}^- = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{n+1}, P_{n+1}^T(\mathcal{A}), P_{n+2}^T(\mathcal{A}), \dots).$$

Тогава $\mathcal{A}^- \lneq_{T,\omega} \mathcal{A}$ и, следователно, $\mathcal{A}^- \equiv_{T,\omega} \emptyset_\omega$. В частност, равномерно по $k > n$, $P_k^T(\mathcal{A}) \leq_T \emptyset^{(k)}$. Окончателно,

$$\mathcal{A} \equiv_T (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \dots),$$

където Тюринговата степен на $A$ е ниско над $\mathbf{0}_T^{(n)}$ минимално покритие на $\mathbf{0}_T^{(n)}$.

Оказва се, че тези условия са и достатъчни. Действително, нека $\mathbf{a}$ е $\omega$-Тюрингова степен, която съсдържа редица $\mathcal{A}$ такава, че

$$\mathcal{A} = (\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \dots),$$

където Тюринговата степен на $A$ е минимално покритие на $\mathbf{0}_T^{(n)}$ и $A' \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$. Тогава $A \not\leq_T \emptyset^{(n)} \equiv_T P_n^T(\emptyset_\omega)$ така, че $\mathbf{a} \not\leq \mathbf{0}_{T,\omega}$. Да предположим, че $\mathcal{B} \leq_{T,\omega} \mathcal{A}$. Да забележим, че $A' \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$ влече, че $P_k^T(\mathcal{A}) \equiv_T \emptyset^{(k)}$ равномерно по $k \neq n$ и, следователно, за $k \neq n$, $B_k \leq_T \emptyset^{(k)}$ равномерно по $k$. От вида на редицата $\mathcal{A}$ е ясно също, че $B_n \leq_T A$, откъдето или $B_n \emptyset^{(n)}$, или $B_n \equiv_T A$. В първия случай получаваме, че $\mathcal{B} \equiv_{T,\omega} \emptyset_\omega$, а във втория – $\mathcal{B} \equiv_{T,\omega} \mathcal{A}$. Следоветелно степента $\mathbf{a}$ е минимална.

**Теорема 3.9.1.** *$\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{a}$ е минимална тогава и само тогава, когато сдържа редица от вида*

$$(\underbrace{\emptyset, \dots, \emptyset}_{n}, A, \emptyset, \dots),$$

*където Тюринговата степен на $A$ е минимално покритие на $\mathbf{0}_T^{(n)}$ и $A' \equiv_T \emptyset^{(n+1)}$.*

Да отбележим, че определенията на оператора $I^n_{\emptyset_\omega}(\mathcal{A})$ и влагането $\kappa_T$, заедно с горната Теорема влекат, че една $\omega$-Тюрингова степен $\mathbf{a}$ е минимална точно тогава, когато съществува естествено число $n$ такова, че $\mathbf{a} = \mathbf{I}^n(\kappa_T(\widetilde{\mathbf{a}}))$, за някоя Тюрингова степен $\widetilde{\mathbf{a}}$, която е минимално покритие на $\mathbf{0}_T^{(n)}$, и чийто първи скок е възможно най-нисък, т.е. $\widetilde{\mathbf{a}}' = \mathbf{0}_T^{(n+1)}$. В частност при $n = 0$, влагането $\kappa_T$ изобразява ниска минимална Тюрингова степен в минимална $\omega$-Тюрингова степен. Следователно, съществуват поне изброимо много минимални $\omega$-Тюрингови степени.

От друга страна, от свойство $(I5)$ следва, че операторът $\mathbf{I}^n$ е монотонен и, така, ако $\mathbf{a}$ е минимална, то съществува естествено число $n$ такова, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)})$. Обаче, $(\mathbf{0}'_{T,\omega})^{(n)} = \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}$ и, следователно, $\mathbf{I}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}) \leq \mathbf{0}'_{T,\omega}$. Тогава, множеството на минималните $\omega$-Тюрингови степени е ограничено отгоре от първия скок на най-малкия елемент. Оттук можем да заключим, че съществуват точно изброимо много минимални $\omega$-Тюрингови степени.

Фактът, че $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ ограничава всяка минимална степен, поражда въпроса дали $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ може да бъде определено по един изключително прост начин:

**Отворен въпрос 3.9.2.** *Е ли $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ най-малката степен, която ограничава всяка минимална степен?*

Що се отнася до степените сравними с $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ това се оказва вярно:

**Теорема 3.9.3.** *За всяко $\mathbf{c} < \mathbf{0}'_{T,\omega}$ съществува минимална степен $\mathbf{m}$ такава, че $\mathbf{m} \not\leq \mathbf{c}$.*

Действително, достатъчно е да се облегнем на съответния на доказваната Теорема резултат[3], касаещ структурата на Тюринговите степени (за доказателство на резултата виж Допълнение A). В този случай, бихме имали минимална ниска (Тюрингова) степен $\mathbf{m}$ такава, че $\mathbf{m} \not\leq \lambda_T(\mathbf{c})$. Така $\kappa_T(\mathbf{m})$ ще бъде минимална степен, чийто горен конус не съдържа степента $\mathbf{c}$.

## 3.10. Локална теория

Този раздел е посветен на локалната теория на $\omega$-Тюринговите степени, т.е. на теорията на степените, заключени в интервала между най-малката $\omega$-Тюрингова степен и нейния първи скок. По-нататък, с $\mathbf{G}_{T,\omega}$ ще означаваме съвкупността на степените под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$, а с $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ – структурата $(\mathbf{G}_{T,\omega}, \leq)$ с индуцирана наредба от $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Както видяхме в Раздел 3.9, минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ са изцяло съсредоточени в $\mathbf{G}_{T,\omega}$.

По-нататък, степен в локалната структура $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ ще наричаме *$n$-висока* за някое $n$, ако $n$-тият и скок е възможно най-голям. Аналогично, степен в локалната структура е *$n$-ниска* за някое $n$, ако $n$-тият и скок е възможно най-малък. Формално, степента $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ е $n$-висока, ако $\mathbf{a}^{(n)} = (\mathbf{0}'_{T,\omega})^{(n)} = \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}$ и е $n$-ниска, ако $\mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n)}$.

---

[3] По-точно:
За всяко $\mathbf{c} < \mathbf{0}'_T$ съществува ниска минимална степен $\mathbf{m}$ такава, че $\mathbf{m} \not\leq \mathbf{c}$.

Освен това, с $\mathbf{H}_n$ ще бележим съвкупността на всички $n$-високи степени, а с $\mathbf{L}_n$ – съвкупността на всички $n$-ниски степени. Понататък $\mathbf{H}$ ще означава обединението на класовете $\mathbf{H}_n$ и, аналогично, $\mathbf{L}$ ще бележи обединението на класовете $\mathbf{L}_n$. Накрая, с $\mathbf{I}$ ще обозначаваме съвкупността на степените в $\mathbf{G}_{T,\omega}$, които не са нито $n$-високи, нито $n$-ниски за никое $n$. Степените в $\mathbf{I}$ ще наричаме *междинни.*

За $\mathfrak{D}_T$ е в сила следната теорема, произтичаща от резултатите на Sacks [**28**], Lachlan [**14**] и Martin [**16**]:

**Теорема 3.10.1.** *За всяко $n$, класовете $\mathbf{L}_{n+1} - \mathbf{L}_n$ и $\mathbf{H}_{n+1} - \mathbf{H}_n$ са непразни. Освен това, класът $\mathbf{I}$ също е непразен.*

Понеже $\mathfrak{D}'_T$ се влага в $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$, то горната теорема е в сила и за последната структурата.

За разлика от локалните структури на Тюринговите и номерационните степени, в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ има степени, които могат да бъдат явно дефинирани. По аналогия с $\omega$-номерационните степени, ако $n \geq 1$, то нека $\mathbf{o}_n = \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)})$, т.е. най-малката степен, чийто $n$-ти скок съвпада с $(n+1)$-тия скок на $\mathbf{0}_{T,\omega}$. Така $\mathbf{o}_n$ е най-малкият елемент на класа $\mathbf{H}_n$.

От дефиницията на операцията обръщане на скока имаме, че за всяко $n \geq 1$, $\mathbf{o}_n = \deg_{T,\omega}(\{O_{n,k}\}_{k<\omega})$, където

$$O_{n,k} = \begin{cases} \emptyset, & \text{за } k < n \\ \emptyset^{(k+1)}, & \text{за } k \geq n \end{cases}.$$

Да означим $\mathbf{o}_0 = \mathbf{0}'_{T,\omega}$. Непосредствено следствие от явния вид на степените $\mathbf{o}_n$ е следното твърдение.

**Лема 3.10.2.** *В сила са следните твърдения:*

(O1) $(\forall n < \omega)[\mathbf{o}_{n+1} \leq \mathbf{o}_n \,\&\, \mathbf{o}_{n+1} \neq \mathbf{o}_n]$;
(O2) $(\forall n < \omega)[\mathfrak{D}_{T,\omega}[\mathbf{o}_{n+1}, \mathbf{o}_n] \cong \mathfrak{D}_T[\mathbf{0}_T^{(n)}, \mathbf{0}_T^{(n+1)}]]$;
(O3) $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}_T)[\kappa_T(\mathbf{x}) \leq \mathbf{o}_1 \to \mathbf{x} = \mathbf{0}_T]$;
(O4) $(\forall n < \omega)[\mathbf{H}_n = \{\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_{T,\omega} \mid \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}\}]$.

**Лема 3.10.3.** *Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. Тогава за всяко $n < \omega$,*

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}).$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ и $n$ е фиксирано естествено число. Понеже $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}'_{T,\omega}$, то $\mathbf{x}^{(n)} \leq \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}$ и, следователно, $\mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) \leq \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}) = \mathbf{o}_n$. От друга страна, очевидно, $\mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) \leq \mathbf{x}$.

Нека сега $\mathbf{y} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ и $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}, \mathbf{o}_n$. От $\mathbf{y} \leq \mathbf{o}_n$ и (2) на Лема 3.5.6 следва, че $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{y}^{(n)})$. Освен това, $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ влече, че $\mathbf{y}^{(n)} \leq \mathbf{x}^{(n)}$, откъдето $\mathbf{y} = \mathbf{I}^n(\mathbf{y}^{(n)}) \leq \mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)})$. ■

Като следствие от предходното твърдение получаваме следната характеризация на класовете $\mathbf{L}_n$ и $\mathbf{H}_n$.

**Теорема 3.10.4.** *Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. Тогава:*

(1) $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_n \iff \mathbf{o}_n \leq \mathbf{x}$;
(2) $\mathbf{x} \in \mathbf{L}_n \iff \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_{T,\omega}$.

*Доказателство.*
(1) Следва директно от дефинициите на $\mathbf{o}_n$ и $\mathbf{H}_n$.
(2) $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n)} \iff \mathbf{I}^n(\mathbf{x}^{(n)}) = \mathbf{0}_{T,\omega} \iff \mathbf{x} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_{T,\omega}$.

■

**Лема 3.10.5.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ *и* $n < \omega$. *Тогава,*

$$\mathbf{a} \vee \mathbf{o}_n = \mathbf{I}_{\mathbf{a}}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n+1)}).$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ и $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$ е произволна редица. Ако $n = 0$, твърдението тривиално е изпълнено. По-нататък, да забележим, че за произволно $n \geq 1$,

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, \emptyset^{(n+1)}, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots) \in \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_n,$$

т.е.

$$I_{\mathcal{A}}^n\left(\emptyset_{\omega}^{(n+1)}\right) \in \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_n.$$

Това доказва лемата. ■

Следващата лема разкрива, че изоморфното копие на Тюринговите степени под $\mathbf{0}'_T$, получено под действието на влагането $\kappa_T$, е определимо в локалната теория в термините на степента $\mathbf{o}_1$.

**Лема 3.10.6.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. *Тогава*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega})[\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_1 = \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_1 \rightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{x}].$$

*Доказателство.* Според Лема 3.10.5, достатъчно е да покажем, че

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \iff (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega})[\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}''_{T,\omega}) = \mathbf{I}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}''_{T,\omega}) \rightarrow \mathbf{a} \leq \mathbf{x}].$$

Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega} \cap \mathbf{D}_{T,1}$ и множеството $A$ е такова, че $A \uparrow \omega \in \mathbf{a}$. Да предположим, че $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ е такова, че $\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}''_{T,\omega}) = \mathbf{I}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}''_{T,\omega})$ и нека още $\mathcal{X} = \{X_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{x}$. Да забележим, че $I_{\mathcal{X}}^1(\emptyset''_{\omega}) \equiv_{T,\omega} I_{\mathcal{A}}^1(\emptyset''_{\omega})$. Тогава,

$$(A, \emptyset'', \emptyset^{(3)}, \ldots) \equiv_{T,\omega} (X_0, \emptyset'', \emptyset^{(3)}, \ldots).$$

Следователно, $\mathcal{A} = A \uparrow \omega \leq_{T,\omega} X \uparrow \omega \leq_{T,\omega} \mathcal{X}$.

Нека сега $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ е такава, че за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$, $\mathbf{I}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}''_{T,\omega}) = \mathbf{I}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}''_{T,\omega})$ влече $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$. Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е произволна редица в $\mathbf{a}$. За да завършим доказателстовто е достатъчно да забележим, че

$$I_{\mathcal{A}}^1(\emptyset''_{\omega}) \equiv_{T,\omega} I_{A_0\uparrow\omega}^1(\emptyset''_{\omega}).$$

■

Горното наблюдение може лесно да се релативизира под всяка от степените $\mathbf{o}_n$. За да изразим по-формално проблема, ще ни бъдат нужни следващите две дефиниции.

**Определение 3.10.7.** *Нека* $n < \omega$. *Тогава под* $\mathbf{D}_{T,n+1}$ *ще разбираме множеството*

$$\mathbf{D}_{T,n+1} = \{deg_{T,\omega}(\mathcal{A}) \mid (\forall k \geq n)[A_k = \emptyset]\}.$$

Не е трудно да се види, че всяко едно от множествата $\mathbf{D}_{T,i}$ е затворено относно операциите точна горна граница и скок в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$. Така, за всяко $i < \omega$, $\mathfrak{D}_{T,i} = (\mathbf{D}_{T,i}, \mathbf{0}_{T,\omega}, \leq, \vee, ')$ е подструктура на $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$. При това, в сила са включванията

$$\mathfrak{D}_{T,1} \subsetneq \mathfrak{D}_{T,2} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{D}_{T,i} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{D}_{T,\omega}.$$

**Определение 3.10.8.** *Нека $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq \omega$ са множества. Тогава с $\langle A_0, A_1, \ldots, A_n\rangle \uparrow \omega$ означаваме редицата*

$$\langle A_0, A_1, \ldots, A_n\rangle \uparrow \omega = (A_0, A_1, \ldots, A_n, \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots).$$

**Лема 3.10.9.** *Нека $n < \omega$ и $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$. Тогава*

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,n+1} \iff (\forall \mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n)[\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_{n+1} = \mathbf{a} \vee \mathbf{o}_{n+1} \to \mathbf{a} \leq \mathbf{x}].$$

*Доказателство.* Според Лема 3.10.5, достатъчно е да покажем, че

$$\mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,n+1}[\leq \mathbf{o}_n] \iff$$
$$\iff (\forall \mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n)[\mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega}) = \mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega}) \to \mathbf{a} \leq \mathbf{x}].$$

Нека $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$ е степен в $\mathbf{D}_{T,n+1}$ като множествата $A_0, \ldots, A_n$ са такива, че $\langle A_0, \ldots, A_n\rangle \uparrow \omega \in \mathbf{a}$. Понеже $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$, то без да ограничаваме общността на разглежданията, можем да считаме, че за $i < n$, $A_i = \emptyset$. Да предположим, че $\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n$ е такова, че $\mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega}) = \mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega})$ и нека още $\mathcal{X} = \{X_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{x}$. Да забележим, че

$$I^{n+1}_{\mathcal{X}}(\emptyset^{(n+2)}_{\omega}) \equiv_{T,\omega} I^{n+1}_{\mathcal{A}}(\emptyset^{(n+2)}_{\omega}).$$

Тогава,

$$(A_0, \ldots, A_n, \emptyset^{(n+2)}, \emptyset^{(n+3)}, \ldots) \equiv_{T,\omega} (X_0, \ldots, X_n, \emptyset^{(n+2)}, \emptyset^{(n+3)}, \ldots).$$

Следователно, $\mathcal{A} = \langle A_0, \ldots, A_n\rangle \uparrow \omega \leq_{T,\omega} \langle X_0, \ldots, X_n\rangle \uparrow \omega \leq_{T,\omega} \mathcal{X}$.

Нека сега $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$ е такава, че за всяко $\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n$, $\mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega}) = \mathbf{I}^{n+1}_{\mathbf{a}}(\mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega})$ влече $\mathbf{a} \leq \mathbf{x}$. Нека $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega}$ е произволна редица в $\mathbf{a}$. За да завършим доказателството е достатъчно да забележим, че

$$I^{n+1}_{\mathcal{A}}(\emptyset^{(n+2)}_{\omega}) \equiv_{T,\omega} I^{n+1}_{\langle A_0,\ldots,A_n\rangle\uparrow\omega}(\emptyset^{(n+2)}_{\omega}).$$

∎

В оставащата част на този раздел ще се спрем върху *a.z.* степените в локалната теория. Да припомним, че една $\omega$-Тюрингова степен е *a.z.* точно тогава, когато в нея има редица $\mathcal{A}$ такава, че за всяко $n < \omega$,

$$P^T_n(\mathcal{A}) \equiv_T \emptyset^{(n)}.$$

В сила е следното изразяване на *a.z.* степените под $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ в термините на степените $\mathbf{o}_n$. Да забележим, че аналогично изразяване е в сила и в локалната теория на $\omega$-номерационните степени, (2.6.6).

**Лема 3.10.10.** *$\omega$-Тюринговата степен $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ е a.z. тогава и само тогава, когато за всяко $n < \omega$, $\mathbf{x} < \mathbf{o}_n$.*

*Доказателство.* Нека $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ и за всяко $n < \omega$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n$. Нека $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$. Тогава $\mathcal{P}^T(\mathcal{X}) \in \mathbf{x}$ и, следователно, за всяко $k$, $P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T P_k^T(\{O_{k+1,l}\}_{l<\omega})$. Оттук, $P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T \emptyset^{(k)}$, т.е. $\mathbf{x}$ е *a.z.* степен.

Нека сега $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ и $\mathcal{X} \in \mathbf{x}$ са такава, че за всяко $k$, $(P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T \emptyset^{(k)})$. Ще покажем, че за всяко $n \geq 1$, $\mathcal{P}^T(\mathcal{X}) \leq_{T,\omega} \{O_{n,k}\}_{k<\omega}$. Наистина, нека $n \geq 1$ и нека $\mathcal{O}_n = \{O_{n,k}\}_{k<\omega}$. Ясно е, че за $k \geq n$,

$$P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T P_k^T(\emptyset'_\omega) \equiv_T P_k(\mathcal{O}_n)$$

равномерно по $k$. От друга страна, ако $k < n$, то $P_k^T(\mathcal{O}_n) \equiv_T \emptyset^{(k)}$ и следователно $P_k^T(\mathcal{X}) \leq_T P_k^T(\mathcal{O}_n)$. Така $\mathcal{P}^T(\mathcal{X}) \leq_{T,\omega} \mathcal{O}_n$. ∎

От горната лема и от лема 3.10.3 непосредствено получаваме следващото твърдение.

**Следствие 3.10.11.** *Нека* $\mathbf{d} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ *е a.z. степен. Тогава*

$$(\forall n)[\mathbf{I}^n(\mathbf{d}^{(n)}) = \mathbf{d}].$$

От характеризацията на *a.z.* степените в термините на степените $\mathbf{o}_n$ произтича, че никоя *a.z.* степен не е нито $n$-висока, нито $n$-ниска за никое естествено число $n$.

**Лема 3.10.12.** *Нека* $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}_{T,\omega}$ *е a.z. степен. Тогава* $\mathbf{d} \in \mathbf{I}$.

*Доказателство.* Понеже за всяко естествено число $n$, $\mathbf{d} < \mathbf{o}_n$, то $\mathbf{d} \notin \mathbf{H}$. Да допуснем, че $\mathbf{d} \in \mathbf{L}$, като $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{0}_{T,\omega}^{(n)}$. Тогава $\mathbf{d} = \mathbf{I}^n(\mathbf{0}_{T,\omega}^{(n)}) = \mathbf{0}_{T,\omega}$. Полученото противоречие влече, че $\mathbf{d} \in \mathbf{I}$. ∎

Ще завършим раздела с намирането на едни необходими условия за принадлежност съответно към класовете $\mathbf{L}$ и $\mathbf{H}$:

**Теорема 3.10.13.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. *Тогава:*

(1) $\mathbf{a} \in \mathbf{H} \Rightarrow (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a}]$;
(2) $\mathbf{a} \in \mathbf{L} \Rightarrow (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a} \to \mathbf{d} = \mathbf{0}_{T,\omega}]$.

*Доказателство.*

(1) Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{H}$. Тогава за някое $n$, $\mathbf{a} \in \mathbf{H}_n$ и по Теорема 3.10.4 следва, че $\mathbf{o}_n \leq \mathbf{a}$. Сега твърдението следва от характеризацията на *a.z.* степените в Лема 3.10.10.
(2) Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{L}$. Тогава за някое $n$, $\mathbf{a} \in \mathbf{L}_n$ и отново по Теорема 3.10.4 следва, че $\mathbf{a} \wedge \mathbf{o}_n = \mathbf{0}_{T,\omega}$. Да предположим, че $\mathbf{d}$ е *a.z.* степен такава, че $\mathbf{d} \leq \mathbf{a}$. Но $\mathbf{d} \leq \mathbf{o}_n$ и следователно $\mathbf{d} = \mathbf{0}_{T,\omega}$.

∎

Да отбележим, че според **[39]** в структурата $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени, горните условия са и достатъчни. Остава открит въпросът дали това е така и при $\omega$-Тюринговите степени.

**Отворен въпрос 3.10.14.** *Нека* $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. *Тогава:*

- $\mathbf{a} \in \mathbf{H} \iff (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a}]$;
- $\mathbf{a} \in \mathbf{L} \iff (\forall\, a.z.\, \mathbf{d})[\mathbf{d} \leq \mathbf{a} \to \mathbf{d} = \mathbf{0}_{T,\omega}]$.

## 3.11. Определимост на $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ в локалната теория

В този раздел ще покажем, че за всяко $n < \omega$ степента $\mathbf{o}_n$ е определима с формула от първи ред в локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$. Като следствие ще получим определимостта от първи ред на всеки един от класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$, както и на множеството $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$, състоящо се от образите под действието на влагането $\kappa_T$ на всички Тюрингови степени под $\mathbf{0}'_T$. Накрая, ще бъде показано, че теорията от първи ред на аритметиката е интерпретируема в локалната теория на $\omega$-Тюринговите степени.

Основен момент в характеризацията на степените $\mathbf{o}_n$ играят така наречените *недопълними* степени (noncuppable).

**Определение 3.11.1.** *Нека $\mathfrak{D} = (\mathbf{D}, \mathbf{0}, \leq, \vee)$ е горна полурешетка и $\mathbf{d} \in \mathbf{D}$. Ще казваме, че $\mathbf{a} \in \mathbf{D}$ е допълнима до $\mathbf{d}$, ако $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ и $(\exists \mathbf{x} < \mathbf{d})[\mathbf{a} \vee \mathbf{x} = \mathbf{d}]$. Ако $\mathbf{a} < \mathbf{d}$ не е допълнима до $\mathbf{d}$, то ще казваме, че $\mathbf{a}$ е недопълнима до $\mathbf{d}$.*

Следващата Теорема, доказана от Posner и Robinson в [**25**], показва, че в локалната теория на Тюринговите степени няма ненулеви недопълними до $\mathbf{0}'_T$ степени.

**Теорема 3.11.2.** *Нека $\mathbf{a} \leq \mathbf{0}'_T$ е ненулева Тюрингова степен. Тогава $\mathbf{a}$ е допълнима до $\mathbf{0}'_T$.*

Следващата лема характеризира недопълнимите до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ степени в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$.

**Лема 3.11.3.** *Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$. Тогава*

$$\mathbf{a} \text{ е недопълнима до } \mathbf{0}'_{T,\omega} \iff \mathbf{a} \leq \mathbf{o}_1.$$

*Доказателство.* Нека $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$ е недопълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ степен и $\mathcal{A} = \{A_k\}_{k<\omega} \in \mathbf{a}$. Фактът, че $\mathbf{a}$ е недопълнима влече, че $A_0 \equiv_T \emptyset$. Наистина, ако това не беше така, то $\kappa_T(\deg_T(A_0))$ щеше да бъде допълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ степен под $\mathbf{a}$, и в частност, $\mathbf{a}$ щеше да бъде допълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. Сега, дефиницията на оператора скок и тази на оператора $I^1_{\emptyset_\omega}(\mathcal{A}')$ ни позволяват да заключим, че $\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} I^1_{\emptyset_\omega}(\mathcal{A}')$. Следователно, за всяка недопълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$ степен $\mathbf{a} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$, $\mathbf{a} = \mathbf{I}^1(\mathbf{a}')$. Тогава, възползувайки се от монотонността на оператора $\mathbf{I}^1$ и факта, че $\mathbf{a}' \leq \mathbf{0}''_{T,\omega}$ получаваме, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_1$.

За да покажем обратната посока на еквивалентността, достатъчно е да установим, че $\mathbf{o}_1$ е недопълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. За целта, първо да забележим, че всяка степен в $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ е допълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. Прилагайки Лема 3.10.6 за $\mathbf{a} = \mathbf{0}'_{T,\omega}$ получаваме, че за всяко $\mathbf{x} \in \mathbf{G}_{T,\omega}$,

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_1 = \mathbf{0}'_{T,\omega} \vee \mathbf{o}_1 \to \mathbf{x} \geq \mathbf{0}'_{T,\omega},$$

и, следователно, $\mathbf{o}_1$ е недопълнима до $\mathbf{0}'_{T,\omega}$. Това доказва лемата. ■

Използувайки релативизация над $\mathbf{0}^{(n)}_T$ на по-горе цитираната Теорема на Posner и Robinson, наблюденията от предишната Лема могат да се пренесат така, че да получим характеризация на $\mathbf{o}_{n+1}$ чрез степента $\mathbf{o}_n$. Това е направено в следващата Лема.

**Лема 3.11.4.** *За всяко $n < \omega$, $\mathbf{o}_{n+1}$ е най-голямата степен под $\mathbf{o}_n$, която е недопълнима до $\mathbf{o}_n$.*

*Доказателство.* Нека $n < \omega$ е фиксирано и $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$ е недопълнима до $\mathbf{o}_n$ степен като $\mathcal{A} \in \mathbf{a}$. Недопълнимостта на $\mathbf{a}$ влече, че $P_n^T(\mathcal{A}) \equiv_T \emptyset^{(n)}$. Действително, в противен случай степента

$$\deg_{T,\omega}((\underbrace{\emptyset, \ldots, \emptyset}_{n-1}, P_n^T(\mathcal{A}), \emptyset, \ldots, \emptyset, \ldots))$$

щеше да бъде допълнима до $\mathbf{o}_n$, а така и самата $\mathbf{a}$ щеше да бъде такава. Сега, понеже $\mathbf{a}$ е под $\mathbf{o}_n$, то припомняйки си дефинициите на $n+1$-та итерация на оператора скок, както и на оператора $I^{n+1}_{\emptyset_\omega}$, стигаме до заключението, че $\mathcal{A} \equiv_{T,\omega} I^{n+1}_{\emptyset_\omega}(\mathcal{A}^{(n+1)})$. Тогава, за всяка недопълнима до $\mathbf{o}_n$ степен $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_n$, $\mathbf{a} = \mathbf{I}^{n+1}(\mathbf{a}^{(n+1)})$. Понеже $\mathbf{a}^{(n+1)} \leq \mathbf{0}^{(n+2)}_{T,\omega}$, то използувайки монотонността на оператора $\mathbf{I}^{n+1}$, получаваме, че $\mathbf{a} \leq \mathbf{o}_{n+1}$.

Остава да покажем, че самата $\mathbf{o}_{n+1}$ е недопълнима до $\mathbf{o}_n$. Първо да забележим, релативизирайки Теорема 3.11.2 над $\mathbf{0}^{(n)}_T$, че всяка степен в $\mathbf{D}^T_{n+1} \cap \mathbf{D}_{T,\omega}[\leq \mathbf{o}_n]$ е допълнима до $\mathbf{o}_n$. Накрая, прилагайки Лема 3.10.9 за $\mathbf{a} = \mathbf{o}_n \in \mathbf{D}^T_{n+1}$ получаваме, че за всяко $\mathbf{x} \leq \mathbf{o}_n$,

$$\mathbf{x} \vee \mathbf{o}_{n+1} = \mathbf{o}_n \vee \mathbf{o}_{n+1} = \mathbf{o}_n \to \mathbf{x} \geq \mathbf{o}_n.$$

Следователно, $\mathbf{o}_{n+1}$ е недопълнима до $\mathbf{o}_n$ степен. ■

От горната лема непосредствено получаваме слеващото следствие.

**Следствие 3.11.5.** *За всяко $n < \omega$, степента $\mathbf{o}_n$ е определима с формула от първи ред в локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени.*

Да забележим, че изразяването от Лема 3.10.6 на множеството $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ в термините на степента $\mathbf{o}_1$, заедно с определимостта на последната, влече и определимостта на $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$.

**Теорема 3.11.6.** *Множетстовто $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ е определимо с формула от първи ред в локалната структура $\mathfrak{G}_{T,\omega}$.*

По-нататък, използувайки характеризацията на класовете $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ от Теорема 3.10.4, получаваме и определимостта на всеки един от тези класове.

**Теорема 3.11.7.** *За всяко $n < \omega$, всеко едно от множествата $\mathbf{H}_n$ и $\mathbf{L}_n$ е определимо с формула от първи ред в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$.*

Определимостта на $\mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}$ показва, че съществува определима от първи ред подструктура на $\mathfrak{G}_{T,\omega}$, която е изоморфна на структурата на $\Delta^0_2$ Тюринговите степени (с други думи, на Тюринговите степени в локалната подструктура на $\mathfrak{D}_T$). Също както и при $\omega$-номерационните степени, [**8**], горното наблюдение заедно с Лема 3.10.3 ни осигурява определима от първи ред подструктура на $\mathfrak{G}_{T,\omega}$, която е изоморфна на структурата $\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T}$ на Тюринговите степени рекурсивно номеруеми в и над (*r.e.a.*) първия скок $\mathbf{0}'_T$ на нулата,

$$\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T} = \{\deg_T(X) \mid \emptyset' \leq_T X \ \& \ X \leq_{r.e.} \emptyset'\}.$$

Действително, да разгледаме множеството

$$\mathfrak{R}_1 = \{\mathbf{I}^1(\mathbf{a}') \mid \mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}\}.$$

Сега Лема 3.10.3 ни дава, че

$$\mathfrak{R}_1 = \{\mathbf{a} \wedge \mathbf{o}_1 \mid \mathbf{a} \in \mathbf{D}_{T,1} \cap \mathbf{G}_{T,\omega}\},$$

така, че $\mathfrak{R}_1$ е определимо с формула от първи ред в $\mathfrak{G}_{T,\omega}$. От друга страна, използувайки свойстата на оператора $\mathbf{I}^1$, можем да заключим, че $\mathfrak{R}_1$ е изоморфно на $\{\kappa_T(\mathbf{b}') \mid \mathbf{b} \leq \mathbf{0}'_T\}$. Оттук, използувайки теоремата на Sacks за обръщане на скока, [**29**], виждаме, че последното множество е естественото копие, породено от влагането $\kappa_T$, на структурата на Тюринговите степени рекурсивно номеруеми в и над $\mathbf{0}'_T$.

Така, достигнахме до следващата лема.

**Лема 3.11.8.** *Структурите* $(\mathfrak{R}_1, \leq)$ *и* $(\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T}, \leq)$ *са изоморфни.*

В [**21**] Nies, Shore и Slaman доказват, че аритметиката от първи ред е интерпретируема в $(\mathfrak{R}_{\mathbf{0}'_T}, \leq)$, откъдето можем да заключим, че теорията от първи ред на $(\mathbf{G}_{T,\omega}, \leq)$ е поне толкова сложна, колкото и теорията от първи ред на аритметиката.

**Теорема 3.11.9.** *Теорията от първи ред на аритметиката е интерпретируема в локалната теория на $\omega$-Тюринговите степени.*

За момента, сложността на локалната теория $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени не е напълно характеризирана. За разлика от локалната теория на Тюринговите степени или тази на рекурсивно номеруемите Тюрингови степени, все още не е ясно дали $\mathfrak{G}_{T,\omega}$ е интерпретируема в теорията от първи ред на аритметиката. Този въпрос оставяме като отворен за по-нататъшно разглеждане.

**Отворен въпрос 3.11.10.** *Каква е Тюринговата степен на теорията от първи ред на $\mathfrak{G}_{T,\omega}$?*

# Допълнение А. Дървета и минимални степени

Целта ни в това Допълнение е да покажем един резултат за минимални степени, касаещ локалната подструктура на Тюринговите степени. Именно, ще установим, че за всеки проблем $C$ строго решим в Стоп-проблема, съществува нерешим в $C$ проблем $M$, чийто стоп-проблем е (Тюрингово) еквивалентен на Стоп-проблема и такъв, че освен еквивалентните нему поблеми, той може да разрешава само рекурсивни такива.

Следващото понятие за дърво ще играе основна роля в понататъшните ни разсъжения.

**Определение** $\alpha$. *Дърво ще наричаме функция* $\mathbf{T} : 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$ *такава, че за всеки два низа* $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ *е изпълнено, че*

- $\mathbf{T}(\tau)\downarrow \ \& \ \sigma \subseteq \tau \to \mathbf{T}(\sigma)\downarrow \ \& \ \mathbf{T}(\sigma) \subseteq \mathbf{T}(\tau)$;
- $\mathbf{T}(\sigma)\downarrow \ \& \ \mathbf{T}(\tau)\downarrow \ \& \ \sigma|\tau \to \mathbf{T}(\sigma)|\mathbf{T}(\tau)$.

Ще ни бъдат от полза и следните определения. Нека $\mathbf{T}$ е дърво, $\sigma \in 2^{<\omega}$, $A \subseteq \omega$. Ще казваме, че $\sigma$ *е върху* $\mathbf{T}$ (и ще пишем $\sigma \subset \mathbf{T}$), ако за някое $\tau \in dom(\mathbf{T})$, $\sigma = \mathbf{T}(\tau)$. Ще казваме, че $A$ *е път в* $\mathbf{T}$, ако за всяко $\alpha \subset A$ съществува $\tau \in dom(\mathbf{T})$ такова, че $\alpha \subseteq \mathbf{T}(\tau)$. Множеството на пътищата в $\mathbf{T}$ ще означаваме с $[\mathbf{T}]$.

Под това едно дърво да бъде *тотално* или *частично*, ще разбираме дървото да бъде такова като функция от $2^{<\omega}$ към $2^{<\omega}$. Да забележим, че съществува рекурсивна биекция между множествата $2^{<\omega}$ и $\omega$. Понеже дървото представлява функция от $2^{<\omega}$ в себе си, то има смисъл да наричаме едно дърво $\mathbf{T}$ *рекурсивно* (функцията $\mathbf{T}$ е рекурсивна) или съответно *рекурсивно във* функцията $g$ (функцията $\mathbf{T}$ е рекурсивна във фунцията $g$).

По-нататък под дърво ще разбираме тотално дърво. Същината на доказаното свойство на минималните ниски Тюрингови степени е обхванато в следващата лема. В нея е показано, че ограничавайки света си до дървета и множества рекурсивни в Стоп-проблема, винаги можем да намерим път, който не може да бъде разрешен от предварително избран проблем.

**Лема** $\beta$. *Нека* $\mathbf{T}$ *е рекурсивно в* $\emptyset'$ *дърво. Нека* $C <_T \emptyset'$ *е нерекурсивно. Тогава съществува път* $A \in [\mathbf{T}]$ *такъв, че* $A \leq_T \emptyset'$ *и* $A \nleq_T C$.

*Доказателство.* Достаъчно е рекурсивно в $\emptyset'$ да изберем път в $\mathbf{T}$ такъв, че за всяко $e < \omega$ да бъде изпълнено изискването,

$$R_e : A \not\leq \Phi_e(C).$$

Да означим за всяко $s < \omega$, с $l(s)$ максималната дължина на низ в дървото $\mathbf{T}$ на ниво $s$,

$$l(s) = \max\{lh(\mathbf{T}(\sigma)) \mid lh(\sigma) = s\}.$$

Тогава съществува функция $f$, рекурсивна в $\emptyset'$, която не се доминира[4] от никоя рекурсивна в $C$ функция върху множеството $L = \{l(s) \mid s < \omega\}$, [5].

Ще строим пътя $A$ през $\mathbf{T}$ на етапи. На етап 0 взимаме $\sigma_0 = \emptyset$. Нека в началото на етап $s+1$ имаме крайна част $\sigma_s = \mathbf{T}(\sigma)$ с $lh(\sigma) = s$. Сега търсим най-малкото $e \leq s$, за което $R_e$ все още не е удовлетворено и такова, че за всяко $x \leq l(s+1)$,

$$\Phi_e(C \upharpoonright f(l(s+1)); x) \downarrow .$$

Да забележим, че това търсене може да се осъществи с оракул $\emptyset'$. Ако такова $e$ е намерено, то понеже $\mathbf{T}(\sigma * 0)$ и $\mathbf{T}(\sigma * 1)$ са несъвместими като и двата са с дължина не по-голяма от $l(s+1)$, то със сигурност поне едно от тях е несъвместимо с $\Phi_e(C \upharpoonright f(l(s+1)))$. Нека $\sigma_{s+1}$ бъде този несъвместим низ (ако и двата са несъвместими, избираме например $\sigma_{s+1} = \mathbf{T}(\sigma * 0)$). Иначе, нека, например, $\sigma_{s+1} = \mathbf{T}(\sigma * 0)$. Определяме пътя $A = \bigcup \sigma_n$.

Накрая, ще докажем с индукция по $e$, че всяко от изискванията $R_e$ е изпълнено. За целта, нека $s_0$ е достатъчно голямо, за да може за всяко $i < e$ изискването $R_i$ да бъде удовлетворено на етап, по-ранен от $s_0$. Ще предполагаме и, че $R_e$ не е удовлетворено преди етап $s_0$. Възможни са два случая. Първо, ако функцията $\Phi_e(C)$ е тотална, то задължително на етап $s_0$ изискването $R_e$ ще бъде удовлетворено. Да предположим, по-нататък, че $\Phi_e(C)$ не е тотална. Ако допуснем, че $R_e$ никога не се удовлетворява, то забелязвайки, че на всеки етап над $s_0$ изискването $R_e$ ще бъде с най-висок приоритет, ще получим, че

$$g(y) = \mu z[(\forall x \leq y)[\Phi_e(B \upharpoonright z; x) \downarrow]],$$

е рекурсивна в $C$ функция, която доминира $f$ над множеството $L$. Противоречие. ■

Втората и последна стъпка в доказателството се основава на една особеност в конструкциите за минимални (Тюрингови) степени. Както форсинг конструкцията на Spector (за минимална степен

---

[4]Функцията $f$ доминира функцията $g$ върху множеството $S$, ако за всяко $x \in S$ с изключение на краен брой, е в сила, че $g(x) \downarrow \rightarrow g(x) < f(x)$.

[5]Тук използуваме следния факт, доказан от Posner в [**24**]:
Ако $L$ е безкрайно и рекурсивно в $\emptyset'$, то съществува функция, която не може да бъде доминирана върху $L$ от никоя рекурсивна в $A$ функция, за никое $A <_T \emptyset'$.

под $\mathbf{0}''_T$), така и приоритетната конструкция на Sacks (за минимална степен под $\mathbf{0}'_T$), позволяват в самата конструкция да бъде кодирано произволно множество от естествени числа. Това пък осигурява съществуването на (тотално) дърво (съответно под $\mathbf{0}''_T$ или $\mathbf{0}'_T$), всеки път в което е множество от минимална степен. Оказва се, че приоритетната конструкция за минимална ниска степен също проявява тази склонност (това е вярно както за конструкция на Cooper, [**2**], така и за конструкцията дадена от Lempp, J. Miller, S. Ng, L. Yu). С други думи, съществува рекурсивно в Стоп-проблема дърво, всеки път от което представлява множество от минимална $\mathbf{GL}_1$ степен[6]. Доказателство може да бъде намерено в Shore, [**31**].

**Теорема** $\gamma$. *Съществува рекурсивно в* $\emptyset'$ *дърво* $\mathbf{T}$ *такова, че за всеки път* $A \in [\mathbf{T}]$ *е изпълнено, че* $A$ *е от минимална степен и* $A' \equiv_T A \oplus \emptyset'$.

Накрая, Лема $\beta$. и Теорема $\gamma$., както и наблюдението, че всяка обобщено ниска ($\mathbf{GL}_1$) степен под $\mathbf{0}'_T$ в действителност е и ниска ($\mathbf{L}_1$), ни дават желания резултат.

**Теорема** $\delta$. *Нека* $\mathbf{c} < \mathbf{0}'_T$. *Тогава съществува минимална степен* $\mathbf{m}$ *такава, че* $\mathbf{m}' = \mathbf{0}'_T$ *и* $\mathbf{m} \nleq \mathbf{c}$.

[6]Степента $\mathbf{a}$ е обобщено $n$-ниска ($\mathbf{a} \in \mathbf{GL}_n$), ако $\mathbf{a}^{(n)} = (\mathbf{a} \vee \mathbf{0}'_T)^{(n-1)}$.

## Заключение

Като заключение ще направим обобщение на главните, по мнение на автора, приноси в дисертацията. Изследванията са съсредоточени върху структурите $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните и $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ на $\omega$-Тюринговите степени.

Ключов момент в изследванията върху определмостта в $\mathfrak{D}_\omega$ (както и в локалната ѝ подструктура $\mathfrak{G}_\omega$) играе понятието за Калимулинова двойка ($\mathcal{K}$-двойка). Съществениият принос тук е направената характеризация на Калимулиновите двойки в глобалната структура $\mathfrak{D}_\omega$ на $\omega$-номерационните степени (Теорема 2.4.12). Именно, показано е, че една такава $\mathcal{K}$-двойка се състои или от *почти нулеви* степени ($a.z.$ степени) или е минимално обръщане на скока на Калимулинова двойка за някоя локална подструктура $\mathfrak{D}_e[\mathbf{0}_e^{(n)}, \mathbf{0}_e^{(n+1)}]$ на структурата на номерационните степени. Показано е и как тези два непресичащи се класа от Калимулинови двойки могат да бъдат отделени със формула от първи ред (Следствие 2.3.7).

Базирайки се на по-горе споменатата характеризация на Калимулиновите двойки, е намерена формула от първи ред, определяща първия скок на най-малкия елемент на структурата (Теорема 2.5.2).

В дисертацията са разгледани и въпроси, касаещи определимостта и в локалната подструктура $\mathfrak{G}_\omega$ (т.е. на подструктурата, съдържаща елементите, заключени под първия скок на най-малкия елемент). Установена е определимостта на класовете на високите, ниските и междинните степени (Теорема 2.7.3). Това явление се наблюдава за първи път в теорията на степените на неразрешимост, тъй като тези класове са неопределими в класическите структури на Тюринговите и номерационните степени.

На въпросите за определимост, касаещи структурата на $\omega$-номерационните степени, е посветена цялата Глава 2.

В дисертацията е поставено началото на изследванията върху нова степенна структура, представляваща "Тюринговия" аналог на $\omega$-номерационните степени – тази на $\omega$-Тюринговите степени, $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ (Определение 3.1.2). Показана е определимостта от първи ред на Тюринговите степени в структурата $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ с добавена операция за скок (Теорема 3.6.2). Установено е, че $\mathfrak{D}_T$ и $\mathfrak{D}'_{T,\omega}$ имат изоморфни групи на автоморфизмите (Теорема 3.7.1). Направена е характеризация на минималните степени в $\mathfrak{D}_{T,\omega}$ (Теорема 3.9.1) като е показано, че те са изброимо много и всички са ограничени от първия скок на най-малкия елемент на структурата. В локалната подструктура е показана определимостта на всеки един клас от скок йерархията (Теорема 3.11.7).

Изследванията върху структурата на $\omega$-Тюринговите степени заемат изключително Глава 3.

### Публикации във връзка с дисертацията

Дисертацията е основана на следващите две публикации:

($\alpha$) H. Ganchev and A. C. Sariev, *Definability of jump classes in the local theory of the $\omega$-enumeration degrees*, приета за печат в годишника на СУ.

В тази статия е показана определимостта от първи ред на първия скок на най-малкия елемент на структурата на $\omega$-номерационните степени. Също така са изследвани въпроси за определимост в локалната подструктура.

($\beta$) A. C. Sariev and H. Ganchev, *The $\omega$-Turing degrees*, Annals of Pure and Applied Logic 165(9), pp. 1512-1532.

В тази работа е въведена и изследвана структурата на $\omega$-Тюринговите степени.

### Декларация за оригиналност

Авторът декларира, че дисертацията е оригинална научна разработка. Използването на предходни резултати е отразено с подходящи препратки.

# Библиография


[1] Мучник, А. А., *Неразрешимость проблемы сводимости теории алгоритмов*, ДАН СССР **108** (1956), 194-197.

[2] Cooper, S. B., *Minimal degrees and the jump operator*, Jour. Symb. Logic **38** (1973), 249-271.

[3] Cooper, S. B., *Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the $\Sigma_2$ sets are dense*, J. Symbolyc Logic **49** (1984), 503-513.

[4] Cooper, S. B., *Enumeration reducibility, nondeterministic computations and relative computability of partial functions*, Recursion theory week, Oberwolfach 1989, Lecture notes in mathematics (Heildelberg) (K. Ambos-Spies, G. Muler, and G. E. Sacks, eds.), vol. 1432, Springer-Verlag, 1990, pp.57-110.

[5] Friedberg, R. M., *Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability*, Proc. Nat. Ac. Sci. **43** (1957), 236-238.

[6] Ganchev, H., *Exact pair theorem for the $\omega$-enumeration degrees*, Computation and Logic in the Real World, Lecture Notes in Comp. Science (B. Loewe, S. B. Cooper and A. Sorbi, eds.), **4497** (2007), 316-324.

[7] Ganchev, H. and A. C. Sariev, *Definability of jump classes in the local theory of the $\omega$-enumeration degrees*, Annuaire de l'Université de Sofia, to appear.

[8] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *The High/Low Hierarchy in the Local Structure of the $\omega$-Enumeration Degrees*, Annals of Pure and Applied Logic **163**(5), 2012, 547-566.

[9] Ganchev, H. and M. I. Soskova, *Definability via Kalimullin Pairs in the structure of the enumeration degrees*, to appear in Transaction of American Mathematical Society.

[10] Kalimullin, I. Sh., *Definability of the jump operator in the enumeration degrees*, Journal of Mathematical Logic **3** (2003), 257-267.

[11] Kent, T. and A. Sorbi, *Bounding nonsplitting enumeration degrees*, Journal of Symbolic Logic Volume 72, Issue 4 (2007), 1405-1417.

[12] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, N. Y., 1952.

[13] Kleene, S. C. and E. L. Post, *The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability*, Ann. of Math. (2), 59:379-407, 1954.

[14] Lachlan, A. H., *On a problem of G.E. Sacks*, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1965), 972-979.

[15] Lerman, M., *Degrees of unsolvability. Local and global theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.

[16] Martin, D. A., *On a question of G.E.Sacks*, J. Symbolic Logic **31** (1966), 66-69.

[17] McEvoy, K., *Jumps of quasi-minimal enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[18] McEvoy, K. and S. B. Cooper, *On minimal pairs of enumeration degrees*, J. Symbolic Logic **50** (1985), 839-848.

[19] Mostowski, A., *Über gewisse universelle Relationen*, Ann. Soc. Pol. Math. **17** (1938), 117-118.

[20] Myhill, J., *Note on degrees of partial functions*, Proc. Am. Math. Soc. **12** (1961), 519-521.

[21] Nies, A., R. A. Shore, and T. A. Slaman, *Interpretability and definability in the recursively enumerable degrees*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 241-291.

[22] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume I*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 125, Elsevier, 1989.

[23] Odifreddi, P. G., *Classical recursion theory, Volume II*, Studies in logic and the foundations of mathematics (R. A. Soare, A. S. Troelstra, S. Abramsky, S. Artemov, eds.), vol. 143, Elsevier, 1999.

[24] Posner, D. B., *The uppersemilattice of the degrees below* $\mathbf{0}'$ *is complemented*, J. Symbolic Logic **46** (1981), 705-713.

[25] Posner, D. B. and R. W. Robinson, *Degrees Joining to* $0'$, J. Symbolic Logic **46(4)** (1981), 714-722.

[26] Post, E. L., *Recursively enumerable sets and positive integers and their decision problems*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 84-316.

[27] Rogers, H. Jr., *Theory of recursive functions and effective computability*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[28] Sacks, G. E., *On degrees less than* **0**', Ann. Math. **77** (1963), 211-231.

[29] Sacks, G. E., *Recursive enumerability and the jump operator*, Trans. Amer. Math. Soc., 108, (1963), 223-239.

[30] Sariev, A. C. and H. Ganchev, *The* $\omega$*-Turing degrees*, Annals of Pure and Apllied Logic 165(9), pp. 1512-1532.

[31] Shore, R. A., *The Turing degrees: Global and Local Structure*, unpublished.

[32] Shore, R. A., *Direct and local definitions of the Turing jump*, Journal of Mathematical Logic **9** (2007), pp.229-262.

[33] Shore, R. A. and T. A. Slaman, *Defining the Turing jump*, Math. Res. Lett., 6(5-6): 711-722, 1999.

[34] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in degree structures*, preprint available at `http://math.berkley.edu/slaman/talks/sw.pdf`

[35] Slaman, T. A. and W. H. Woodin, *Definability in the enumeration degrees*, Arch. Math. Logic **36** (1997), 255-267.

[36] Soare, R. I., *Recursively Enumerable Sets and Degrees: A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.

[37] Sorbi, A., *The enumeration degrees of the* $\Sigma^0_2$ *sets*, Complexity, Logic and Recursion Theory (New York) (A. Sorbi, ed.), Marcel Dekker, 1975, pp. 303-330.

[38] Soskov, I. N., *The* $\omega$*-enumeration degrees.*, Journal of Logic and Computation, 2007 (17) pp. 1193-1214.

[39] Soskov, I. N. and H. Ganchev, *The jump operator on the* $\omega$*-numeration degrees*, Ann. Pure and Appl. Logic, Volume 160, Issue 30, September 2009, pp 289-301.

[40] Soskov, I. N. and B. Kovachev, *Uniform regular enumerations*, Mathematical Structures in Commp. Sci. **16** (2006), no. 5, 901-924.

[41] Soskov, I. N. and M. I. Soskova, *Kalimullin pairs of* $\Sigma^0_2$ $\omega$*-enumeration degrees*, Int. J. Software and Informatics **5(4)** (2011), 637-658.

[42] Soskova, M. I., *The automorphism group of the enumeration degrees*, to appear in Ann. Pure and Appl. Logic.

[43] Turing, A., *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 42, 1936-37, pages 230-265.

[44] Yates, C. E. M., *Initial segments of the degrees of unsolvability, Part II: Minimal degrees*, J. Symbolic Logic **35**, 243-266.