Софийски университет ”Св. Климент Охридски”

Факултет по математика и информатика

Катедра ”Математическа логика и приложенията ѝ”

Дипломна работа

на тема

# Разрешимост на някои теории, отнасящи се до квазилинейни наредби

*Автор*
Васил Петров Желев
фак. номер: 6MI3400074

*Научен ръководител*
Проф. д-р Тинко Тинчев

София, 13 юли 2023 г.

# Съдържание

# Въведение

В средата на XX век възниква интересът към разглеждането на разрешимостта на теорията на линейните наредби. Класът на линейните наредби дефинираме чрез следната аксиоматизация от първи ред над езика с един двуместен предикатен символ $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$:

1. $\forall x(x \leq_A x)$ - рефлексивност
2. $\forall x \forall y(x \leq_A y \& y \leq_A x \rightarrow x = y)$ - антисиметричност
3. $\forall x \forall y \forall z(x \leq_A y \& y \leq_A z \rightarrow x \leq_A z)$ - транзитивност
4. $\forall x \forall y(x \leq_A y \vee y \leq_A x)$ - линейност

През 1959 г. А. Еренфойт (A. Ehrenfeucht, [1]) публикува своя резултат:

**Твърдение 0.1.** *Теорията над езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ с един двуместен предикатен символ на класа от най-много изброимите линейни наредби е разрешима.*

Няколко години по-късно Х. Лехли заедно с Дж. Ленард (H. Läuchli, J. Leonard, [2]) повтаря този резултат, използвайки различен метод. Две години по-късно (1969, [3]), Лехли усилва този резултат, разглеждайки теорията над слабия монадичен език от втори ред - $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$, с един двуместен предикатен символ.

**Твърдение 0.2.** *Теорията над слабия монадичен език от втори ред $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ с един двуместен предикатен символ на класа от най-много изброимите линейни наредби е разрешима.*

В своята статия от 1969 г. М. Рабин (M. Rabin, [4]) доказва още по-силен вариант, обобщавайки резултата за монадичния език то втори ред.

**Твърдение 0.3.** *Теорията над монадичния език от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$ с един двуместен предикатен символ на класа от най-много изброимите линейни наредби е разрешима.*

Той използва доказаната от него разрешимост на монадичната теория от втори ред на две функции-наследник - S2S (second-order theory of two successor functions).

Интерес за нас ще бъде да разгледаме теории, подобни на линейните наредби, като се отказваме от свойството антисиметричност. Такива структури наричаме квазилинейни наредби. В следващите редове ще разгледаме проблема за разрешимост на следните теории над езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$, слабия монадичен език от втори ред $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ и монадичния език от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$:

1. Теорията на крайните квазилинейни наредби
2. Теорията на най-много изброимите квазилинейни наредби

3. Теорията на най-много изброимите чужди обединения на квазилинейни наредби

4. Конкретни теории на дървовидни структури, подобни на квазилинейните наредби.

Главно, ще използваме теоремите на Рабин, че теориите S2S и S$\omega$S над монадичния език от втори ред са разрешими. Ще се стремим за всяка теория да докажем, че всяко свойство в теорията, която разглеждаме, може да се представи в езика на теорията S2S или S$\omega$S.

# 1 Нотация и терминология

## 1.1 Квазилинейни наредби

**Дефиниция 1.1.** *Нека A е множество $\leq_A$ е бинарна релация над множеството A, която е рефлексивна и транзитивна, т.е. за нея са изпълнени:*

1. $\forall x(x \leq_A x)$
2. $\forall x \forall y \forall z(x \leq_A y \& y \leq_A z \rightarrow x \leq_A z)$

*Ако е изпълнено, че*

$$\forall x \forall y(x \leq_A y \vee y \leq_A x \vee x = y),$$

*множеството $< A, \leq_A >$ наричаме квазилинейна наредба.*

Въвеждаме следната бинарна релация $\sim$ в квазилинейната наредба $< A, \leq_A >$ по следния начин:

$$x \sim y \leftrightarrow x \leq_A y \& y \leq_A x$$

След непосредствена проверка получаваме, че $\sim \subseteq A \times A$ е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност относно $\sim$ наричаме *клъстери*, т.е. в един клъстер всеки два елемента са сравними относно $\sim$ или ако $x$ и $y$ са елементи в един и същи клъстер $X$, то $x \leq_A y$ $y \leq_A x$.

Дефинираме бинарната релация $\preceq_A \subseteq A/_\sim \times A/_\sim$ над фактормножеството $A/_\sim$, като:

$$[a] \preceq_A [b] \leftrightarrow a \leq_A b,$$

Тогава множеството $< A/_\sim, \preceq_A >$ е линейна наредба над фактормножеството $A/_\sim$.

Разглеждайки подобно разбиване на универсума на квазилинейните наредби чрез релацията $\sim$, забелязваме връзката между линейните и квазилинейните наредби. Чрез тази връзка ще можем лесно да се справим с проблема за разрешимостта, използвайки фактите, разгледани от Рабин [4].

## 1.2 Теорията S2S

За произволно множество $A$, с $A^*$ означаваме множеството от всички крайни редици от елементи на A.

Нека A е множество. С $A^*$ означаваме множеството от всички крайни редици от елементи на A. С $l(x)$ означаваме дължината на редицата x за $x \in A^*$. Единствената редица $x \in A^*$, чиято дължина е 0, т.е. $l(x) = 0$, ще означаваме с $\Lambda$. Ако $x \in A^*$ и $y \in A^*$, с $xy$ означаваме конкатенацията на редиците x и y.

Дефинираме частична наредба $\leq$ над $A^*$ като

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z \in A^*)(y = xz)$$

Ако $x \leq y$ и $x \neq y$, ще пишем $x < y$.

За $a \in A$ дефинираме функция $r_a : A^* \rightarrow A^*$ като $r_a(x) = xa$.

**Дефиниция 1.2.** *Нека* $T_2 = 2^* = \{i \,|\, i < 2\}^*$. *Разглеждаме структурата*

$$\mathbb{T}_2 =< T_2, r_0, r_1, \leq, \leq^{lex} >,$$

*където* $\leq^{lex}$ *е лексикографската наредба, индуцирана от естествената наредба над естествените числа. Теорията на тази структура,* $Th_2(\mathbb{T}_2)$, *над монадичния език от втори ред* $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$ *с два едноместни функционални символа ще бележим с S2S.*

Следователно, получаваме, че за произволна затворена формула $\varphi$ над езика $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$

$$\varphi \in S2S \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models \varphi$$

Ще използваме следния резултат на Рабин (от [4])

**Твърдение 1.1.** *Теорията S2S над езика* $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$ *е разрешима.*

## 1.3 Безкрайно двоично дърво

**Дефиниция 1.3.** *Безкрайно двоично дърво наричаме множеството* $T = T_2 = \{0, 1\}^*$ *от всички крайни редици, съставени от нули и единици.*
*Елементите* $x \in T$ *наричаме върхове на* $T$.
*Върховете* $x0$ *и* $x1$ *за* $x \in T$ *се наричат непосредствени наследници на* $x$. *Празната редица* $\Lambda$ *наричаме корен на дървото* $T$.

Безкрайното двоично дърво стои в основата на дефиницията за теорията S2S. Затова и ще работим с него в следващите редове в решаване на проблема с разрешимостта на разглежданите теории.

## 1.4 Свойства, изразени в езика на S2S

За улеснение в изразяването по-напред, ще въведем няколко формули над езика $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$:

1. $Pref[P, x]$ - множеството $P$ е съвкупността от всички префикси на върха $x \in T$.
   $Pref[P, x] : P(x) \& \neg P(r_0(x)) \& \neg P(r_1(x)) \& \forall z(P(z) \& x \neq z \to (P(r_0(z)) \vee P(r_1(z))) \& \neg(P(r_0(z)) \& P(r_1(z))))$
   $\& \forall z(P(r_0(z)) \vee P(r_1(z)) \to P(z))$

2. $NonEmpty[P]$ - множеството $P$ не е празно
   $NonEmpty[P] : \exists x(P(x))$

3. Лексикографска наредба
   $x \leq^{lex} y : \exists P \exists Q(Pref[P, x] \& Pref[Q, y] \& (\exists z(P(z) \& Q(z) \& P(r_0(z)) \& Q(r_1(z))) \vee Q(x)))$

4. $X \subseteq Y$ - $X$ е подмножество на $Y$
   $X \subseteq Y : \forall x(X(x) \to Y(x))$

5. $MaxElement[P]$ - множеството $P$ има най-голям елемент относно лексикографската наредба $\leq^{lex}$
$MaxElement[P] : \exists x(P(x) \& \forall y(P(y) \to y \leq^{lex} x))$

6. $MinElement[P]$ - множеството $P$ има най-малък елемент относно лексикографската наредба $\leq^{lex}$
$MinElement[P] : \exists x(P(x) \& \forall y(P(y) \to x \leq^{lex} y))$

7. $Fin[P]$ - множеството $P$ е крайно
$Fin[P] : \forall Q(Q \subseteq P \& NonEmpty[Q] \to MaxElement[Q] \& MinElement[Q])$

8. $Inf[P]$ - множеството $P$ е безкрайно
$Inf[P] : \neg Fin[P]$

## 2 Крайни квазилинейни наредби

В предишната точка разгледахме дефиницията на квазилинейните наредби. Нека $\mathscr{K}_{fin}$ е класът на всички крайни квазилинейни наредби. С $FQLO$ ще означаваме теорията от първи ред над езика $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ на класа $\mathscr{K}_{fin}$, т.е. $FQLO = Th(\mathscr{K}_f in)$. Искаме да докажем следното

**Твърдение 2.1.** *Теорията FQLO над езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ е разрешима.*

Нашата цел ще бъде да построим функция $tr$, която на всяка затворена формула $\varphi$ от разглеждания език съпоставя затворена формула $tr(\varphi)$ от $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$, така че $\varphi$ е вярна в разглеждания клас структури тогава и само тогава, когато $tr(\varphi) \in S2S$. Затова ще разгледаме две посоки.

От една страна, ако имаме модел $\mathscr{A}$, ще се стремим да го изобразим инективно в безкрайното двоично дърво, посредством две функции - $\tau$ и $\sigma$. Първата функция $\tau$ ще изобразява клъстерите на модела, като множеството от образите им ще означаваме с P. Ще се стремим тя да прехвърля наредбата $\leq_A$ в лексикографската наредба $\leq^{lex}$ в двоичното дърво. Втората функция $\sigma$ ще изобразява елементите на модела, като множеството от образите им ще означаваме с Q.

От друга страна, ще дефинираме формула $F_{FQLO}[P,Q]$ в езика от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(r_0, r_1)$ на S2S, която определя дали множествата $P$ и $Q$ описват модел на квазилинейна наредба, получен по горния начин.

С помощта на тази двупосочна връзка ние ще можем по дадена формула $\varphi$ да дефинираме формула $F^{\varphi}[P,Q]$, релативизираща свойството в езика на S2S. Така, ще докажем, че за затворена формула $\varphi$ над $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ следните две условия са еквивалентни:

1. За всеки модел $\mathscr{A}$ на FQLO, $\mathscr{A} \vDash \varphi$

2. $\mathbb{T}_2 \vDash \forall P \forall Q(F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$

Тогава получаваме следната зависимост:

$$\varphi \in FQLO \leftrightarrow \forall P \forall Q(F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q]) \in S2S,$$

откъдето от **Твърдение 1.1.** получаваме **Твърдение 2.1.**

### 2.1 Изобразяване в безкрайното двоично дърво

Дефинираме функцията $\tau : A/_{\sim} \to T$. Нека $A/_{\sim} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ и $X_i \preceq_A X_{i+1}$ за $1 \leq i \leq n-1$. Тогава $\tau(X_1) = \Lambda$ и $\tau(X_i) = r_1(\tau(X_{i-1}))$. Тоест най-малкия относно $\preceq_A$ клъстер изобразяваме в корена на безкрайното двоично дърво, а всеки следващ клъстер - по клона на единицата.

Дефинираме изображението $\sigma : A \to T$.

Във всеки клъстер (клас на еквивалентност) имаме поне един и общо краен брой елементи, т.е. за всяко $1 \leq i \leq n$, $\bar{\bar{X_i}} = m_i$ за някое $m_i < \omega$. Също така всеки елемент на множеството $A$ принадлежи на някой клъстер. Затова за елементите на наредбата ще използваме означението $x^i_j$ за $j$-тия елемент в $i$-тия клъстер. Тогава $\sigma(x^i_j) = r^j_0(\tau(X_i))$.

**Лема 2.2.** $x^i_j \leq_A x^k_l \leftrightarrow i = k \vee \sigma(x^i_j) \leq^{lex} \sigma(x^k_l)$.

*Доказателство.* ($\Rightarrow$) Нека $x^i_j \leq_A x^k_l$. Имаме, разбира се, два случая в зависимост от това дали елементите са в един и същ клъстер.

**1.** Ако $i = k$, дясната страна е изпълнена.

**2.** Нека $i \neq k$. Щом $x^i_j \leq_A x^k_l$, $X_i \preceq_A X_k$. Следователно, $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_k)$, откъдето и $r^j_0(\tau(X_i)) \leq^{lex} r^l_0(\tau(X_k))$, т.е. $\sigma(x^i_j) \leq^{lex} \sigma(x^k_l)$.

($\Leftarrow$) Нека $i = k \vee \sigma(x^i_j) \leq^{lex} \sigma(x^k_l)$. Ако два елемента се намират в един и същ клъстер, т.е. $i = k$, те са сравними помежду си и в двете посоки. Затова $x^i_j \leq_A x^k_l$.
Нека сега $i \neq k \,\&\, \sigma(x^i_j) \leq^{lex} \sigma(x^k_l)$. Оттук следва, че $r^j_0(\tau(X_i)) \leq^{lex} r^l_0(\tau(X_k))$. По дефиниция на лексикографската наредба получаваме, че

$$\exists P \exists Q(Pref[P, r^j_0(\tau(X_i))] \& Pref[Q, r^l_0(\tau(X_k))] \& (\exists z(P(z) \& Q(z) \& P(r_0(z)) \& Q(r_1(z))) \vee Q(r^j_0(\tau(X_i)))))$$

Нека $P'$ и $Q'$ са свидетели за това съществуване, т.е.

$$Pref[P', r^j_0(\tau(X_i))] \& Pref[Q', r^l_0(\tau(X_k))] \& (\exists z(P'(z) \& Q'(z) \& P'(r_0(z)) \& Q'(r_1(z))) \vee Q'(r^j_0(\tau(X_i))))$$

Ако $Q(r^j_0(\tau(X_i)))$, т.е. $r^j_0(\tau(X_i)) \leq r^l_0(\tau(X_k))$, то $i = k$ и $j < l$. Ние обаче разглеждаме случая $i \neq k$. Затова нека $z'$ е свидетел за това съществуване, т.е.

$$P'(z') \& Q'(z') \& P'(r_0(z')) \& Q'(r_1(z'))$$

Щом $Pref[P', r^j_0(\tau(X_i))]$, $P'(r^j_0(\tau(X_i)))$. Следователно, $P'(\tau(X_i))$. Ще докажем, че $z' = \tau(X_i)$. Тогава $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_k)$, понеже $Q'(r_1(z'))$, откъдето от дефиницията на функцията $\tau$ ще следва, че $X_i \preceq_A X_k$.

Наистина, щом $z'$ е такова, че $Q'(r_1(z'))$, то $z'$ е образ на някой клъстер под действието на $\tau$. Нека тогава $z' = \tau(X_p)$. Имаме също, че $P'(r_0(z'))$ или $P'(r_0(\tau(X_p)))$. Следователно, $P'(r^j_0(\tau(X_p)))$. Това е възможно, разбира се, когато $i = p$. Така получихме, че $z' = \tau(X_i)$. □

## 2.2 Изразяване на моделите чрез множествата $P$ и $Q$

Дефинираме $F_{FQLO}[P, Q]$ - представяне на произволна квазилинейна наредба чрез две множества - $P$ и $Q$. Образно казано, елементите на множеството $P$ ще представят клъстерите, а множеството $Q$ - елементите на наредбата.
За удобство и прилежност ще дефинираме няколко формули. Нека

1. $\phi_1[P] = \exists x(Pref[P,x]\&\forall z(P(z)\&x \neq z \to P(r_1(z))))$ - в двоичното дърво на клъстерите отговарят корена $\Lambda$ и върховете, съставени само от единици.

2. $\psi_1[P,Q] = \forall x(P(x) \to Q(r_0(x)))$ - клъстерите са непразни множества.

3. $\psi_2[P,Q] = \forall x(Q(x) \to \exists y(x = r_0(y)))$ - всеки елемент в Q завършва на нула.

4. $\psi_3[P,Q] = \forall x \forall y(Q(x)\&y < x \to P(y) \vee Q(y))$ - всеки префикс на елемент от $Q$ е или от $Q$, или от $P$.

5. $\psi_4[P,Q] = \forall x(Q(x) \to \exists y(x \leq y\&\neg Q(r_0(y))))$ - клъстерите са крайни множества

Тогава, неформално казано, формулата

$$F_{FQLO}[P,Q] = \phi_1[P]\& \mathop{\&}_{i=1}^{4} \psi_i[P,Q]$$

описва дали множествата $P$ и $Q$ представят по описания чрез $\tau$ и $\sigma$ начин крайна квазилинейна наредба. С други думи, множеството $P$ трябва да бъде съставено от корена $\Lambda$ и върхове, съставени само от единици, а множеството Q - от елементи от вида $x00\ldots0$, където $x$ е връх от $P$.

Точно казано, нека $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ са подмножества на $T$. Тогава в $\mathbb{T}_2$ е вярна формулата $F_{FQLO}[P,Q]$ при $P$ и $Q$, оценени съответно с $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ точно тогава, когато $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ представят по описания чрез $\tau$ и $\sigma$ начин крайна квазилинейна наредба. По-нататък в дипломната работа ще използваме неформалния изказ, т.е. ще отъждествяваме променливите по подмножества в дадена формула с определените от формулата множества от върхове на двоичното дърво $T$.

### 2.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в езика на FQLO от първи ред

Нека $\varphi[x_1,\ldots,x_n]$ е формула в езика на квазилинейните наредби със свободни променливи измежду $x_1,\ldots,x_n$. Дефинираме формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ в езика на S2S с индукция относно построението на $\varphi$.

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \forall x(P(x)\&x \leq^{lex} x_i \to x \leq^{lex} x_j)$$

$$\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1\varsigma\varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q]\varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall z\varphi_1 \,:\, F^{\forall z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists z\varphi_1 \,:\, F^{\exists z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z)\&F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Тогава, взимайки различни променливи $x_1, \ldots, x_n$, съдържащи свободните променливи на $\varphi$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[x_1,\ldots,x_n]}[P, Q] \rightleftharpoons Q(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, Q(x_n) \,\&\, F^{\varphi}[P, Q],$$

като, без ограничение на общността, можем да предположим, че $x_1, \ldots, x_n$ нямат свързани участия в $F^{\varphi}[P, Q]$.

**Твърдение 2.3.** *Нека $\varphi$ е затворена формула в езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ с един двуместен предикатен символ. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всяка крайна квазилинейна наредба $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*
2. $\mathbb{T}_2 \models \forall P \forall Q(F_{FQL}[P, Q] \rightarrow F^{\varphi}[P, Q])$.

*Доказателство.* Нека $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ е формула от езика $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ със свободни променливи измежду $x_1, \ldots, x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е крайна квазилинейна наредба, $\mathscr{A} =< A, \leq_A >$. Нека $P$ и $Q$ са множествата, които еднозначно определят наредбата $\mathscr{A}$ върху безкрайното двоично дърво по описания начин ($P$ определя клъстерите, а $Q$ - елементите на $A$), т.е. $P = Range(\tau)$ и $Q = Range(\sigma)$, където $\tau$ и $\sigma$ са функциите, които дефинирахме по-рано. За тях е изпълнена формулата $F_{FQLO}[P, Q]$. Ще покажем, че за всеки избор на елементи $a_1, \ldots, a_n \in A$ от универсума е вярно, че

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[x_1,\ldots,x_n]}[P, Q][\![\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!],$$

Нека $a_1, \ldots, a_n \in A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, то $Q(\sigma(a_1)) \,\&\, \ldots \,\&\, Q(\sigma(a_n))$. Ще проведем индукция по построението на $\varphi$.

• $\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j$. Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models (x_i \doteq x_j)[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$. Тогава $a_i = a_j$, откъдето $\sigma(a_i) = \sigma(a_j)$. Следователно, $\mathbb{T}_2 \models F^{(x_i \doteq x_j)[x_1,\ldots,x_n]}[P, Q][\![\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]$.
Абсолютно аналогично в обратната посока. Ако $\sigma(a_i) = \sigma(a_j)$, то $a_i$ и $a_j$ трябва да се намират в един и същ клъстер $X$ и $r_0^p(\tau(X)) = r_0^q(\tau(X))$, откъдето и $p = q$. Следователно, $a_i$ и $a_j$ са под един и същ номер в клъстера $X$, т.е. $a_i = a_j$.

• $\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$.

($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models (x_i \leq_A x_j)[\![a_1, \ldots, a_n]\!]$. Тогава $a_i \leq_A a_j$. Нека $a_i = (a_i)_{l_1}^{p_1}$ и $a_j = (a_j)_{l_2}^{p_2}$, т.е. $a_i$ е $l_1$-тият елемент в клъстера $X_{p_1}$ и $a_j$ е $l_2$-тият елемент в клъстера $X_{p_2}$. От **Лема 2.2.** следва, че $p_1 = p_2 \vee \sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$.

Нека $x \in T$ е такъв, че $P(x) \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_i)$. Тогава $x = \tau(X_k)$ за някое $1 \leq k \leq n$ и $\tau(X_k) \leq^{lex} \tau(X_{p_1})$. Ако $p_1 = p_2$, т.е. елементите $a_i$ и $a_j$ се съдържат в един и същи клъстер, то $x = \tau(X_k) \leq^{lex} \tau(X_{p_1}) = \tau(X_{p_2})$, откъдето $x \leq^{lex} r_0^{l_2}(\tau(X_{p_2})) = \sigma(a_j)$. Ако $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$, от транзитивността на лексикографската наредба следва, че $x \leq^{lex} \sigma(a_j)$. Следователно, $\mathbb{T}_2 \models F^{(x_i \leq_A x_j)[x_1,\ldots,x_n]}[P, Q][\![\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_2 \models F^{(x_i \leq_A x_j)[x_1,\ldots,x_n]}[P, Q][\![\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]$, т.е. $\mathbb{T}_2 \models \forall x(P(x) \& x \leq^{lex} \sigma(a_i) \rightarrow x \leq^{lex} \sigma(a_j))$. Нека $a_i$ се намира в клъстер $X_i$ и $a_j$ се намира в клъстер $X_j$. Да допуснем, че $X_j \prec_A X_i$. Тогава $\tau(X_j) <^{lex} \tau(X_i)$. От друга страна, знаем, че $P(\tau(X_i))$ и $\tau(X_i) <^{lex} \sigma(a_i)$.

Тогава $\tau(X_i) <^{lex} \sigma(a_j) = r_0^q(\tau(X_j))$. Тук имаме, че връх от вида 11...1 е по-малък лексикографски от връх от вида 11...100...0. Следователно, $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_j)$, което е противоречие, откъдето следва, че $X_i \preceq_A X_j$.

• $\varphi = \neg\varphi_1$. Използвайки индуктивната хипотеза за формулата $\varphi_1$ получаваме

$$\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

$$\neg\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \neg\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

$$\mathscr{A} \vDash \neg\varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \vDash F^{\neg\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

• $\varphi = \varphi_1\varsigma\varphi_2$, където $\varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Ще разгледаме случая, когато $\varsigma = \vee$. Останалите следват по дефиниция. От индуктивната хипотеза имаме, че

$$\mathscr{A} \vDash \varphi_i[\![a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_i[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!] \text{ за } i = 1, 2.$$

Тогава

$$\mathscr{A} \vDash (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\![a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!] \vee \varphi_2[\![a_1,...,a_n]\!]$$

$$\leftrightarrow \mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!] \text{ или } \mathscr{A} \vDash \varphi_2[\![a_1,...,a_n]\!]$$

$$\leftrightarrow^{\text{и.х.}} \mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!] \text{ или } \mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_2[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!] \vee F^{\varphi_2[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \vDash F^{(\varphi_1\vee\varphi_2)[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

• $\varphi = \forall z\varphi_1$. Нека $\mathscr{A} \vDash \varphi[\![a_1,...,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash (\forall z\varphi_1)[\![a_1,...,a_n]\!]$. Нека $z_0 \in T$ е такова, че $Q(z_0)$. Понеже $\sigma : A \to Q$ е биекция, съществува праобраз на $z_0$. Нека $a_0 = \sigma^{-1}(z_0)$. Тогава $\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_0,a_1,...,a_n]\!]$. От индукционното предположение получаваме, че $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(\sigma^{-1}(z_0)),\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$, т.е. $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![z_0,\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$. Понеже избрахме произволен връх $z_0 \in T$ със свойството $Q(z_0)$, получаваме, че:

$$\mathbb{T}_2 \vDash \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![z,\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$$

Абсолютно аналогично следва и в обратната посока. Нека $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$, т.е. $\mathbb{T}_2 \vDash \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![z,\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!])$. Нека $a_0 \in A$. Тогава $Q(\sigma(a_0))$, откъдето $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_0),\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$. От индуктивната хипотеза следва, че $\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_0,a_1,...,a_n]\!]$, откъдето понеже $a_0$ беше произволен елемент от $A$, $\mathscr{A} \vDash \forall x\varphi_1[\![a_1,...,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash \varphi[\![a_1,...,a_n]\!]$.

• $\varphi = \exists z\varphi_1$. Нека $\mathscr{A} \vDash \varphi[\![a_1,...,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash (\exists z\varphi_1)[\![a_1,...,a_n]\!]$. Нека $a_0$ е свидетел за това съществуване, т.е. $\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![a_0,a_1,...,a_n]\!]$. Тогава от индукционното предположение получаваме, че $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_0),\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]$. Понеже $Range(\sigma) = Q$, следва, че

$$\mathbb{T}_2 \vDash \exists z(Q(z)\,\&\,F^{\varphi_1[x_1,...,x_n]}[P,Q][\![z,\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!])$$

Елементът $\sigma(a_0)$ е свидетел за това съществуване. Така,

$$\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[x_1,\dots,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]$$

Абсолютно аналогично следва и в обратната посока. Нека $\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[x_1,\dots,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]$. Нека $z_0 \in T$ е свидетел за съществуването или $Q(z_0)$ и $\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[x_1,\dots,x_n]}[P,Q][\![z_0,\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]$. Щом $Q(z_0)$, то $z_0 = \sigma(a_0)$ за някое $a_0 \in A$. Тогава от индуктивната хипотеза следва, че

$$\mathscr{A} \models \varphi_1[\![a_0,a_1,\dots,a_n]\!]$$

Така,

$$\mathscr{A} \models (\exists x\varphi_1)[\![a_1,\dots,a_n]\!] \to \mathscr{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!]$$

Окончателно получихме, че за всеки избор на елементи $a_1,\dots,a_n \in A$ от наредбата е вярно, че

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[x_1,\dots,x_n]}[P,Q][\![\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]$$

Сега лесно виждаме еквивалентността между 1. и 2.

(1. $\Rightarrow$ 2. ) Нека $\varphi$ е затворена формула от $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ и за всяка крайна квазилинейна наредба $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi$. Ще докажем, че $\mathbb{T}_2 \models \forall P\forall Q(F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$. Нека $P$ и $Q$ са произволни подмножества на $T$ (отново ще отъждествяваме променливите по монадични предикатни променливи с подмножества). Да предположим, че $\mathbb{T}_2 \models F_{FQLO}[P,Q]$. Тогава множествата $P$ и $Q$ съответстват чрез $\tau$ и $\sigma$ на крайна квазилинейна наредба $\mathscr{A}$. Тогава, както доказахме

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q].$$

Следователно, $\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q]$. Значи,

$$\mathbb{T}_2 \models F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q].$$

Тъй като $P$ и $Q$ бяха произволни, то

$$\mathbb{T}_2 \models \forall P\forall Q(F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$$

(2. $\Rightarrow$ 1.) Нека $\mathbb{T}_2 \models \forall P\forall Q(F_{FQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$. Нека $\mathscr{A}$ е произволна крайна квазилинейна наредба. Нека $P$ и $Q$ са подмножества на $T$, които съответстват на $\mathscr{A}$ чрез $\tau$ и $\sigma$. Тогава $\mathbb{T}_2 \models F_{FQLO}[P,Q]$ и, следователно, $\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q]$. Тъй като вече доказахме, че

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q],$$

то имаме $\mathscr{A} \models \varphi$. $\square$

# 3 Най-много изброими квазилинейни наредби

Логичното продължение е да разгледаме теорията на квазилинейните наредби, като се откажем от крайността. Затова дефинираме теорията QLO над езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$, като теорията на класа от най-много изброимите квазилинейни наредби. В крайния случай ние изобразявахме клъстерите във върховете по клона на единицата на корена $\Lambda$, а елементите им - по нулевия клон на образа на клъстера, в който принадлежат. Подобни разсъждения можем да прехвърлим и за някои най-много изброими безкрайни квазилинейни наредби.

Пример за такава е тази на класа от квазилинейните наредби, които притежават краен брой клъстери, но има поне един от тях, който съдържа изброимо много елементи. Тогава изобразяването и разсъжденията досега можем да ги прехвърлим с разликата, че по клона на нулата на образ на клъстер с изброимо много елементи, ще поставим всички тези елементи.

Важното, което използвахме при построението на функцията $\tau$, е, че изобразяваме най-малкия клъстер в корена на безкрайното двоично дърво. Оттам нататък всеки следващ елемент изобразяваме в непосредствения наследник по клона на единицата. При разглеждането на най-много изброимите квазилинейни наредби с изброимо много клъстери възникват следните два проблема. Единият от тях е, че може да липсва най-малък относно $\preceq_A$ клъстер, който да изобразим в корена. Другият въпрос възниква при случая, в който клъстерите, снабдени със своята линейна наредба $\preceq_A$, образуват например гъсто множество. Тогава не можем да говорим за непосредствени наследници. Затова трябва да открием множество от върхове в безкрайното двоично дърво, в което да изобразим клъстерите, така че да запазим наредбата.

В своята статия Рабин доказва разрешимостта на линейните наредби, използвайки множеството $B$, което е съставено от върховете (които са крайни редици от нули и единици), които съдържат като подниз 101 единствено и само в своя крaя (като суфикс). Това множество дефинираме със следната формула. Един връх $x \in T$ принадлежи на $B$ тогава и само тогава, когато:

$$\exists P(Pref[P,x]\,\&\,\forall y(P(y)\,\&\,P(r_1(r_0(r_1(y)))) \to x = r_1(r_0(r_1(y))))\,\&\,\exists y(P(y)\,\&\,x = r_1(r_0(r_1(y)))))$$

За това множество е вярно следното

**Твърдение 3.1.** *Множеството $B$ е гъсто множество без най-голям и най-малък елемент относно лексикографската наредба в безкрайното двоично дърво.*

От това твърдение и теоремата на Кантор за изброимите гъсти наредби без пръв и без последен елемент следва, че $B$ с лексикографската наредба между елементите на $B$ е изоморфно с рационалните числа с естествената наредба на рационалните числа.

*Доказателство.* • (няма най-малък елемент) Да допуснем, че множеството $B$ притежава най-малък елемент относно лексикографската наредба в безкрайното двоично дърво и нека $z_0$ е свидетел за това съществуване, т.е. $\forall x(B(x) \rightarrow z_0 \leq^{lex} x)$. Тогава $z_0$ има вида $z_0 = x101$ за някое $x \in T$. Нека отбележим, че $x101$ не притежава като подниз 101 освен в своя край. Тогава за върха $x100101$ имаме, че $x100101 \leq^{lex} x101$ и не притежава 101 като подниз (т.е. принадлежи на множеството $B$), което е противоречие.

• (няма най-голям елемент) Абсолютно аналогично, ако $x101$ е най-голям елемент, то върхът $x1101$ е по-голям лексикографски от него и е от $B$. Противоречие.

• (гъстота) Нека $x, y \in B$ и $x <^{lex} y$. Тогава ако множествата $P$ и $Q$ са такива, че $Pref[P, x]\,\&\,Pref[Q, y]$, то $\exists z(P(z)\&Q(z)\&P(r_0(z))\&Q(r_1(z)))$. Нека свидетел за това съществуване е $z_0$. Ще разгледаме 2 случая в зависимост от това къде се "разклоняват"' двата върха $x$ и $y$.

**Първи случай** $x = z_0 0u101$, а $y = z_0 1$ за някое $u \in T$. Образно казано, разклонението е малко преди края на пътя до $y$. Подобно на преди малко (при избора на по-голям връх) върхът $p = z_0 0u1101$ от $B$ ще бъде по-голям от $x$ и по-малък от $y$ лексикографски.

**Втори случай** В противен случай, ако $y = v101$ за някое $v \in T$, то ще имаме, че $x \leq^{lex} v1$. Тогава подобно на преди малко (при избора на по-малък връх) върхът $p = v100101$ ще бъде по-голям от $x$, по-малък от $y$ лексикографски и $p \in B$.
Окончателно, получаваме, че $\forall x \forall y(x <^{lex} y \rightarrow \exists z(x <^{lex} z\,\&\,z <^{lex} y))$. Следователно, множеството $B$ е гъсто. □

Ще разгледаме и едно полезно свойство, което ще използваме по-нататък:

**Лема 3.2.** *Нека $x \in T$, $b \in B$ и $k < \omega$. Тогава е изпълнена следната еквивалентност*

$$x <^{lex} b \leftrightarrow r_0^k(x) <^{lex} b$$

*Доказателство.* Нека $x \in T$ и $b \in B$. Ще използваме математическа индукция относно $k < \omega$.

• При $k = 0$ еквивалентността е тавтология.

• При $k = 1$ трябва да докажем, че

$$x <^{lex} b \leftrightarrow r_0(x) <^{lex} b$$

Ако $x <^{lex} b$, то съществува общ префикс $z$ на $x$ и $b$, $z \neq x$ и $z \neq b$, такъв че $r_0(z)$ е префикс на $x$ и $r_1(z)$ е префикс на $b$. Тогава $z$ ще бъде префикс и на $r_0(x)$. Следователно, $r_0(x) <^{lex} b$. В обратната посока, ако $r_0(x) <^{lex} b$, то съществува общ префикс $z$ на $r_0(x)$ и $b$, $z \neq r_0(x)$ и $z \neq b$, такъв че $r_0(z)$ е префикс на $r_0(x)$ и $r_1(z)$ е префикс на $b$. В такъв случай, ако $z \neq x$, то следва желаното. Ако $z = x$, тогава $r_1(x)$ е префикс на $b$, откъдето следва, че $r_0(x) <^{lex} b$.

• Нека допуснем, че е вярна следната еквивалентност

$$x <^{lex} b \leftrightarrow r_0^k(x) <^{lex} b$$

В предишния случай доказахме еквивалентността при $k=1$. Прилагайки това доказателство, лесно следва, че

$$x <^{lex} b \overset{\text{и.х.}}{\longleftrightarrow} r_0^k(x) <^{lex} b \overset{k=1}{\longleftrightarrow} r_0^{k+1}(x) <^{lex} b$$

□

Така, вече си осигурихме множество, в което да изобразим клъстерите.

## 3.1 Изобразяване в безкрайното двоично дърво

С множеството $B$ ще представим клъстерите на изброимо безкрайна квазилинейна наредба. Нека $\mathscr{A} = < A, \leq_A >$ е квазилинейна наредба, за която $\bar{\bar{A}} \leq \omega$. Ще дефинираме изображението $\tau : A/_{\sim} \to B$, като $X \preceq_A Y \leftrightarrow \tau(X) \leq^{lex} \tau(Y)$.

Абсолютно аналогично, дефинираме функцията $\sigma : A \to$ , като използваме факта, че $\bar{\bar{A}} = \omega$. Тогава всеки един клъстер ще бъде най-много изброим (клъстерите са класове на еквивалентност над множеството $A$, откъдето всеки от тях е непразно подмножество на $A$). Следователно, можем да номерираме елементите във всеки един от тях. В такъв слувай, $\sigma$ можем по познатия начин можем да дефинираме така:

$$\sigma(x_j^i) = r_0^j(\tau(X_i)),$$

където $x_j^i$ е $j$-тият елемент в клъстера $X_i$.
По този начин построяваме двете множества $P = Range(\tau)$ и $Q = Range(\sigma)$. Те няма да имат общи елементи, понеже всеки връх в $Q$ е от вида $x00\ldots0$, където $x \in P$, а върховете в $P$ са от вида $x101$, т.е. винаги завършват на единица.

Аналогично на крайния случай, имаме следното

**Твърдение 3.3.** $x_j^i \leq_A y_l^k \leftrightarrow i = k \vee \sigma(x_j^i) \leq^{lex} \sigma(y_l^k)$

*Доказателство.* Твърдението следва напълно аналогично. Ако $x_j^i \leq_A y_l^k$, то двата елемента или са в един и същи клъстер (т.е. i=p), или $X_i \preceq_A X_l$, откъдето по дефиницията на $\tau$ имаме, че $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_l)$ (тогава, $\sigma(x_j^i) \leq^{lex} \sigma(y_l^k)$). Обратната посока следва аналогично. □

## 3.2 Изразяване на моделите чрез множествата $P$ и $Q$

По подобие на $F_{FQLO}[P,Q]$ ще дефинираме формула $F_{QLO}[P,Q]$, която определя дали множествата $P$ и $Q$ (подмножества от върхове на безкрайното двоично дърво) описват изброимо безкрайна квазилинейна наредба. Както въведохме в предната точка, множеството $P$, представящо клъстерите, ще бъде помножество на гъстото множество от върхове $B$. Елементите на наредбата, от своя страна, ще изпълняват условията, които важат и за елементите на крайна наредба:

1. $\psi_1[P,Q] = \forall z(P(z) \to Q(r_0(z)))$ - клъстерите са непразни множества

2. $\psi_3[P,Q] = \forall x \neg Q(r_1(x))$ - всеки елемент от квазилинейната наредба принадлежи на някой клъстер, на който, да кажем, отговаря върха $x$, откъдето на тях, образно казано, отговарят върхове от вида x00...0

3. $\psi_4[P,Q] = \forall x (Q(r_0(r_0(x))) \rightarrow Q(r_0(x)))$ - всеки връх от вида в точка 2, представящ елемент от клъстер $x$, по-малък лексикографски от най-големия връх в този клъстер, представя някой елемент

Тогава формулата

$$F_{QLO}[P,Q] = (P \subseteq B) \& \psi_1[P,Q] \& \psi_3[P,Q] \& \psi_4[P,Q]$$

описва дали множествата $P$ и $Q$ представят модел на QLO.

## 3.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в езика на QLO от първи ред

Тук работим съвършено по същия начин, както в крайния случай. Нека $\varphi[x_1,\dots,x_n]$ е формула в езика $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ със свободни променливи измежду $x_1,\dots,x_n$. Дефинираме формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ в езика на S2S с индукция относно построението на $\varphi$.

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j \, : \, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j \, : \, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \forall x (P(x) \,\&\, x \leq^{lex} x_i \rightarrow x \leq^{lex} x_j)$$

$$\varphi \rightleftharpoons \neg \varphi_1 \, : \, F^{\neg \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \, : \, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall z \varphi_1 \, : \, F^{\forall z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z (Q(z) \rightarrow F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists z \varphi_1 \, : \, F^{\exists z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z (Q(z) \,\&\, F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Тогава, взимайки предвид свободните променливи $x_1,\dots,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[x_1,\dots,x_n]}[P,Q] \rightleftharpoons Q(x_1) \,\&\, \dots \,\&\, Q(x_n) \,\&\, F^{\varphi}[P,Q])$$

## 3.4 Разрешимост на QLO над $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$

**Твърдение 3.4.** *Нека $\varphi$ е затворена формула в езика на QLO от първи ред. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всяка най-много изброимо безкрайна квазилинейна наредба $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*

2. *$\mathbb{T}_2 \models \forall P \forall Q (F_{QLO}[P,Q] \rightarrow F^{\varphi}[P,Q])$.*

*Доказателство.* Нека $\varphi[x_1,\dots,x_n]$ е формула от езика на QLO със свободни променливи измежду $x_1,\dots,x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е изброимо безкрайна квазилинейна наредба, $\mathscr{A} = <A, \leq_A>$. Нека $P$ и $Q$ са множества, които еднозначно определят наредбата $\mathscr{A}$ върху безкрайното двоично дърво ($P = Range(\tau)$ определя клъстерите, а $Range(\sigma)$ - елементите на $A$, където $\tau$ и $\sigma$ са функциите, които дефинирахме по-рано), т.е. за тях е изпълнена формулата $F_{QLO}[P,Q]$. Ще покажем, че

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q]$$

За целта, трябва да покажем, че ако $a_1,\dots,a_n \in A$, то

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

Щом $\sigma$ е тотална биекция, то $Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))$.
Проверката ще проведем по индукция относно построението на формулата $\varphi$. Случаите $\varphi = x_i \doteq x_j$, $\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2$, където $\varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi = \exists x \varphi_1$ и $\varphi = \forall x \varphi_1$ следват по съвършено същия начин, както в доказателството на **Твърдение 2.3.**

• $\varphi = x_i \leq_A x_j$. Ще разгледаме в двете посоки.

($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models x_i \leq_A x_j$. Нека $x_i$ се намира в клъстер $X_i$ под номер $p$, а $x_j$ - в клъстер $X_j$ под номер $q$. Тогава $X_i \preceq_A X_j$, откъдето по дефиницията на $\tau$ имаме, че $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_j)$ **(1)**.
Нека $z \in T$ е такъв, че $P(z)$ и $z \leq^{lex} \sigma(a_i)$. Щом $P(z)$, $z$ е образ на някой клъстер $Z \in A/_\sim$, т.е. $z = \tau(Z)$. Тогава $\tau(Z) \leq^{lex} r_0^p(\tau(X_i))$, откъдето $\tau(Z) \leq^{lex} \tau(X_i)$. От **(1)** и транзитивността на лексикографската наредба $\leq^{lex}$ следва, че $\tau(Z) \leq^{lex} \tau(X_j) \leq^{lex} \sigma(a_j)$. Така, понеже избрахме произволно $z \in T$, получаваме, че

$$\mathbb{T}_2 \models \forall z(P(z) \& z \leq^{lex} \sigma(a_i) \rightarrow z \leq^{lex} \sigma(a_j)), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

($\Leftarrow$) Нека

$$\mathbb{T}_2 \models \forall z(P(z) \& z \leq^{lex} \sigma(a_i) \rightarrow z \leq^{lex} \sigma(a_j))$$

Нека $a_i$ се намира в клъстер $X$ и $a_j$ се намира в клъстер $X_j$. Да допуснем, че $X_j \prec_A X_i$. Тогава $\tau(X_j) <^{lex} \tau(X_i)$. От друга страна, знаем, че $P(\tau(X_i))$ и $\tau(X_i) <^{lex} \sigma(a_i)$. Тогава $tau(X_i) <^{lex} \sigma(a_j) = r_0^q(\tau(X_j))$. Тук имаме, че връх от вида $z101$ е по-малък лексикографски от връх от вида $11\dots10100\dots0$. Следователно, $\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_j)$, което е противоречие, откъдето следва, че $X_i \preceq_A X_j$.

Следователно,

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q]$$

което ни беше необходимо за доказателството на желаната еквивалентност. □

## 3.5 Разрешимост на теорията QLO над език от по-висок ред

Досега разглеждахме разрешимостта на теориите на квазилинейните наредби FQLO и QLO над езика от първи ред $\mathscr{L}^{FO}(\leq_A)$ с един двуместен предикатен символ. Сега ще направим проверката над език от по-висок ред. Ще разгледаме два такива езика - слабият монадичен език от втори ред $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ и монадичния език от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$. Различията с езика от първи ред се изразяват в наличието на още една атомарна формула, определяща принадлежност - $''x \in X''$, която ние ще означаваме $X(x)$, и наличието на допълнителни променливи по подмножества.

В следващите редове ще представим няколко примера за разликата в изразителната сила между езика от първи ред и слабия монадичен език от втори ред. В тях се корени фактът, че не можем да изразим със средствата на езика от първи ред свойството крайност: • Дадена квазилинейна наредба е крайна:

$$\exists X \forall x X(x)$$

• Дадена квазилинейна наредба притежава краен брой клъстери:

$$\exists X \forall x \exists y (x \leq_A y \& y \leq_A x \& X(y))$$

• В дадена квазилинейна наредба всеки клъстер е крайно множество:

$$\forall x \exists X \forall y (x \leq_A y \& y \leq_A x \to X(y))$$

Слабият монадичен език от втори ред и монадичния език от втори ред притежават един и същи синтаксис, но разликата им се крие в семантиката, понеже допълнителните променливи по подмножества се тълкуват по различен начин, а именно в слабия език те упоменават крайни подмножества, докато в монадичния език от втори - те са произволни множества. Ето два примера за свойства, които не са изразими в $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$, свиделстващи за това: • Клъстерите на дадена квазилинейна наредба образуват добре наредено множество относно $\preceq_A$:

$$\forall X (\exists x X(x) \to \exists y (X(y) \& \forall x (X(x) \to y \leq_A x)))$$

• Дадена квазилинейна наредба е добре наредено множество:

$$\forall x \forall y (x \leq_A y \& y \leq_A x \to x = y)$$

$$\forall X (\exists x X(x) \to \exists y (X(y) \& \forall x (X(x) \to y \leq_A x)))$$

Затова ще разгледаме проблема за разрешимостта на QLO и за езиците $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A$ ) и $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$. Ще използваме същото изобразяване на моделите на QLO върху безкрайното двоично дърво чрез функциите $\tau$ и $\sigma$ (понеже естеството на моделите не се променя), както и същата формула $F_{QLO}[P,Q]$ над езика на S2S, описваща дали две множества от върхове $P$ и $Q$ определят квазилинейна наредба. Разликата ще бъде в построението на формулата $F^{\varphi}[P,Q]$, която построявахме по относно построението на формулата $\varphi$, а в езиците от по-висок ред имаме 3 допълнителни случая.

### 3.5.1 Релативизация на свойство $\varphi$ в QLO над $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$

Нека $\varphi[X_1,...,X_m,x_1,...,x_n]$ е формула над слабия монадичен език от втори ред с един двуместен предикатен символ $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ със свободни променливи измежду $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$. Дефинираме формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ по построението на формулата $\varphi$ по следния начин:

$$\varphi = x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi = x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \forall x(P(x)\,\&\,x \leq^{lex} x_i \to x \leq^{lex} x_j)$$

$$\varphi = X_p(x_i) \,:\, F^{X(x)}[P,Q] \rightleftharpoons X_p(x_i)$$

$$\varphi = \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1\varsigma\varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q]\varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi = \forall z\varphi_1 \,:\, F^{\forall z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \exists z\varphi_1 \,:\, F^{\exists z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z)\,\&\,F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \forall X\varphi_1 \,:\, F^{\forall X\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall X(Fin[X]\,\&\,X \subseteq Q \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \exists X\varphi_1 \,:\, F^{\exists X\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists X(Fin[X]\,\&\,X \subseteq Q\,\&\,F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Аналогично, взимайки предвид свободните променливи $X_1,...,X_m$, $x_1,...,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[X_1,...,X_m,x_1,...,x_n]}[P,Q] \rightleftharpoons Fin[X_1]\&...\&Fin[X_m]\&$$

$$\&\forall y(X_1(y) \to Q(y))\,\&\ldots\&\,\forall y(X_m(y) \to Q(y))\,\&\,Q(x_1)\,\&\ldots\&\,Q(x_n)\,\&\,F^{\varphi}[P,Q])$$

над слабия език от втори ред.

### 3.5.2 Разрешимост на QLO над $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$

**Твърдение 3.5.** *Нека $\varphi$ е затворена формула над слабия монадичен език от втори ред на QLO. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всяка най-много изброима квазилинейна наредба $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*
2. $\mathbb{T}_2 \models \forall P\forall Q(F_{QLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$.

*Доказателство.* Доказателството следва същата структура, както в случая над езика от първи ред. Трябва да докажем, че

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,...,A_m,a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],...,\sigma[A_m],\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q],$$

за произволни $a_1,...,a_n \in A$ и $A_1,...,A_m \subseteq A$, като $A_1,...,A_m$ са крайни. Както досега, ще го направим с индукция по построението на формулата $\varphi$. Всички случаи над езика от първи ред се прехвърлят напълно, но вече се появяват три нови такива - $\varphi \eqcirc X(x)$, $\varphi \eqcirc \exists X \varphi_1$ и $\varphi \eqcirc \forall X \varphi_1$.

Нека $a_1, \dots, a_n \in A$ и $A_1, \dots, A_m \subseteq A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, имаме, че

$$\mathbb{T}_2 \models \forall y(\sigma[A_1](y) \to Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \to Q(y))\,\&\,Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))$$

Също така, понеже $\sigma$ е функция, то крайните множества ще бъдат изобразени в крайни такива, т.е.

$$\mathbb{T}_2 \models Fin[\sigma[A_1]]\,\&\dots\&\,Fin[\sigma[A_m]]$$

• $\varphi \eqcirc X_p(x_i)$. Тогава

$$\mathscr{A} \models A_p(a_i) \leftrightarrow a_i \in A_p \xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}} \sigma(a_i) \in \sigma[A_p] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models \sigma[A_p](\sigma(a_i))$$

• $\varphi \eqcirc \exists X \varphi_1$. Нека $\mathscr{A} \models \exists X \varphi_1[\![A_1, \dots, A_m, a_1, \dots, a_n]\!]$. Нека $A_0 \subseteq A$ е свидетел за това съществуване, т.е. $Fin[A_0]$ и

$$\mathscr{A} \models \varphi_1[\![{}_0, A_1, \dots, A_m, a_1, \dots, a_n]\!]$$

От индуктивната хипотеза следва, че

$$\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_0], \sigma[A_1], \dots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

Щом $A_0$ е крайно множество и $Q = Range(\sigma)$, то $Fin[\sigma[A_0]]$ и $\sigma[A_0] \subseteq Q$. Тогава получаваме, че

$$\mathbb{T}_2 \models \exists X(Fin[X] \& X \subseteq Q \& F^{\varphi[\![X, \sigma[A_1], \dots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

В нашия случай, това е $\sigma[A_0]$.
Напълно аналогично и в обратната посока, като се разглеждат празобразите относно $\sigma$ на свидетеля за съществуването:

$$\mathbb{T}_2 \models \exists X(Fin[X] \& X \subseteq Q \& F^{\varphi[\![X, \sigma[A_1], \dots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

• $\varphi \eqcirc \forall X \varphi_1$. Този случай следва от предишния случаи и случая за отрицание. □

### 3.5.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в QLO над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

Нека $\varphi[X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n]$ е формула над слабия монадичен език от втори ред с един двуместен предикатен символ $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ със свободни променливи измежду $X_1, \dots, X_m, x_1, \dots, x_n$. Дефинираме формулата $F^\varphi[P, Q]$ по построението на формулата $\varphi$ по следния начин:

$$\varphi \eqcirc x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P, Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \eqcirc x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P, Q] \rightleftharpoons \forall x(P(x)\,\&\,x \leq^{lex} x_i \to x \leq^{lex} x_j)$$

$$\varphi \eqcirc X_p(x_i) \,:\, F^{X(x)}[P, Q] \rightleftharpoons X_p(x_i)$$

$$\varphi \eqcirc \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P, Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P, Q]$$

$$\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \, : \, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P, Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P, Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P, Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi = \forall z \varphi_1 \, : \, F^{\forall z \varphi_1}[P, Q] \rightleftharpoons \forall z (Q(z) \rightarrow F^{\varphi_1}[P, Q])$$

$$\varphi = \exists z \varphi_1 \, : \, F^{\exists z \varphi_1}[P, Q] \rightleftharpoons \exists z (Q(z) \,\&\, F^{\varphi_1}[P, Q])$$

$$\varphi = \forall X \varphi_1 \, : \, F^{\forall X \varphi_1}[P, Q] \rightleftharpoons \forall X (X \subseteq Q \rightarrow F^{\varphi_1}[P, Q])$$

$$\varphi = \exists X \varphi_1 \, : \, F^{\exists X \varphi_1}[P, Q] \rightleftharpoons \exists X (X \subseteq Q \,\&\, F^{\varphi_1}[P, Q])$$

Аналогично, взимайки предвид свободните променливи $X_1, \ldots, X_m$, $x_1, \ldots, x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[X_1, \ldots, X_m, x_1, \ldots, x_n]}[P, Q] \rightleftharpoons Fin[X_1] \& \ldots \& Fin[X_m] \&$$

$$\& \forall y (X_1(y) \rightarrow Q(y)) \,\&\, \ldots \,\&\, \forall y (X_m(y) \rightarrow Q(y)) \,\&\, Q(x_1) \,\&\, \ldots \,\&\, Q(x_n) \,\&\, F^{\varphi}[P, Q])$$

над слабия език от втори ред.

### 3.5.4 Разрешимост на QLO над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

**Твърдение 3.6.** *Нека $\varphi$ е затворена формула над монадичния език от втори ред на QLO. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всяка най-много изброима квазилинейна наредба $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \vDash \varphi$.*

2. $\mathbb{T}_2 \vDash \forall P \forall Q (F_{QLO}[P, Q] \rightarrow F^{\varphi}[P, Q])$.

*Доказателство.* По съвършено същия начин, както със слабия монадичен език от втори ред, като тук дори няма да се съобразяваме и с крайността на множествата. Нека да разгледаме все пак случаите за квантифициране по произволни подмножества:

• $\varphi = \forall X \varphi_1$. ($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \vDash \varphi[\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash \forall X \varphi_1 [\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$. Нека $C \subseteq Q$. Разглеждаме праобраза $\sigma^{-1}[C]$ относно функцията $\sigma$. Следователно, $\mathscr{A} \vDash \varphi_1 [\![\sigma^{-1}[C], A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$. От индуктивното предположение получаваме, че $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1 [\![\sigma(\sigma^{-1}[C]), \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$, т.е. $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1 [\![C, \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$. Но $C$ беше произволно подмножество на $A$, откъдето можем да заключим, че $\mathbb{T}_2 \vDash \forall X (X \subseteq Q \rightarrow F^{\varphi_1 [\![X, \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q])$, т.е. $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi [\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_2 \vDash \forall X (X \subseteq Q \rightarrow F^{\varphi_1 [\![X, \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q])$. Нека $C \subseteq A$. Тогава $\sigma[C] \subseteq Q$ и $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1 [\![\sigma[C], \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$. От индуктивното предположение следва, че $\mathscr{A} \vDash \varphi_1 [\![C, A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$. Но $C$ беше произволно подмножество на $A$, откъдето получаваме, че $\mathscr{A} \vDash \forall X \varphi_1 [\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash \varphi [\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$.

• $\varphi = \exists X \varphi_1$. ($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \vDash \varphi [\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash \exists X \varphi_1 [\![A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$. Нека $C$ е свидетел за това съществуване, т.е. $\mathscr{A} \vDash \varphi_1 [\![C, A_1, \ldots, A_m, a_1, \ldots, a_n]\!]$. Тогава от индуктивната хипотеза следва, че $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1 [\![\sigma[C], \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$. Ясно е, че $\sigma[C] \subseteq Range(\sigma) = Q$. Следователно, $\mathbb{T}_2 \vDash \exists X (X \subseteq Q \,\&\, F^{\varphi_1 [\![X, \sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q])$, т.е. $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi [\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_2 \vDash \exists X(X \subseteq Q \,\&\, F^{\varphi_1[\![X,\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$. Нека $C$ е свидетел за това съществуване, т.е. $C \subseteq Q$ и $\mathbb{T}_2 \vDash F^{\varphi_1[\![C,\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$. Разглеждаме праобраза $\sigma^{-1}[C]$ относно функцията $\sigma$. Тогава от индуктивното предположение получаваме, че $\mathscr{A} \vDash \varphi_1[\![\sigma^{-1}[C], A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \vDash \exists X\varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$ $\square$

# 4 Най-много изброими чужди обединения на квазилиней-ни наредби

Разглеждаме следната аксиоматика $G$ от първи ред:

1. $\forall x(x \leq x)$ - рефлексивност
2. $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \& y \leq z \to x \leq z)$ - транзитивност
3. $\forall x \forall y \forall z(xRy \& xRz \to yRz)$, като $aRb \leftrightarrow a \leq_A b \vee b \leq_A a$

Тя много наподобява тази на квазлинейните наредби с разлика, че сме се отказали от линейността за сметка на по-слаба такава. Нека $\mathscr{K}_{union}$ е класът от най-много изброимите модели на аксиоматиката G. Нека означим UQLO$= Th_2(\mathscr{K}_{union})$ - теорията над монадичния език от втори ред с един двуместен предикатен символ $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$.

Нека $\mathscr{A}$ е модел на теорията UQLO и $\mathscr{A} =< A, \leq_A >$. За едно подмножество на универсума $A$ ще казваме, че е антиверига, ако всеки два елемента в него не са сравними. От аксиомата за избора непосредствено следва, че има максимална антиверига $C$ с мощност $\alpha \leq \omega$. Тогава множествата (представляващи квазилинейни наредби) $\{\{b|bRc\}|c \in C\}$ образуват разбиване на универсума на непресичащи части. Тогава $\mathscr{A} =< \cup_{i\leq\alpha} A_i, \leq_A >$. С други думи, моделите на теорията UQLO представляват най-много изброими чужди обединения на квазилинейни наредби.

Ще разгледаме въпроса за разшимостта на тази теория, възползвайки отново от разрешимостта на теорията S2S. Тук отново ще използваме множеството B, съставено от елементи на безкрайното двоично дърво, което е гъсто без най-голям и най-малък елемент относно лексикографската наредба. Ако досега ние представяхме изброима квазилинейна наредба чрез множеството B (или част от него), то тук ще трябва да представим изброим набор от такива наредби чрез същото множество.

Ще разгледаме множеството $B_I$, съставено от всички върхове, представляващи поредица от единици, завършваща с низа 101, т.е. 101, 1101, 11101 и т.н. Тоест множеството $B_I$ изпълнява следните свойства:

$$\exists X(X \subseteq B \& X(101) \& \forall x(X(x101) \leftrightarrow X(x1101)) \& \forall x(\neg X(x0101)))$$

Следователно, $B_I \subseteq B$. От дефиницията ясно се вижда, че то има най-малък елемент (101) и всеки елемент има непосредствен наследник (понеже ако $B_I(x101)$, то $B_I(x1101)$). С други думи, $B_I$ е дискретно подмножество на $B$. Ние ще го използваме да разделим множеството $B$ на интервали, в които да изобразяваме клъстерите в моделите на UQLO, като два клъстера от една и съща наредба, част от обединение, изобразяваме между два съседни върха от множеството $B_I$

## 4.1 Изобразяване в безкрайното двоично дърво

Ще дефинираме инекция $\tau : A/_{\sim} \to B$, изпълняваща условието

$$X_i \preceq_A X_j \to \exists x(B_I(x101) \& x101 <^{lex} \tau(X_i) <^{lex} x1101 \& x101 <^{lex} \tau(X_j) <^{lex} x1101) \& \tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_j)$$

Аналогично, ако два клъстера не са сравними, т.е. се намират в две различни наредби в обединението, то между тях има елемент от индексното множество $B_I$, такъв че той е между образите на клъстерите. Или

$$\neg(X_i \sim X_j) \to \exists x(B_I(x) \& (\tau(X_i) <^{lex} x <^{lex} \tau(X_j) \vee \tau(X_j) <^{lex} x <^{lex} \tau(X_i)))$$

Абсолютно аналогично, дефинираме биекцията $\sigma : A \to T$, като използваме факта, че $\bar{\bar{A}} = \omega$, то всеки един клъстер ще бъде най-много изброим (клъстерите са класове на еквивалентност над множеството $A$, откъдето всеки от тях е непразно подмножество на $A$). Нека с $\{X_i\}_{i<\omega}$ означим всички клъстери в $\mathscr{A}$ и за всяко $i < \omega$ нека $\bar{\bar{X}}_i = \alpha_i$, като $\alpha_i \leq \omega$. В такъв случай нека елементите на клъстера $X_i$ означаваме с $x^i_j$ за $j \leq \alpha_i$. С помощта на тези означения дефинираме функцията $\sigma$ така:

$$\sigma(x^i_j) = r^j_0(\tau(X_i))$$

**Лема 4.1.** *Функцията $\sigma : A \to Q$ е инекция.*

*Доказателство.* Нека $a = a^k_i$ и $b = b^l_j$ са елементи на A, такива че $\sigma(a) = \sigma(b)$. Тогава $r^i_0(\tau(X_k)) = r^j_0(\tau(X_l))$. Понеже $\tau(X_k), \tau(X_l) \in B$, те са от вида $x101$, откъдето следва, че $i = j$. Тогава $\tau(X_k) = \tau(X_l)$. По дефиниция функцията $\tau$ е инекция, откъдето следва, че $k = l$. Окончателно, получаваме, че $a = b$. □

## 4.2 Изразяване на моделите чрез множествата $P$ и $Q$

Видяхме как можем да представим конкретен модел на теорията UQLO. Нека да обобщим - изобразяваме клъстерите и елементите им в безкрайното двоично дърво. Клъстерите представяме като елементи на гъстото множество B без най-голям и най-малък елемент, а съответните им елементи изобразяваме по левия клон. Особеното тук е, че всички сравними клъстери, т.е. клъстери от една наребдба в обединението, са изобразени между два съседни елемента на индексното множество $B_I \subseteq B$.

Дефинираме свойството $F_{UQLO}[P, Q]$, приемащо истина, щом P и Q описват модел на UQLO, и лъжа - иначе. За целта, ще припомним следните формули:

1. $\psi_1[P, Q] = \forall z(P(z) \to Q(r_0(z)))$ - клъстерите са непразни множества
2. $\psi_3[P, Q] = \forall x \neg Q(r_1(x))$ - всеки елемент от квазилинейната наредба принадлежи на някой клъстер, на който, да кажем, отговаря върха $x$, откъдето на тях, образно казано, отговарят върхове от вида x00...0

3. $\psi_4[P,Q] = \forall x(Q(r_0(r_0(x))) \to Q(r_0(x)))$ - всеки връх от вида в точка 2, представящ елемент от клъстер $x$, по-малък лексикографски от най-големия връх в този клъстер, представя някой елемент

Тогава формулата

$$F_{UQLO}[P,Q] = (P \subseteq B \setminus B_I) \& \psi_1[P,Q] \& \psi_3[P,Q] \& \psi_4[P,Q]$$

описва дали множествата $P$ и $Q$ представят модел на UQLO.

## 4.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в езика $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$ на UQLO

Нека $\varphi$ е проиволна формула от теорията UQLO над монадичния език от втори ред със свободни променливи измежду $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$. Дефинираме формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ в теорията S2S с индукция по построението на $\varphi$:

$$\varphi \leftrightharpoons x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \leftrightharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \leftrightharpoons x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \leftrightharpoons \neg\exists x(B_I(x) \& x_i \leq^{lex} x \& x \leq^{lex} x_j) \& \forall x(P(x) \& x \leq^{lex} x_i \to x \leq^{lex} x_j)$$

$$\varphi \leftrightharpoons X_p(x_i) \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \leftrightharpoons X_p(x_i)$$

$$\varphi \leftrightharpoons \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \leftrightharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi \leftrightharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P,Q] \leftrightharpoons F^{\varphi_1}[P,Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi \leftrightharpoons \forall z\varphi_1 \,:\, F^{\forall z\varphi_1}[P,Q] \leftrightharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \leftrightharpoons \exists z\varphi_1 \,:\, F^{\exists z\varphi_1}[P,Q] \leftrightharpoons \exists z(Q(z) \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \leftrightharpoons \forall X\varphi_1 \,:\, F^{\forall X\varphi_1}[P,Q] \leftrightharpoons \forall X(X \subseteq Q \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \leftrightharpoons \exists X\varphi_1 \,:\, F^{\exists X\varphi_1}[P,Q] \leftrightharpoons \exists X(X \subseteq Q \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Тогава, взимайки предвид свободните променливи $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[x_1,\ldots,x_n]}[P,Q] \leftrightharpoons \forall y(X_1(y) \to Q(y)) \& \ldots \& \forall y(X_m(y) \to Q(y)) \& Q(x_1) \& \ldots \& Q(x_n) \& F^{\varphi}[P,Q])$$

над езика от втори ред.

## 4.4 Разрешимост на UQLO над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

**Твърдение 4.2.** *Нека $\varphi$ е формула в езика от втори ред на UQLO. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всеки най-много изброим модел на UQLO $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*

2. $\mathbb{T}_2 \models \forall P \forall Q(F_{UQLO}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$.

*Доказателство.* Тук ще следваме конструкцията на доказателството на **Твърдение 3.6.**. Нека $\varphi$ е формула от езика от втори ред на UQLO със свободни променливи измежду $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е най-много изброим модел на теорията UQLO. Нека P и Q са множествата от върхове в безкрайното двоично дърво, които описват $\mathscr{A}$ (P определя клъстерите, а Q - елементите в наредбите от обединението). За тях е изпълнена формулата $F_{UQLO}[P,Q]$. Нека $\tau : A/_{\sim} \to P$ и $\sigma : A \to Q$ са изображенията, които дефинирахме по-рано. Ще докажем, че

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi}[P,Q]$$

Първо, ще покажем, че за всеки набор на аргументи - подмножества $A_1,...,A_m \subseteq A$ и елементи $a_1,....,a_n \in A$, е вярно, че

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,...,A_m,a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],...,\sigma[A_m],\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$(*)$ Нека $a_1,...,a_n \in A$. Щом $Range(\sigma) \subseteq Q$, то $Q(\sigma(a_1))\,\&\,...\,\&\,Q(\sigma(a_n))$.
$(**)$ Нека $A_1,...,A_m \subseteq A$. Отново, щом $Range(\sigma) \subseteq Q$, то

$$\forall y(\sigma[A_1](y) \to Q(y))\,\&\,...\,\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \to Q(y)).$$

За доказателството на еквивалентността ще проведем индукция по построението на формулата $\varphi$:
$\bullet \varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j$. Тогава

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,...,A_m,a_1,...,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \models a_i \doteq a_j \overset{*}{\leftrightarrow}$$

$$\overset{*}{\leftrightarrow} \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\sigma(a_i)=\sigma(a_j)}[P,Q] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],...,\sigma[A_m],\sigma(a_1),...,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

* В обратната посока използваме, че функцията $\sigma$ е инекция.
$\bullet \varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$. Тук ще разгледаме внимателно и двете посоки.
$\Rightarrow$ Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,...,A_m,a_1,...,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models (x_i \leq_A x_j)[\![A_1,...,A_m,a_1,...,a_n]\!]$. Тогава, разбира се, $a_i \leq_A a_j$. Следователно, $a_i$ и $a_j$ се намират в клъстери, сравними помежду спрямо релацията $\preceq_A$. Нека това са $X_k$ и $X_l$ (съответно $X_k \preceq_A X_l$). Нека $a_i = (a_i)_p^k$ и $a_j = (a_j)_q^l$. Тогава по дефиниция $\sigma(a_i) = r_0^p(\tau(X_k))$ и $\sigma(a_j) = r_0^q(\tau(X_l))$. От дефиницията на $\tau$ и това, че $X_k \preceq_A X_l$, следва, че

$$\exists x(B_I(x101)\,\&\,x101 <^{lex} \tau(X_i) <^{lex} x1101\,\&\,x101 <^{lex} \tau(X_j) <^{lex} x1101)\,\&\,\tau(X_i) \leq^{lex} \tau(X_j)$$

Нека $x'$ е свидетел за това съществуване, т.е.

$$B_I(x'101)\,\&\,x'101 <^{lex} \tau(X_i) <^{lex} x'1101\,\&\,x'101 <^{lex} \tau(X_j) <^{lex} x'1101$$

Тогава щом $x'101 <^{lex} \tau(X_i) <^{lex} x'1101$, използвайки Лема 4.1, получаваме, че $x'101 <^{lex} r_0^p(\tau(X_i)) <^{lex} x'1101$. Аналогично, щом $x'101 <^{lex} \tau(X_j) <^{lex} x'1101$, то $x'101 <^{lex} r_0^q(\tau(X_j)) <^{lex}$

$x'1101$. Следователно, образите $\sigma(a_i)$ и $\sigma(a_j)$ се намират между два непосредствени съседи $x'101$ и $x'1101$ от индексното множество $B_I$, откъдето следва, че

$$\neg\exists x(B_I(x) \,\&\, \sigma(a_i) \leq^{lex} x \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_j))$$

От друга страна, нека $y \in T$ е такъв, че $P(y)$ и $y \leq^{lex} \sigma(a_i)$. Ще докажем, че $y \leq^{lex} \sigma(a_j)$. Щом $P(y)$, $y = \tau(X_t)$ за някое $t < \omega$, т.е. y е образът на някой клъстер по-малък или равен относно $\preceq_A$ на образа на клъстера, в който принадлежи $a_i$ - $X_k$. Следователно, $\tau(X_t) \leq^{lex} \tau(X_k)$ спрямо дефиницита на функцията $\tau$. Тогава

$$y = \tau(X_t) \leq^{lex} \tau(X_k) \leq^{lex} \tau(X_l) \leq^{lex} r_0^q(\tau(X_l)) = \sigma(a_j)$$

Така получихме, че

$$\mathbb{T}_2 \models \neg\exists x(B_I(x) \,\&\, \sigma(a_i) \leq^{lex} x \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_j)) \,\&\, \forall x(P(x) \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_i) \to x \leq^{lex} \sigma(a_j)), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_2 \models \neg\exists x(B_I(x) \,\&\, \sigma(a_i) \leq^{lex} x \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_j)) \,\&\, \forall x(P(x) \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_i) \to x \leq^{lex} \sigma(a_j))$. Нека $a_i \in X_k$ и $a_j \in X_l$, и $a_i = (a_i)_p^k$, и $a_j = (a_j)_q^l$. Трябва да докажем, че $X_k \preceq_A X_l$, откъдето следва желаното.

Да допуснем, че $\neg(X_k \sim X_l)$. От дефиницията на функцията $\tau$ получаваме, че

$$\exists x(B_I(x) \,\&\, ((\tau(X_k) \leq^{lex} x \leq^{lex} \tau(X_l)) \vee ((\tau(X_l) \leq^{lex} x \leq^{lex} \tau(X_k)))))$$

$$\xRightarrow{\text{Лема 4.1}} \exists x(B_I(x) \,\&\, ((\sigma(a_i) \leq^{lex} x \leq^{lex} \sigma(a_j)) \vee ((\sigma(a_j) \leq^{lex} x \leq^{lex} \sigma(a_i))))),$$

Което е противоречие.

Да допуснем, че $X_l \prec_A X_k$. Тогава $\tau(X_l) <^{lex} \tau(X_k)$. Щом $Range(\tau) \subseteq P$, $P(\tau(X_k))$. От друга страна, ясно е, че $\tau(X_k) \leq^{lex} r_0^p(\tau(X_k)) = \sigma(a_i)$. Следователно, от това, че $\mathbb{T}_2 \models \forall x(P(x) \,\&\, x \leq^{lex} \sigma(a_i) \to x \leq^{lex} \sigma(a_j))$, получаваме, че $\tau(X_k) \leq^{lex} \sigma(a_j)$. От друга страна, щом $\tau(X_l) <^{lex} \tau(X_k)$, от Лема 4.2 получаваме, че $\sigma(a_j) = r_0^q(\tau(X_l)) <^{lex} \tau(X_k)$, което е противоречие.

Окончателно, $X_k \preceq_A X_l$, откъдето $a_i \leq_A a_j$, т.е. $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$.

•$\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1$. Тук имаме следната зависимост

$$\mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \xleftrightarrow{\text{и.х.}} \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

$$\neg\mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \neg\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

$$\mathscr{A} \models \neg\varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models \neg F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

•$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2$, където $\varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$. Ще разгледаме само случая с дизюкция. Другите следват аналогично.

$$\mathscr{A} \models (\varphi_1 \vee \varphi_2)[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \text{ или } \mathscr{A} \models \varphi_2[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$$

$$\xleftrightarrow{\text{и.х.}} \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q] \text{ или } \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_2[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q] \vee F^{\varphi_2[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

•$\varphi \rightleftharpoons \exists x \varphi_1$. ($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\ldots,A_m,a_1,\ldots,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models \exists x \varphi_1[\![A_1,\ldots,A_m,a_1,\ldots,a_n]\!]$. Нека $a_0$ е свидетел за това съществуване, т.е. $\mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\ldots,A_m,a_0,a_1,\ldots,a_n]\!]$. От индуктивната хипотеза следва, че $\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_0),\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$. От това, че $Range(\sigma) \subseteq Q$, получаваме, че $\mathbb{T}_2 \models \exists z(Q(z) \,\&\, F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],z,\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$, т.е. $\mathbb{T}_2 \models F^{\exists x\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_2 \models F^{\exists x\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$, откъдето и $\mathbb{T}_2 \models \exists z(Q(z) \,\&\, F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],z,\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$. Нека $y$ е свидетел за това съществуване. От дефиницията на функцията $\sigma$ и същността на множеството $Q$ следва, че съществува елемент $a_0$ от наредбата $\mathscr{A}$ такъв, че $\sigma(a_0) = y$. Тогава от индуктивната хипотеза получаваме, че

$$\mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],y,\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q] \xleftrightarrow{\text{и.х.}} \mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\ldots,A_m,a_0,a_1,\ldots,a_n]\!]$$

$$\leftrightarrow \mathscr{A} \models \exists x \varphi_1[\![A_1,\ldots,A_m,a_1,\ldots,a_n]\!]$$

•$\varphi \rightleftharpoons \forall x \varphi_1$. //Следва от случаите $\varphi \rightleftharpoons \exists x \varphi_1$ и $\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1$//

•$\varphi \rightleftharpoons \exists X \varphi_1$. Нека $\mathscr{A} \models \exists X \varphi_1[\![A_1,\ldots,A_m,a_1,\ldots,a_n]\!]$. Нека $A_0$ е свидетел за това съществуване. Понеже $Range(\sigma) \subseteq Q$, $\sigma[A_0] \subseteq Q$. Следователно,

$$\mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_0,A_1,\ldots,A_m,a_1,\ldots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_0],\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models \exists X(X \subseteq Q \,\&\, F^{\varphi_1[\![X,\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\exists X\varphi_1[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q] \leftrightarrow \mathbb{T}_2 \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\ldots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

•$\varphi \rightleftharpoons \forall X \varphi_1$. //Следва от случаите $\varphi \rightleftharpoons \exists X \varphi_1$ и $\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1$// $\square$

# 5 Конкретни теории на дървовидни структури, подобни на квазилинейни наредби

Разглеждаме следната аксиоматика $G$ от първи ред:

1. $\forall x(x \leq_A x)$ (рефлексивност)
2. $\forall x \forall y \forall z(x \leq_A y \& y \leq_A z \to x \leq_A z)$ (транзитивност)
3. $\forall x \forall y \forall z(y \leq_A x \& z \leq_A x \to y \leq_A z \vee z \leq_A y)$
4. $\exists x \forall y(x \leq_A y)$

Нека означим с $M_1$ теорията на всички крайни модели на $G$ над монадичния език от втори ред с един двуместен предикатен символ $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$. Моделите на тази теория представляват крайни структури, в които клъстерите образуват дървовидна структура спрямо своята наредба $\preceq_A$, която за разлика от теориите FQLO и QLO вече не образува линейна наредба над клъстерите, т.е. е възможно два клъстера да бъдат несравними.

Друга характеристика на моделите е по какъв начин се раклоняват клъстерите. Досега моделите представляваха, образно казано, верига (или чуждо обединение на вериги) от клъстери, всеки два по която са сравними. Тук обаче от третата аксиома знаем, че не е възможно два несравними клъстера да са едновременно по-малко от трети, но е възможно два несравними клъстера да са по-големи от трети. С други думи, веригата може да се разклонява надолу.

Първата теория $M_1$, която въведохме по-горе, е съставена от крайните модели на аксиоматиката. Следващите теории, които ще разгледаме до края на тази работа са уголемени случаи на тази:

- Теорията $M_2$ най-много изброимите модели с най-малък клъстер, без гъсти части (от гледна точка на $\preceq_A$).

- Теорията $M_3$ на най-много изброимите модели без най-малък клъстер, без гъсти части (от гледна точка на $\preceq_A$)

- Теорията $_4$ на най-много изброимите чужди обединения на модели от теорията $M_3$ без гъсти части (от гледна точка на $\preceq_A$)

Тяхната подробна дефиниция е упомената непосредствено преди започване на работата с тях.

## 5.1 Теорията S2S

**Дефиниция 5.1.** *Нека $T_\omega = \omega^* = \{i \,|\, i < \omega\}^*$. Нека $\mathbb{T}_\omega = < T_\omega, \{r_i\}_{i<\omega}, \leq, \leq^{lex} >$. С $S\omega S$ бележим теорията от втори ред $Th_2(\mathbb{T}_\omega)$ над монадичния език със следните символи:*
*- $r_i$ - едноместни функционални символи, такива че за $i < \omega$, $r_i(x) = xi$.*
*- $\leq$ - двуместен предикатен символ, определящ наследник, т.е. $x \leq y$, ако $y = xz$ за*

*някое* $z \in T_\omega$.
- $\leq^{lex}$ - *лексикографската наредба над множеството* $T_\omega$*, индуцирана от естествената наредба над естествените числа* $\leq$.

$$\varphi \in S\omega S \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models \varphi$$

**Дефиниция 5.2.** *Множеството* $T_\omega = \omega^* = \{i \mid i < \omega\}^*$ *ще наричаме* $\omega$*-дърво.*

В езика от втори ред на теорията S2S бяхме включили само едноместните функционални символи $r_0$ и $r_1$, а бинарните релации $\leq$ (предшестване) и $\leq^{lex}$ (лексикографската наредба) изразихме чрез тях. В случая с теорията SωS, това е невъзможно, поради което ги включваме в езика.

Ще използваме резултата, до който достига Рабин в своята статия, а именно

**Твърдение 5.1.** *Теорията SωS над монадичния език от втори ред* $\mathscr{L}^{MSO}(\{r_i\}_{i<\omega}, \leq, \leq^{lex})$ *е разрешима.*

Ще си послужим с този факт при доказателството на четирите теории, които описахме по-рано.

## 5.2 Разрешимост на теорията $M_1$

Досега при решаване на проблема за разрешимост на теориите, които разглеждахме, винаги изобразявахме елементите на даден клъстер по нулевия клон на образа на клъстера. Ще продължим по този начин. За целта, ще дефинираме множеството $T_{zero}$ от всички върхове, които съдържат нула в записа си, т.е.

$$\exists X \forall x (\exists z (r_0(z) \leq x) \rightarrow X(x))$$

### 5.2.1 Изобразяване в безкрайното $\omega$-дърво

Отново ще се стремим да представим произволен модел на теорията $M_1$ чрез две множества $P$ и $Q$ от елементи на безкрайното $\omega$-дърво. Нека $\mathscr{A}_1$ е модел на $M_1$ с универсум $A_1$. Можем да си мислим, че $\mathscr{A}_1$ представлява крайно насочено дърво, чиито върхове са клъстерите. Щом е краен и свързан моделът, то има най-малък клъстер относно релацията $\preceq_A$, който се явява корен на дървото. Нека това бъде $R$. Тогава можем да дефинираме инекцията $\tau : A_1/_\sim \rightarrow T_\omega \setminus T_{zero}$, като:

1. $\tau(R) = \Lambda$;
2. $\forall X \forall Y \forall Z (Z \preceq_A X \& Z \preceq_A Y \rightarrow \tau(Z) \leq \tau(X) \& \tau(Z) \leq \tau(Y))$;
3. $\forall X \forall Y (X \preceq_A Y \leftrightarrow \tau(X) \leq \tau(Y))$.

Тогава множеството $P = Range(\tau)$ от елементи в $\omega$-дървото ще представлява образите на всички клъстери. Оттук можем да изобразим и елементите на всеки клъстер - именно като ги разположим по левия/нулевия клон, който запазихме, на върхаобраз на съответния клъстер. Следователно, нека $\sigma : A \to T_\omega$ - инекция, действаща по следния начин:

$$\sigma(x) = r_0^i(\tau(X)),$$

където $x$ е елемент в клъстера $X$ (клъстерите са крайни, следователно можем да номерираме елементите), а $i < \omega$. Тогава множеството $Q = Range(\sigma)$ от елементи на $\omega$-дървото ще представлява образите на всички елементи в универсума на модела.

**Лема 5.2.** *Нека $x, y \in T_\omega \setminus T_{zero}$ и $n < \omega$. Тогава*

$$(1)\ x <^{lex} y \to r_0^n(x) <^{lex} y \text{ и } (2)\ x <^{lex} r_0^n(y) \to x <^{lex} y$$

*Доказателство.* (1) Нека $x <^{lex} y$. Ако $x = zic$ и $y = zjd$, където $0 < i < j < \omega$ и $c, d \in T_\omega \setminus T_{zero}$, то, колкото и нули да добавим след x все ще имаме, че $r_0^n(x) <^{lex} y$. Ако $y = xjd$ (или $x < y$), то $r_0^n(x) <^{lex} y$, понеже $j > 0$.

(2) Нека $x <^{lex} r_0^n(y)$. Аналогично на (1), ако $x = zic$ и $y = zjd$, където $0 < i < j < \omega$ и $c, d \in T_\omega \setminus T_{zero}$, то, премахвайки нулите, $x$ ще продължи да е лексикографски преди $y$, понеже $i < j$. Ако $y = r_0^m(x)$, m<n, то □

### 5.2.2 Изразяване на моделите чрез множествата $P$ и $Q$

Дотук разгледахме как да представим конкретен модел на теорията $M_1$ в $\omega$-дървото. Как да представим тези модели с обща формула в езика на $S\omega S$ обаче? С други думи, ако имаме две множества от върхове, как да разберем дали те представят модел на теорията на $M_1$? Ще дефинираме формулата $F_{M_1}[P, Q]$, даваща отговор на този въпрос. Да разгледаме следните формули:

1. $\phi_1[P] = P \subseteq T_\omega \setminus T_{zero}$ - няма върхове, съдържащи 0, които да отговарят на някой клъстер.

2. $\phi_2[P] = Fin[P]$ - клъстерите са краен брой.

3. $\phi_3[P] = P(\Lambda)$ - има най-малък клъстер, който отъждествяваме с корена на $\omega$-дървото - $\Lambda$.

4. $\psi_1[P, Q] = \forall x(Q(x) \to \exists y(x = r_0(y) \& (Q(y) \vee P(y))))$ - елементите се намират по левия/нулевия клон на върха, отговарящ на съответния клъстер, като са плътно наредени един до друг.

5. $\psi_2[P, Q] = \forall x(P(x) \to Q(r_0(x)))$ - няма непразен клъстер.

6. $\psi_3[P, Q] = Fin[Q]$ - елементите са краен брой.

Тогава

$$F_{M_1}[P, Q] = \mathop{\&}_{i=1}^{3} \phi_i[P] \& \mathop{\&}_{i=1}^{3} \psi_i[P, Q]$$

### 5.2.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в $M_1$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

След като дефинираме еднозначното съответствие между моделите на теорията $M_1$ и две множества от върхове на $\omega$-дървото, можем да се фокусираме върху логическата еквивалентност на формулите над езика от втори ред на двете теории. За целта ще дефинираме формула $F^{\varphi}[P,Q]$, където $\varphi$ е формула от теорията $M_1$ над езика от втори ред с един предикатен символ $\{\leq_A\}$ със свободни променливи измежду $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$. Дефиницията, както досега. ще извършим с индукция по построението на $\varphi$:

$$\varphi = x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi = x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \forall x(P(x) \& x \leq x_i \to x \leq x_j)$$

$$\varphi = X_p(x_i) \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons X_p(x_i)$$

$$\varphi = \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi = \forall z \varphi_1 \,:\, F^{\forall z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \exists z \varphi_1 \,:\, F^{\exists z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z) \,\&\, F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \forall X \varphi_1 \,:\, F^{\forall X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall X(X \subseteq Q \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi = \exists X \varphi_1 \,:\, F^{\exists X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists X(X \subseteq Q \,\&\, F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Тогава, взимайки предвид свободните променливи $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[X_1,...,X_m,x_1,...,x_n]}[P,Q] \rightleftharpoons \forall y(X_1(y) \to Q(y)) \,\&\, ... \,\&\, \forall y(X_m(y) \to Q(y)) \,\&\, Q(x_1) \,\&\, ... \,\&\, Q(x_n) \,\&\, F^{\varphi}[P,Q])$$

над езика от втори ред.

### 5.2.4 Разрешимост на теорията $M_1$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

**Твърдение 5.3.** *Нека $\varphi$ е формула в езика от втори ред на теорията $M_1$. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всеки модел $\mathscr{A}$ на теорията $M_1$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*
2. $\mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_1}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$.

*Доказателство.* Нека $\varphi$ е формула от езика от втори ред на теорията $M_1$ със свободни променливи измежду $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е модел на теорията $M_1$. Нека P и Q са множествата от върхове в $\omega$-дървото, които описват $\mathscr{A}$ (P определя клъстерите, а Q - елементите). За тях е изпълнена формулата $F_{M_1}[P,Q]$. Нека $\tau : A_1/_\sim \to P$ и $\sigma : A_1 \to Q$ са изображенията, които дефинирахме по-рано. Ще докажем, че

$$\mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi}[P,Q]$$

Първо, ще покажем, че за всеки набор на аргументи - подмножества $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и елементи $a_1,\dots,a_n \in A$, е вярно, че

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

(*) Нека $a_1,\dots,a_n \in A$. Щом $Range(\sigma) = Q$, то $Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))$.

(**) Нека $A_1,\dots,A_m \subseteq A$. Отново, щом $Range(\sigma) = Q$, то

$$\forall y(\sigma[A_1](y) \to Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \to Q(y)).$$

За доказателството на еквивалентността ще проведем индукция по построението на формулата $\varphi$:

$\bullet \varphi = x_i \doteq x_j$. Тогава

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \models a_i \doteq a_j \xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}}$$

$$\xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}} \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\sigma(a_i)=\sigma(a_j)}[P,Q] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$\bullet \varphi = x_i \le_A x_j$. Ще разгледаме в двете посоки.

($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$, т.е. $a_i \le_A a_j$. Тогава имаме за клъстерите, в които участват $a_i$ и $a_j$, че $X_i \preceq_A X_j$. Тогава от третата точка от дефиницията на $tau$ следва, че $\tau(X_i) \le \tau(X_j)$. В такъв случай, ако $z = \tau(X)$ е такова, че $P(z)$ и $z \le \sigma(a_i)$, то $z = \tau(X) \le \tau(X_i) \le \tau(X_j)$. Тогава $z \le \sigma(a_j)$. Следователно,

$$\mathbb{T}_\omega \models \forall z(P(z)\&z \le \sigma(a_i) \to z \le \sigma(a_j)), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],y,\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma(A_1),\dots,\sigma(A_m),\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$, т.е. $\forall z(P(z)\&z \le \sigma(a_i) \to z \le \sigma(a_j))$. Тогава понеже $\tau(X_i)$ е такова, че $P(\tau(X_i))$ и $\tau(X_i) \le \sigma(a_i)$, то $\tau(X_i) \le \sigma(X_j)$. Но $\tau(X_i)$ е съставен само от естествени числа, различни от нула, докато $\sigma(X_j)$, завършва на нули. Тогава премахвайки тези нули ще се запази неравенството, т.е. $\tau(X_i) \le \tau(X_j)$. От трета точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $X_i \preceq_A X_j$, откъдето, разбира се, $a_i \le_A a_j$.

Съвършено аналогично следват и случаите за $\varphi = \neg\varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2$, за $\varsigma \in \{\vee,\&,\to,\leftrightarrow\}$, както в доказателството на **Твърдение 4.2.**

$\bullet \varphi = \exists x\varphi_1$. ($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models \exists x\varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,x,a_1,\dots,a_n]\!]$. Нека $a_0 \in A$ е свидетел за това съществуване, т.е. $\mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,0,a_1,\dots,a_n]\!]$. От индуктивното предположение за $\varphi_1$ следва, че $\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(0),\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$. Понеже $Q = Range(\sigma)$, $\mathbb{T}_\omega \models \exists z(Q(z)\&F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],z,\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$. Следователно, $\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$.

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_\omega \models F^{\exists x\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$, т.е. $\mathbb{T}_\omega \models \exists z(Q(z)\&F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],z,\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$. Нека $y \in T_\omega$ е свидетел за това съществуване. Щом $Q(y)$ и $Q = Range(\sigma)$, то $y = \sigma(a_0)$, за някое $a_0 \in A$. Тогава от индуктивната хипотеза получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi_1[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],y,\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q] \xleftrightarrow{\text{и.х.}} \mathscr{A} \models \varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_0,a_1,\dots,a_n]\!]$$

$$\leftrightarrow \mathscr{A} \models \exists x\varphi_1[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$$

Аналогично на горния случай и доказателството на **Твърдение 4.2.** получаваме и случаите за $\varphi = \forall x\varphi_1$, $\varphi = \exists X\varphi_1$ и $\varphi = \forall X\varphi_1$ □

## 5.3 Разрешимост на теорията $M_2$

В следващите редове ще разгледаме по-обощен вариант на теорията $M_1$. Там структурите бяха дървовидни, крайни, с най-малкъък клъстер и без гъсти части. В теорията $M_2$ ще разгледаме именно такива теории, които не са крайни. За целта, към аксиоматиката $G$ трябва да добавим още една формула, която ни гарантира, че нямаме гъсти части от клъстери относно наредбата им $\preceq_A$. Такава формула е неизразима в езика от първи ред, но в език от по-висок ред това е възможно. Ще я изразим в двата езика - слабия монадичен език от втори ред $\mathscr{L}^{WSO}(\leq_A)$ и монадичния език от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$. Тогава $M_2$ ще бъде теорията над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$ на класа от най-много изброимите модели на:

1. аксиоматиката $G+\varphi$, където $\varphi$ е следната формула от езика $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$:

$$\varphi := \forall x\exists X\forall y(y \leq_A x \to \exists z(y \leq_A z \& z \leq_A y \& X(z)))$$

2. аксиоматиката $G+\psi$, където $\psi$ е следната формула от езика $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$:

$$\psi := \forall x\exists X(\exists yX(y)\&\forall y(X(y) \to y \leq_A x) \to$$

$$\to \exists z_1\exists z_2(X(z_1)\&X(z_2)\&\forall y(X(y) \to z_1 \leq_A y \& y \leq_A z_2)))$$

Идеята на допълнителните формули е да ни осигури да нямаме гъсти части в структурата между клъстерите, т.е. от всеки клъсте до корена (най-малкия клъстер) да има само краен брой клъстери.

Основната разлика с предишната теория ($M_1$) се крие в това, че моделите са безкрайни. Тук дефинираме по съвършено същия начин формулите $\tau$ и $\sigma$ и ще имаме промяна само във формулата $F_{M_2}[P,Q]$, описваща дали две множества от върхове $\omega$-дървото, изразяваща се в това, че двете множества не е задължително да бъдат крайни.

Нека

1. $\phi_1[P] = P \subseteq T_\omega \setminus T_{zero}$ - няма върхове, съдържащи 0, които да отговарят на някой клъстер.

2. $\phi_3[P] = P(\Lambda)$ - има най-малък клъстер, който отъждествяваме с корена на $\omega$-дървото - $\Lambda$.

3. $\psi_1[P,Q] = \forall x(Q(x) \to \exists y(x = r_0(y)\&(Q(y) \vee P(y))))$ - елементите се намират по левия/нулевия клон на върха, отговарящ на съответния клъстер, като са плътно наредени един до друг.

4. $\psi_2[P,Q] = \forall x(P(x) \to Q(r_0(x)))$ - няма непразен клъстер.

Тогава
$$F_{M_2}[P,Q] = \phi_1[P]\&\phi_3[P]\&\psi_1[P,Q]\&\psi_2[P,Q]$$

Релативизацията на свойство $\varphi$ от теорията $M_2$ в теорията S$\omega$S е същата, както в крайния случай, т.е. ако $\varphi$ е формула от теорията $M_2$ над езика от втори ред с един предикатен символ $\{\leq_A\}$ със свободни променливи измежду $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$, то дефинираме формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ с индукция по построението на $\varphi$ така:

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \forall x(P(x)\&x \leq x_i \to x \leq x_j)$$
$$\varphi \rightleftharpoons X_p(x_i) \,:\, F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons X_p(x_i)$$
$$\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$
$$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1\varsigma\varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q]\varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$
$$\varphi \rightleftharpoons \forall z\varphi_1 \,:\, F^{\forall z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$
$$\varphi \rightleftharpoons \exists z\varphi_1 \,:\, F^{\exists z\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z)\,\&\,F^{\varphi_1}[P,Q])$$
$$\varphi \rightleftharpoons \forall X\varphi_1 \,:\, F^{\forall X\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall X(X \subseteq Q \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$
$$\varphi \rightleftharpoons \exists X\varphi_1 \,:\, F^{\exists X\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists X(X \subseteq Q\,\&\,F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Тогава, взимайки предвид свободните променливи $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n]}[P,Q] \rightleftharpoons \forall y(X_1(y) \to Q(y))\,\&\ldots\&\,\forall y(X_m(y) \to Q(y))\,\&\,Q(x_1)\,\&\ldots\&\,Q(x_n)\,\&\,F^{\varphi}[P,Q])$$

над езика от втори ред.

В такъв случай веднага получаваме следното твърдерние като следствие на крайния случай:

**Твърдение 5.4.** *Нека $\varphi$ е затворена формула над езика от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$ на теорията $M_2$. Тогава следните две са еквивалентни:*

1. *За всеки модел $\mathscr{A}$ на теорията $M_2$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*

2. $\mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_2}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$.

## 5.4 Разрешимост на теорията $M_3$

Както вече уточнихме, можем да си представим моделите дотук като насочени дървета без гъсти части, като върховете са клъстери (класове на еквивалентност относно $\sim$), а посоката е зададена относно релацията $\preceq_A$. Моделите на $M_1$ бяха крайни, а моделите на $M_2$, но с важното условие, че имаме най-малък клъстер (от 4. в аксиоматиката $G$). Следващата теория, която ще разгледаме, ще се откажем от наличието на най-малък клъстер. Тогава нямаме конкретен клъстер, който да изобразим в корена $\Lambda$.

Дефинираме теорията $M_3$ като теорията от втори ред на класа на всички най-много изброими модели на аксиоматиката $G-(4.)+\theta$, където $\theta$ е формула над езика от втори ред $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$, гарантираща ни липсата на гъсти части:

$$\theta := \forall x \forall y (x \leq_A y \to \forall X(\exists z X(z) \& \forall z (X(z) \to x \leq_A z \& z \leq_A y))$$

$$\to \exists z_1 \exists z_2 (X(z_1) \& X(z_2) \& \forall z (X(z) \to z_1 \leq_A z \& z \leq_A z_2)))$$

С други думи, между всеки два клъстера има краен брой клъстери.

Досега успяхме да изобразим моделите на $M_1$ и $_2$, които имат корен (най-малък клъстер относно $\preceq_A$). В общия случай, обаче такъв най-малък елемент няма.

В теорията на графите, ако разглеждаме неориентирани дървета, имаме следното

**Твърдение 5.5.** *Нека $G =< V, E >$ е неориентиран граф и $r \in V$. Тогава*

$$G \text{ е дърво} \leftrightarrow G' =< V, E, r > \text{ е кореново дърво}$$

С други думи, от дърво можем да получим кореново дърво, избирайки произволен връх за корен. В нашия случай работим с ориентирани дървета, над които можем да реализираме същото действие. Нека $\mathscr{A} \vDash M_3$ с универсум $A$. Нека $R$ е произволен клъстер относно $\sim$. Както разгледахме по-рано, моделите тук или поточно клъстерите, снабдени с $\preceq_A$, наподобяват на насочени дървета, като разклонения могат да се появят само надолу (т.е. със растене на клъстерите относно $\preceq_A$). С други думи, клъстерът $R$ има точно един непосредствен предшественик относно $\preceq_A$. Ако изберем $R$ за корен, в новополученото "кореново дърво" единият клон ще бъде с обратна посока, а останалите ще бъдат, както в изходното дърво. Така, полученото кореново дърво ще можем лесно да изобразим върху $\omega$-дървото, подобно на моделите на $M_2$, внимателно съобразявайки посоката на нарастване и намаляване спрямо релацията $\preceq_A$.

### 5.4.1 Изобразяване в безкрайното $\omega$-дърво

Нека разгледаме множеството $B_1 = \{\Lambda, 1, 11, 111, \ldots\}$, което можем да дефинираме със следната формула

$$\exists X (X(\Lambda) \& \forall x (X(x) \leftrightarrow X(r_1(x))) \& \forall x (X(x) \& x \neq \Lambda \to \exists y (x = r_1(y))))$$

Дефинираме инекцията $\tau : A/_{\sim} \to T_\omega \setminus T_{zero}$ по следния начин:

1. $\tau(R) = \Lambda$ - клъстерът, който избрахме за корен, ще изобразим, разбира се, в корена на $\omega$-дървото.

2. $\forall X(X \preceq_A R \leftrightarrow B_1(\tau(X)))$ - всеки клъстер по-малък от $R$ относно $\preceq_A$ (и никой друг) ще изобразим по елементите от множеството $B_1$.

3. $\forall X \forall Y(X \preceq_A R \& Y \preceq_A R \& X \preceq_A Y \leftrightarrow \tau(Y) \leq \tau(X) \& B_1(\tau(X)) \& B_1(\tau(Y)))$ - два клъстера, по-малки от $R$ и сравними помежду си, ще изобразим в обратна относно $\leq$ посока в $\omega$-дървото.

4. $\forall X \forall Y(Y \preceq_A X \& Y \preceq_A R \& \neg \exists Z(Z \preceq_A R \& Z \preceq_A X \& Y \prec_A Z) \leftrightarrow \tau(Y) \leq \tau(X) \& \neg(r_1(\tau(Y)) \leq \tau(X)) \& B_1(\tau(Y)))$ - наследниците относно $\preceq_A$ на клъстерите, по-малки от корена $R$ (като X), ще изобразяваме в $\omega$-дървото като наследници на $\tau(Y)$ по клоните, различни от нулевия и първия (т.е. по нулата и по единицита).

5. $\forall X \forall Y(\neg X \preceq_A R \& \neg Y \preceq_A R \& \neg R \preceq_A X \& \neg R \preceq_A Y \& X \preceq_A Y \leftrightarrow$
$\leftrightarrow \tau(X) \leq \tau(Y) \& \neg B_1(\tau(C_i)) \& \neg B_1(\tau(C_j)) \& 1 \leq \tau(X) \& 1 \leq \tau(Y))$
- образите на всеки два сравними помежду относно $\preceq_A$ клъстери, но несравними с корена $R$, запазват наредбата $\leq$.

6. $\forall X \forall Y(R \preceq_A X \& R \preceq_A Y \& X \preceq_A Y \leftrightarrow \tau(X) \leq \tau(Y) \& \neg(1 \leq \tau(X)) \& \neg(1 \leq \tau(Y)))$ - образите на всеки два сравними относно $\preceq_A$ клъстери запазват наредбата $\leq$.

**Наблюдение 1.** Нека $X$ и $Y$ са клъстери и $X \preceq_A Y$, $\neg(Y \preceq_A R)$ и

$$\neg \exists Z(Z \preceq_A R \& Z \preceq_A Y \& X \prec_A Z)$$

Тогава $\tau(X)$ е образ в $B_1$, а $Y$ непременно е изобразен в разклоненията на $\tau(X)$ по двойката или по-голямо. Следователно, ако функцията $\tau$ изобрази клъстер в разклонение на елемент от $B_1$, то и този елемент от $B_1$ трябва да е образ на клъстер.

Елементите на клъстерите в модела $\mathscr{A}$ на теорията $M_3$ ще изобразим, както досега - по нулевия клон на образа на клъстера, в който принадлежат. Моделите, които разглеждаме, са най-много изброими, откъдето следва, че можем да номерираме елементите във всеки клъстер. Тогава можем да дефинираме инекцията $\sigma : A \to T_\omega$, като $\sigma(x_i) = r_0^i(\tau(X))$, където $x_i$ е $i-$тият елемент в клъстера $X$.

### 5.4.2 Изразяване на моделите чрез множествата $P$ и $Q$

За да определим формула $F_{M_3}[P, Q]$, която ни връща дали две множества дефинират структура в $\omega$-дървото, ще използваме формулите, с които я дефинирахме за десегашните теории $M_1$ и $M_2$:

1. $\phi_1[P] = P \subseteq T_\omega \setminus T_{zero}$ - няма върхове, съдържащи 0, които да отговарят на някой клъстер.

2. $\phi_3[P] = P(\Lambda)$ - има най-малък клъстер, който отъждествяваме с корена на $\omega$-дървото - $\Lambda$.

3. $\psi_1[P,Q] = \forall x(Q(x) \to \exists y(x = r_0(y) \& (Q(y) \vee P(y))))$ - елементите се намират по левия/нулевия клон на върха, отговарящ на съответния клъстер, като са плътно наредени един до друг.

4. $\psi_2[P,Q] = \forall x(P(x) \to Q(r_0(x)))$ - няма празен клъстер.

Тогава

$$F_{M_3}[P,Q] = \phi_1[P] \& \phi_3[P] \& \psi_1[P,Q] \& \psi_2[P,Q]$$

### 5.4.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в $M_3$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

Нека да дефинираме формула, която да релативизира произволна формула над езика на теорията $M_3$. За удобство ще дефинираме следните формули в езика на $S\omega S$:

$$\tilde{B_1}[P,x] \rightleftharpoons \forall z(P(z) \& z \leq x \to B_1(z))$$

Тази формула ни дава дали $x$ принадлежи на клъстер, изобразен във връх от $B_1$.

$$SameBranch[P,x,y] \rightleftharpoons \forall z(P(z) \& B_1(z) \& z \leq y \to z \leq x) \& \forall z(P(z) \& z \leq x \to z \leq y)$$

Тази формула ни дава дали $x$ и $y$ се намират в разклонението по двойката или повече на елемент от $B_1$.

Нека $\varphi$ е формула над езика от втори ред с един предикате символ $\{\leq_A\}$ с със свободни променливи измежду $X_1,\dots,X_m,x_1,\dots,x_n$. Дефиницията ще извършим по построението на $\varphi$:

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \to, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall z \varphi_1 \,:\, F^{\forall z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists z \varphi_1 \,:\, F^{\exists z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z) \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall X \varphi_1 \,:\, F^{\forall X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall X(X \subseteq Q \to F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists X \varphi_1 \,:\, F^{\exists X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists X(X \subseteq Q \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Когато $\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$, за дефиницията на новата формула ще използваме следните формули:

$$\theta_1[P,Q,x,y] \rightleftharpoons \tilde{B_1}[P,x] \& \tilde{B_1}[P,y] \& y \leq^{lex} x$$

*елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери по-малки относно $\preceq_A$ от корена $R$.

$$\theta_2[P,Q,x,y] \rightleftharpoons \tilde{B_1}[P,x] \& 1 \leq y \& \neg\tilde{B_1}[P,y] \& \forall z(P(z) \& B_1(z) \& z \leq y \to z \leq x)$$

* елементът $x$ принадлежи на клъстер по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$, а елементът $y$ - на клъстер, който е несравним с корена $R$, но имат общ предшественик.

$$\theta_3[P,Q,x,y] \rightleftharpoons 1 \leq x \& \neg \tilde{B}_1[P,x] \& 1 \leq y \& \neg \tilde{B}_1[P,y] \& SameBranch[P,x,y] \& (x \leq^{lex} y \vee y \leq x)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери, които са несравними с корена $R$, но са наследници на клъстер, който е по-малък от него.

$$\theta_4[P,Q,x,y] \rightleftharpoons \tilde{B}_1[P,x] \& \neg(1 \leq y)$$

* елементът $x$ принадлежи на клъстер по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$, а елементът $y$ - на клъстер, който е наследник на корена.

$$\theta_5[P,Q,x,y] \rightleftharpoons \neg(1 \leq x) \& \neg(1 \leq y) \& (x \leq^{lex} y \vee y \leq x)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери, които са наследници на корена $R$ - проверката се осъществява както в случая с теорията $M_1$.

$$\theta_6[P,Q,x,y] \rightleftharpoons \forall z(P(z) \& z \leq x \to z \leq y) \& \forall z(P(z) \& z \leq y \to z \leq x)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на един и същи клъстер.

Така,

$$F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \bigvee_{k=1}^{6} \theta_k[P,Q,x_i,x_j]$$

Тогава, взимайки предвид свободните променливи $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$, дефинираме формулата

$$F^{\varphi[X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n]}[P,Q] \rightleftharpoons \forall y(X_1(y) \to Q(y)) \& \ldots \& \forall y(X_m(y) \to Q(y)) \& Q(x_1) \& \ldots \& Q(x_n) \& F^{\varphi}[P,Q])$$

над езика от втори ред.

### 5.4.4 Разрешимост на теорията $M_3$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

**Твърдение 5.6.** *Нека $\varphi$ е затворена формула в езика от втори ред на теорията $M_3$. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *За всеки модел $\mathscr{A}$ на теорията $M_3$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*
2. $\mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_3}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$.

*Доказателство.* Нека $\varphi$ е формула от езика от втори ред на теорията $M_3$ (т.е. с един предикатен символ $\{\leq_A\}$) със свободни променливи измежду $X_1,\ldots,X_m,x_1,\ldots,x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е модел на теорията $M_3$ и $P$ и $Q$ са множествата от върхове от $\omega$-дървото, които описват $\mathscr{A}$, като съответно $P$ описва клъстерите, $Q$ - елементите от универсума $A$. Тогава е вярна формулата $F_{M_3}[P,Q]$. Нека $\tau : A/_\sim \to T_\omega \setminus T_{zero}$ и $\sigma : A \to T_\omega$ са инекциите, които дефинирахме по-рано, където A е универсумът на модела $\mathscr{A}$ и $R \subseteq A$ е клъстерът, който избираме да бъде корен. Трябва да докажем следната еквивалентност:

$$(*)\ \mathscr{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \vDash F^\varphi[P,Q]$$

Унифицирайки, от нея получаваме

$$(\forall \mathscr{A} \vDash M_3)(\mathscr{A} \vDash \varphi) \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \vDash \forall P \forall Q (F_{M_3}[P,Q] \rightarrow F^\varphi[P,Q])$$

понеже всеки модел на $M_3$ определя инективно две множества $P$ и $Q$ и обратно.
За да докажем (*), трябва да проверим, че за всеки избор на аргументи $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$ е изпълнено, че:

$$\mathscr{A} \vDash \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \vDash \forall P \forall Q (F_{M_3}[P,Q] \rightarrow F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$$

Нека изберем $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, то

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \forall y(\sigma[A_1](y) \rightarrow Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \rightarrow Q(y))\,\&\,Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))\,\&\,F^\varphi[P,Q])$$

За доказателството ще проведем индукция по построението на формулата $\varphi$. Нека изберем $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, то

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \forall y(\sigma[A_1](y) \rightarrow Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \rightarrow Q(y))\,\&\,Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))\,\&\,F^\varphi[P,Q])$$

$\bullet \varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j$ : Тогава

$$\mathscr{A} \vDash \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \vDash a_i \doteq a_j \xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}}$$

$$\xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}} \mathbb{T}_\omega \vDash \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \vDash F^{\sigma(a_i)=\sigma(a_j)}[P,Q] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \vDash F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

$\bullet \varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$ : Ще разгледаме в двете посоки.

($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \vDash a_i \leq_A a_j$. Нека елементите $a_i$ и $a_j$ се намират съотвветно в клъстерите $C_i$ и $C_j$. Тогава $C_i \preceq_A C_j$. Тук ще разгледаме няколко случая в завимост от разположението на тези два клъстера спрямо корена R.

**1-ви случай.** Нека $C_i \preceq_A R$ и $C_j \preceq_A R$.
Според втора точка от дефиницията на фумкцията $\tau$ имаме, че $B_1(\tau(C_i))$ и $B_1(\tau(C_j))$, а оттам и $\tilde{B_1}[P,\sigma(a_i)]$ и $\tilde{B_1}[P,\sigma(a_j)]$. Също така щом $C_i \preceq_A R$, $C_j \preceq_A R$ и $C_i \preceq_A C_j$, то от трета точка от дефиницията на функцията $\tau$ следва, че $\tau(C_j) \leq \tau(C_i)$, откъдето и $\sigma(a_j) \leq^{lex} \sigma(a_i)$. Така получихме, че $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_1[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j)]$, откъдето $\mathbb{T}_\omega \vDash F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}$.

**2-ри случай.** Нека $C_i \preceq_A R$, $C_j$ и $R$ са несравними и $\neg\exists X(X \preceq_A C_j \& R \preceq_A X)$. Или иначе казано клъстерът $C_j$ е наследник на клъстер, по-малък относно $\preceq_A$ от корена R. Нека $D$ е най-големият относно $\preceq_A$ такъв клъстер относно $\preceq_A$, т.е. за него е изпълнено, че $D \preceq_A C_j$, $D \preceq_A R$ и . Ще разгледаме следните случаи:

**2.1.** Нека $C_i \preceq_A D$. Понеже $\preceq_A$ е транзитивна релация, имаме, че $C_i \preceq_A C_j$, т.е. този случай е възможен.
Щом $C_i \preceq_A R$ и $D \preceq_A R$, то е изпълнено, че $\tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)]$ и $B_1(\tau(D))$. Тогава $1 \leq \sigma(a_j)$. Също така щом $C_j$ и $R$ са несравними, то, разбира се, $\neg(C_j \preceq_A R)$, а от втората точка в дефиницията на $\tau$ ще следва, че $\neg(B_1(\tau(C_j)))$ и съответно $\neg(\tilde{B_1}[P, \sigma(a_j)])$. Така получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg \tilde{B_1}[P, \sigma(a_j)]$$

Нека $z \in T_\omega$ е такъв, че $P(z)$, $B_1(z)$ и $z \leq \sigma(a_j)$. Щом $P(z)$, то $z$ е образ на някой клъстер $E$ под действие на $\tau$, т.е. $z = \tau(E)$. Тогава от това, че $z \leq \sigma(a_j)$, т.е. $\tau(E) \leq \sigma(a_j)$, получаваме, че $\tau(E) \leq \tau(C_j)$. От това, че $D$ е най-големият клъстер, предшественик на $C_j$, който е по-малък от корена $R$, следва, че $\tau(D)$ е най-големият относно $\leq$ връх в $\omega$-дървото, който се намира в $B_1$ и е по-малък относно $\leq$ от $\tau(C_j)$. Следователно, $\tau(E) \leq \tau(D)$. Знаем, че $C_i \preceq_A R$, $D \preceq_A R$ и $C_i \preceq_A D$, и от точка три в дефиницията на $\tau$ следва, че $\tau(D) \leq \tau(C_i)$. Но също така, $\tau(E) \leq \tau(D)$, откъдето $\tau(E) \leq \tau(C_i)$. Следователно, $z = \tau(E) \leq \sigma(a_i)$. Тогава

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg \tilde{B_1}[P, \sigma(a_j)] \& \forall z (P(z) \& B_1(z) \& z \leq \sigma(a_j) \rightarrow z \leq \sigma(a_i)),$$

$$\text{т.е. } \mathbb{T}_\omega \vDash \theta_2[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$$

Така,

$$\mathbb{T}_\omega \vDash F^{\varphi[\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

**2.2.** Нека $D \preceq_A C_i$. Тогава $C_i$ и $C_j$ са несравними относно $\preceq_A$, понеже се намират в различни разклонения от клъстера $D$, което е противоречие.

**2.3.** Нека $D$ и $C_i$ са несравними относно $\preceq_A$. Това няма как да бъде възможно, понеже и двата клъстера са по-малки от корена $R$, а от третата аксиома в $G$ няма как да се разклони дървото в обратната на $\preceq_A$ посока.

**3-ти случай.** Нека $C_i$ и $R$ са несравними, $\neg \exists X (X \preceq_A C_i \& R \preceq_A X)$ и $C_j \preceq_A R$. Или иначе казано клъстерът $C_i$ е наследник на клъстер, по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$. Нека D е най-големият относно $\preceq_A$ такъв клъстер, т.е. за него е изпълнено, че $D \preceq_A C_i$ и $D \preceq_A R$. Отново ще разгледаме случаи.

**3.1.** Нека $D \prec_A C_j$. По същите съображения, както преди малко $C_i$ и $C_j$ са несравними относно $\preceq_A$, което е противоречие.

**3.2.** Нека $C_j \preceq_A D$. Тогава от това, че $D \preceq_A C_i$ и $\preceq_A$ е транзитивна релация, следва, че $C_j \preceq_A C_i$. Но $C_i \preceq_A C_j$, откъдето единствената възможност, която имаме е $C_i = C_j$. В такъв случай е изпълнена формула $\theta_6[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, откъдето

$$\mathbb{T}_\omega \vDash F^{\varphi[\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

**3.3.** Нека $C_j$ и $D$ са несравними. Това е невъзможен случай, тъй като и двата клъстера са по-малки от корена $R$, а от третата аксиома в $G$ няма как да се разклони дървото в обратната на $\preceq_A$ посока.

**4-ти случай.** Нека $C_i$ и $R$ са несравними, $\neg\exists X(X \preceq_A C_i \& R \preceq_A X)$, $C_j$ и $R$ са несравними и $\neg\exists X(X \preceq_A C_j \& R \preceq_A X)$. Тук клъстерите $C_i$ и $C_j$ са наследници на клъстери, по-малки относно $\preceq_A$ от корена $R$. Нека $D_i$ е най-големият клъстер, по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$, който е по-малък от $C_i$, и съответно $D_j$ е такъв за $C_j$. Тогава е изпълнено, че

$$\mathbb{T}_\omega \models 1 \leq \sigma(a_i) \& \neg\tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg\tilde{B_1}[P, \sigma(a_j)]$$

За да е изпълнено, че $C_i \preceq_A C_j$, трябва $D_i = D_j (= D)$. Тогава от четвърта точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $\tau(D) \leq \tau(C_i)$ и $\tau(D) \leq \tau(C_j)$, т.е. можем да кажем, че $\sigma(a_i)$ и $\sigma(a_j)$ се намират в един и същи клон на елемент от $B_1$ ($SameCluster[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$).
Също така от пета точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$.
Ако $C_i \neq C_j$, то $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$, понеже $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$.
Ако $C_i = C_j$, имаме две възможности - или отново $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$, или $\sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$.
Следователно,

$$\mathbb{T}_\omega \models 1 \leq \sigma(a_i) \& \neg\tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg\tilde{B_1}[P, \sigma(a_j)] \& SameCluster[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j)] \&$$

$$\&(\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)),$$

$$\text{т.е. } \mathbb{T}_\omega \models \theta_3[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$$

Така,

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

**5-ти случай.** Нека $R \preceq_A C_i$ и $\neg(R \preceq_A C_j)$. Тогава $C_i$ и $C_j$ или са несравними (ако $C_j$ е в клон на някой клъстер по-малък от корена), или $C_j \prec_A C_i$ (ако $R \prec_A C_j$), което е протиречие.

**6-ти случай.** Нека $\neg(R \preceq_A C_i)$ и $R \preceq_A C_j$.
Ако $\neg(C_i \preceq_A R)$, то $\neg(C_i \preceq_A C_j)$, което е протиречие. Затова нека $C_i \preceq_A R$. Тогава от втората точка от дефиницията на $\tau$ ще имаме, че $B_1(\tau(C_i))$, а оттам и $\tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)]$.
Ако $C_j = R$, то $\tau(C_j) = \tau(R) = \Lambda$. Тогава $\neg(1 \leq \tau(C_j))$, откъдето ще бъде изпълнена формула $\theta_4[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$.
Нека $C_j \neq R$, т.е. $R \prec_A C_j$. Ако допуснем, че $1 \leq \tau(C_j)$, то от обратната посока в четвърта точка от дефиницията на $\tau$ ще следва, че върхът $D$ от $B_1$, в чиито клони се намира $\tau(C_j)$, е образ на клъстер, по-малък от корена. В такъв случай клъстерът $C_j$ ще е наследник на $D$ относно $\preceq_A$, което е в протичоречие с условието. Следователно, $1 \leq \tau(C_j)$. Така получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \models \tilde{B_1}[P, \sigma(a_i)] \& \neg(1 \leq \sigma(a_j)),$$

$$\text{т.е. } \mathbb{T}_\omega \models \theta_4[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$$

Следователно,

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1], \ldots, \sigma[A_m], \sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

**7$^{\text{-ми}}$ случай.** Нека $R \preceq_A C_i$ и $R \preceq_A C_j$. Тук и двата клъстера са наследници на корена $R$. От дефинициите на $\tau$ и $\sigma$ следва, че $\neg(1 \leq \sigma(a_i))$ и $\neg(1 \leq \sigma(a_j))$. Също така, подобно на случая с теориите $M_1$ и $M_2$ можем да кажем, че $\sigma(a_i) \leq \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$, откъдето

$$\mathbb{T}_\omega \models \neg(1 \leq \sigma(a_i)) \& \neg(1 \leq \sigma(a_j)) \& \sigma(a_i) \leq \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i),$$

$$\text{т.е. } \mathbb{T}_\omega \models \theta_5[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$$

Следователно,

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

Окончателно, във всички случаи получихме, че

$$\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$$

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P, Q]$. Тогава

$$\mathbb{T}_\omega \models \bigvee_{k=1}^{6} \theta_k[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$$

По построението на формулите $\theta_k$, за $1 \leq k \leq 5$, те са взаимно изключващи се, а $\theta_6$ разглежда случая, когато $a_i$ и $a_j$ се намират в един и същи клъстер, откъдето, разбира се, следва, че $a_i \leq_A a_j$. Затова ще разгледаме всяка $\theta_k$, $1 \leq k \leq 5$, самостоятелно.

- Нека $\mathbb{T}_\omega \models \theta_1[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, т.е. $\mathbb{T}_\omega \models \tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)] \& \tilde{B}_1[P, \sigma(a_j)] \& \sigma(a_j) \leq^{lex} \sigma(a_i)$. От една страна, имаме, че $B_1(\tau(C_i))$ и $B_1(\tau(C_j))$. От друга страна, имаме следната зависимост:

$$\tau(C_j) \leq^{lex} r_0^q(\tau(C_j)) \leq^{lex} r_0^p(\tau(C_i))$$

Знаем, че $\tau(C_j)$ не съдържа нули, понеже $Range(\tau) \subseteq T_\omega \setminus T_{zero}$. Също така $\sigma(a_j)$ е от вида $\tau(C_i)00\dots0$. Следователно,

$$\tau(C_j) \leq^{lex} \tau(C_i)$$

Щом $B_1(\tau(C_i))$ и $B_1(\tau(C_j))$, то $\tau(C_i)$ и $\tau(C_j)$ представляват редици, съставени само от единици, т.е. едната е префикс на другата. В случая, $\tau(C_j) \leq \tau(C_i)$. Тогава от трета точка от дефиницията на $\tau$, получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$, откъдето и $a_i \leq_A a_j$.

- Нека $\mathbb{T}_\omega \models \theta_2[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, т.е.
$\mathbb{T}_\omega \models \tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg\tilde{B}_1[P, \sigma(a_j)] \& \forall z(P(z) \& B_1(z) \& z \leq \sigma(a_j) \to z \leq \sigma(a_i))$. Нека изберем $y \in T_\omega$ такова, че $B_1(y)$ и $y \leq \sigma(a_j)$, и

$$(\star)\ \neg\exists z(B_1(z) \& y \leq z \& z \leq \sigma(a_j))$$

От **Наблюдение 1.** следва, че $y$ е образ на клъстер. Нека $y = \tau(D)$. Тогава $P(y)$. Следователно, от допускането ни получаваме, че $y \leq \sigma(a_i)$, а оттам и $\tau(D) \leq \tau(C_i)$. Така, щом $\tau(D) \leq \tau(C_i)$, $B_1(\tau(D))$ и $B_1(\tau(C_i))$, то от третата точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $C_i \preceq_A D$ **(1)**.

Също така имаме следните наблюдения:

1. $B_1(\tau(D))$ по избора на $y$.

2. $\tau(D) \leq \sigma(a_j)$ по избора на $y$, откъдето $\tau(D) \leq \tau(C_j)$.

3. Ако $r_1(\tau(D)) \leq \tau(C_j)$, то $B_1(r_1(\tau(D)))$, $\tau(D) \leq r_1(\tau(D))$ и $r_1(\tau(D)) \leq \sigma(a_j)$. Но това е противоречие с $(\star)$. Следователно, $\neg(\tau(D) \leq \sigma(a_j))$.

Тогава от тези три наблюдения и четвърта точка от дефиницията на функцията $\tau$ следва, че $D \preceq_A C_j$ **(2)**. Следователно, от **(1)** и **(2)** получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$.

- Нека $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_3[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \vDash 1 \leq \sigma(a_i) \& \neg\tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)] \& 1 \leq \sigma(a_j) \& \neg\tilde{B}_1[P, \sigma(a_j)] \& SameBranch[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j)] \&$$

$$\& (\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i))$$

От това, че $\neg\tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)]$ и $\neg\tilde{B}_1[P, \sigma(a_j)]$ следва, че $\neg B_1(\tau(C_i))$ и $\neg B_1(\tau(C_j))$.
Ако $\sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$, то $a_i$ и $a_j$ се намират в един и същи клъстер, откъдето $a_i \leq_A a_j$.
Ако $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$, то $\tau(C_i) \leq^{lex} \tau(C_j)$. Щом $SameCluster[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, то елементите $\sigma(a_i)$ и $\sigma(a_j)$ се намират в разклонението на един и същи връх от множеството $B_1$. Следователно, $1 \leq \sigma(a_i)$ и $1 \leq \sigma(a_j)$, а оттам $1 \leq \tau(C_i)$ и $1 \leq \tau(C_j)$. Така, от пета точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$.

- Нека $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_4[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)] \& \neg(1 \leq \sigma(a_j))$$

Тук ще се възползваме от факти за $\Lambda$:

1. Знаем, че $\Lambda \leq x$ за всяко $x \in T_\omega$. Тогава $\Lambda = \tau(R) \leq \tau(C_j)$.

2. Имаме, че $r_1(\tau(R)) = r_1(\Lambda) = 1$. Тогава щом $\neg(1 \leq \sigma(a_j))$, то $\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(C_j))$.

3. Знаем, че $\tau(R) = \Lambda$ по първа точка от дефиницията на $\tau$. Тогава $B_1(\tau(R))$.

Следователно, по четвърта точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $R \preceq_A C_j$ **(1)**.
От друга страна, по допускане имаме, че $\tilde{B}_1[P, \sigma(a_i)]$. Следователно, $B_1(\tau(C_i))$, откъдето по втора точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A R$ **(2)**.
Окончателно, от **(1)** и **(2)** следва, че $C_i \preceq_A C_j$.

- Нека $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_5[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \neg(1 \leq \sigma(a_i)) \& \neg(1 \leq \sigma(a_j)) \& (\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i))$$

Ако е изпълнено, че $\sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$, както вече сме уточнявали, $a_i$ и $a_j$ са в един и същи клъстер, откъдето $a_i \leq_A a_j$. Затова нека $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$.
Щом $\neg(1 \leq \sigma(a_i)) \& \neg(1 \leq \sigma(a_j))$, то $\neg(1 \leq \tau(C_i)) \& \neg(1 \leq \tau(C_j))$. От друга страна, щом $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$, то $\tau(C_i) \leq^{lex} \tau(C_j)$. Следователно, от шеста точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $C_i \preceq_A C_j$.

Окончателно, във всички случаи за формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ получаваме, че $a_i \leq_A a_j$. Следователно, изпълнена и обратната посока.

Случаите за $\varphi = \neg\varphi_1$ и $\varphi = \varphi_1 \varsigma \varphi_2$ за $\varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ следват напълно аналогично, както в доказателството на **Твърдение 6.**
Случаите $\varphi = \exists x \varphi_1$ и $\varphi = \exists X \varphi_1$ отново следват, както в доказателството на **Твърдение 6.**, понеже и тук $Range(\sigma) = Q$.
Случаите $\varphi = \forall x \varphi_1$ и $\varphi = \forall X \varphi_1$ следват от случаите $\varphi = \neg\varphi_1$, $\varphi = \exists x \varphi_1$ и $\varphi = \exists X \varphi_1$. □

## 5.5 Разрешимост на теорията $M_4$

Можем да си представим моделите на теорията $M_4$ като обединение на непресичащи се модели на теорията $M_3$, която в предната точка видяхме, че е разрешима. Нека $\mathscr{A} \models M_4$ с универсум $A = \cup_{i \leq \alpha} A_i$, където $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Ако си представим модела $A$ като граф (или, по-точно, насочено дърво), парчетата $A_i$ всъщност са компонентите на свързаност в този граф. Моделите на теорията $M_4$ са най-много изброими, откъдето следват следните факти:

**Факт 1.** Моделът $\mathscr{A}$ е най-много изброимо обединение ($\alpha \leq \omega$) на непресичащи се модели на теорията $M_3$.

**Факт 2.** Клъстерите относно релацията $\sim$ са най-много изброимо много и всеки от тях има най-много изброимо много непосредствени наследници относно релацията $\preceq_A$ също както върховете в $\omega$-дървото.

**Факт 3.** Елементите във всеки клъстер са най-много изброимо много.

Вече видяхме как да изобразим моделите на теорията $M_3$ в $\omega$-дървото. Сега ще избразим изброимо много такива модели. За целта, нека изберем по един клъстер от всяка компонента или нека $K = \{R_i\}_{i \leq \alpha}$, където $R_i \subseteq A_i$. Нека $\tilde{K}$ е множеството от всички върхове, наследници на корена на $\omega$-дървото, т.е. $K = \{1, 2, 3, \ldots\}$, което ще дефинираме със следната формула

$$\exists K[\neg K(\Lambda) \& \forall x(0 \leq x \rightarrow \neg K(x)) \& \forall x(\neg(0 \leq x) \rightarrow \exists y(K(y) \& y \leq x)) \&$$

$$\& \neg(\exists x \exists y(K(x) \& K(y) \& (x \leq y \vee y \leq x)))]$$

### 5.5.1 Изобразяване в безкрайното $\omega$-дърво

Отново ще дефинираме инекциите $\sigma$ и $\tau$, указващи ни съответствието между моделите на $M_4$ и $\omega$-дървото. За улеснение ще въведем следните формули:

1. $RSuccessor1[x,r] \rightleftharpoons r \leq x \& \forall y(y \leq x \& y \neq \Lambda \& y \neq r \rightarrow \exists z(y = r_1(z)))$, която ни дава дали $x$ е от вида $r11\ldots1$.

2. $ElementRSuccessor1[P,x,r] \rightleftharpoons \forall z(P(z) \& z \leq x \rightarrow RSuccessor1[x,r])$, която ни дава дали $x$ е елемент на клъстер по-малък от корена $r$.

3. $SameBranch[P,x,y,r] \rightleftharpoons \forall z(P(z)\&RSuccessor1[z,r]\&z \leq y \to z \leq x)\&\forall z(P(z)\&z \leq x \to z \leq y$, която ни дава дали $x$ и $y$ са елементи на клъстери, които са в разклоненията на един и същи клъстер, по-малък от корена $r$.

Нека дефинираме инекцията $\tau : A/_\sim \to T_\omega \setminus (T_{zero} \cup \{\Lambda\})$ по следния начин, който е идентичен със строежа на тази функция в случая с тероията $M_3$:

1. $\tau[K] \subseteq \tilde{K}$ - клъстерите, които избрахме за корени на всяка компонента, ще изобразим в непосредствените върхове-наследници на корена $\Lambda$ на $\omega$-дървото, а именно $1,2,3,\ldots$

2. $\forall X \forall R(K(R)\&X \preceq_A R \leftrightarrow RSuccessor1[\tau(X),\tau(R)]\&\tilde{K}(\tau(R)))$ - всеки клъстер по-малък относно $\preceq_A$ от някой избор за корен $R$ ще изобразим сред върховете от вида $\tau(R)11\ldots1$, т.е. по клона на единицата от образа на $R$.

3. $\forall X \forall Y \forall R(K(R)\&X \preceq_A R\&Y \preceq_A R\&X \preceq_A Y \leftrightarrow \tau(Y) \leq \tau(X)\&RSuccessor1[\tau(X),\tau(R)]\& RSuccessor1[\tau(X),\tau(R)]\&\tilde{K}(\tau(R))$ - два клъстера, по-малки от някой избор за корен $R$ и сравними помежду си, ще изобразим в обратна относно $\leq$ посока в $\omega$-дървото.

4. $\forall X \forall Y \forall R(K(R)\&Y \preceq_A X\&Y \preceq_A R\&\neg\exists Z(Z \preceq_A R\&Z \preceq_A X\&Y \prec_A Z) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \tau(Y) \leq \tau(X)\&\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(X))\&RSuccessor1[\tau(Y),\tau(R)])$ - наследниците относно $\preceq_A$ (като X) на клъстерите, по-малки от някой избор за корен $R$, ще изобразяваме в $\omega$-дървото като наследници на $\tau(Y)$ по клоните, различни от нулевия и първия (т.е. по нулата и по единицита).

5. $\forall X \forall Y \forall R(K(R)\&\neg(X \preceq_A R)\&\neg(R \preceq_A X)\&\neg(Y \preceq_A R)\&\neg(R \preceq_A Y)\&X \preceq_A Y \leftrightarrow$ $\tau(X) \leq \tau(Y)\&\neg RSuccessor1[\tau(X),\tau(R)]\&\neg RSuccessor1[\tau(Y),\tau(R)]\&\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(X))$ $\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(Y)))$ - образите на всеки два сравними относно $\preceq_A$ клъстери запазват наредбата $\leq$ (с изключение на клъстерите, по-малки от всеки избран за корен клъстер $R$, които описахме в точка 2, че обръщат посоката).

6. $\forall X \forall Y \forall R(K(R)\&R \preceq_A X\&R \preceq_A Y\&X \preceq_A Y \leftrightarrow$ $\leftrightarrow \tau(X) \leq \tau(Y)\&\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(X))\&\neg(r_1(\tau(R)) \leq \tau(Y))$ - образите на всеки два сравними относно $\preceq_A$ клъстери, по-големи от корена R, запазват наредбата $\leq$.

Дефинираме и инекцията $\sigma : A \to T_\omega$, като $\sigma(x) = r_0^i(\tau(X))$, където $x$ е $i$-тият елемент в клъстера X (използваме **Факт 3.**).

### 5.5.2 Изразяване на моделите на $M_4$ чрез множествата $P$ и $Q$

Аналогично, ще дефинираме и формулата $F_{M_4}[P,Q]$, изразяваща дали двете множества $P$ и $Q$ означават модел на теорията $M_4$. Нека

1. $\phi_1[P] = P \subseteq T_\omega \setminus T_{zero}$ - няма върхове, съдържащи 0, които да отговарят на някой клъстер.

2. $\neg\phi_3[P] = \neg P(\Lambda)$ - няма най-малък клъстер, който отъждествяваме с корена на $\omega$-дървото - $\Lambda$.

3. $\phi_4[P] = \forall x \forall r(P(x) \& K(r) \& r \leq x \rightarrow P(r))$ - всеки един образ на клъстер е наследник на елемент от множеството $K$

4. $\psi_1[P,Q] = \forall x(Q(x) \rightarrow \exists y(x = r_0(y) \& (Q(y) \vee P(y))))$ - елементите се намират по левия/нулевия клон на върха, отговарящ на съответния клъстер, като са плътно наредени един до друг.

5. $\psi_2[P,Q] = \forall x(P(x) \rightarrow Q(r_0(x)))$ - няма празен клъстер.

Тогава

$$F_{M_4}[P,Q] = \phi_1[P] \& \neg\phi_3[P] \& \phi_4[P] \& \psi_1[P,Q] \& \psi_2[P,Q]$$

### 5.5.3 Релативизация на свойство $\varphi$ в $M_4$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

Нека $\varphi$ е формула над езика от втори ред с един предикатен символ $\{\leq_A\}$ със свободни променливи измежду $X_1,...,X_m,x_1,...,x_n$. Дефиницията на формулата $F^{\varphi}[P,Q]$ е напълно идентична с тази в случая с теорията $M_3$ с разлика в случая, когато $\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$. Разгледахме различни случаи за положението на елементите $x_i$ и $x_j$ в $\omega$-дървото, но там работихме само с едно дърво, чийто корен изобразихме в $\Lambda$. Тук, за да бъдат изобщо сравними елементите $x_i$ и $x_j$, те трябва да бъдат част от едно и също дърво, т.е. трябва да имат общ префикс от множеството $\tilde{K}$. Ако това условие е изпълнено, проверката оттам нататък съвпада с тази от случая с теорията $M_3$. Тогава

$$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j \,:\, F^{x_i \doteq x_j}[P,Q] \rightleftharpoons x_i = x_j$$

$$F^{x_i \leq_A x_j}[P,Q] \rightleftharpoons \exists r[\tilde{K}(r) \& r \leq x \& r \leq y \& \bigvee_{k=1}^{5} \theta_k[P,Q,x_i,x_j,r]]$$

$$\varphi \rightleftharpoons \neg\varphi_1 \,:\, F^{\neg\varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \neg F^{\varphi_1}[P,Q]$$

$$\varphi \rightleftharpoons \varphi_1 \varsigma \varphi_2 \,:\, F^{\varphi_1 \varsigma \varphi_2}[P,Q] \rightleftharpoons F^{\varphi_1}[P,Q] \varsigma F^{\varphi_2}[P,Q], \text{ където } \varsigma \in \{\vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow\}$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall z \varphi_1 \,:\, F^{\forall z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall z(Q(z) \rightarrow F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists z \varphi_1 \,:\, F^{\exists z \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists z(Q(z) \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \forall X \varphi_1 \,:\, F^{\forall X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \forall X(X \subseteq Q \rightarrow F^{\varphi_1}[P,Q])$$

$$\varphi \rightleftharpoons \exists X \varphi_1 \,:\, F^{\exists X \varphi_1}[P,Q] \rightleftharpoons \exists X(X \subseteq Q \& F^{\varphi_1}[P,Q])$$

Където

$$\theta_1[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons ElementRSuccessor1[P,x,r] \& ElementRSuccessor1[P,y,r] \& y \leq^{lex} x$$

*елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери по-малки относно $\preceq_A$ от корена $R$.

$$\theta_2[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons ElementRSuccessor1[P,x,r]\&r_1(r) \leq y\&\neg ElementRSuccessor1[P,y,r]\&$$

$$\&\forall z(P(z)\&RSuccessor1[z,r]\&z \leq y \to z \leq x)$$

* елементът $x$ принадлежи на клъстер по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$, а елементът $y$ - на клъстер, който е несравним с корена $R$, но имат общ предшественик.

$$\theta_3[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons r_1(r) \leq x\&\neg ElementRSuccessor1[P,x,r]\&r_1(r) \leq y\&\neg ElementRSuccessor1[P,y,r]\&$$

$$\&SameBranch[P,x,y,r]\&(x \leq^{lex} y \vee y \leq x)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери, които са несравними с корена $R$, но са наследници на клъстер, който е по-малък от него.

$$\theta_4[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons ElementRSuccessor1[P,x,r]\&\neg(r_1(r) \leq y)$$

* елементът $x$ принадлежи на клъстер по-малък относно $\preceq_A$ от корена $R$, а елементът $y$ - на клъстер, който е наследник на корена.

$$\theta_5[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons \neg(r_1(r) \leq x)\&\neg(r_1(r) \leq y)\&(x \leq^{lex} y \vee y \leq x)\&\forall z(P(z)\&z \leq x \to z \leq y)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на клъстери, които са наследници на корена $R$ - проверката се осъществява както в случая с теорията $M_1$.

$$\theta_6[P,Q,x,y,r] \rightleftharpoons \forall z(P(z)\&z \leq x \to z \leq y)\&\forall z(P(z)\&z \leq y \to z \leq x)$$

* елементите $x$ и $y$ принадлежат на един и същи клъстер.

### 5.5.4 Разрешимост на теорията $M_4$ над $\mathscr{L}^{MSO}(\leq_A)$

**Твърдение 5.7.** *Нека $\varphi$ е формула от езика от втори ред на теорията $M_4$. Тогава следните са еквивалентни:*

1. *За всеки модел $\mathscr{A}$ на теорията $M_4$, $\mathscr{A} \models \varphi$.*
2. $\mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_4}[P,Q] \to F^\varphi[P,Q])$

*Доказателство.* Нека $\varphi$ е формула от езика от втори ред на теорията $M_4$ (т.е. с един предикатен символ $\{\leq_A\}$) със свободни променливи измежду $X_1,\dots,X_m,x_1,\dots,x_n$. Нека $\mathscr{A}$ е модел на теорията $M_4$ и $P$ и $Q$ са множествата от върхове от $\omega$-дървото, които описват $\mathscr{A}$, като съответно $P$ описва клъстерите, $Q$ - елементите от универсума $A$. Тогава е вярна формулата $F_{M_4}[P,Q]$. Нека $\tau : A/_\sim \to T_\omega \setminus T_{zero}$ и $\sigma : A \to T_\omega$ са инекциите, които дефинирахме по-рано, където $A = \cup_{i\leq\alpha} A_i$ е универсумът на модела $\mathscr{A}$ и $K = \{R_i\}_{i\leq\alpha}$ са клъстерите, които избираме да бъдат корени. Трябва да докажем следната еквивалентност:

$$(*)\ \mathscr{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^\varphi[P,Q]$$

Унифицирайки, от нея получаваме

$$(\forall \mathscr{A} \models M_4)(\mathscr{A} \models \varphi) \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_4}[P,Q] \to F^{\varphi}[P,Q])$$

понеже всеки модел на $M_3$ определя инективно две множества $P$ и $Q$ и обратно. За да докажем (*), трябва да проверим, че за всеки избор на аргументи $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$ е изпълнено, че:

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models \forall P \forall Q(F_{M_4}[P,Q] \to F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q])$$

Нека изберем $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, то

$$\mathbb{T}_\omega \models \forall y(\sigma[A_1](y) \to Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \to Q(y))\,\&\,Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))\,\&\,F^{\varphi}[P,Q])$$

За доказателството ще проведем индукция по построението на формулата $\varphi$. Нека изберем $A_1,\dots,A_m \subseteq A$ и $a_1,\dots,a_m \in A$. Тогава щом $Q = Range(\sigma)$, то

$$\mathbb{T}_\omega \models \forall y(\sigma[A_1](y) \to Q(y))\,\&\dots\&\,\forall y(\sigma[A_m](y) \to Q(y))\,\&\,Q(\sigma(a_1))\,\&\dots\&\,Q(\sigma(a_n))\,\&\,F^{\varphi}[P,Q])$$

•$\varphi \rightleftharpoons x_i \doteq x_j$ : Тогава

$$\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!] \leftrightarrow \mathscr{A} \models a_i \doteq a_j \xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}}$$

$$\xleftrightarrow{\sigma \text{ е инекция}} \mathbb{T}_\omega \models \sigma(a_i) = \sigma(a_j) \leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\sigma(a_i)=\sigma(a_j)}[P,Q] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$$

•$\varphi \rightleftharpoons x_i \leq_A x_j$ : Ще разгледаме в двете посоки.

($\Rightarrow$) Нека $\mathscr{A} \models \varphi[\![A_1,\dots,A_m,a_1,\dots,a_n]\!]$, т.е. $\mathscr{A} \models a_i \leq_A a_j$. Нека $a_i$ и $a_j$ се намират съответно в клъстерите $C_i$ и $C_j$. Тогава $C_i \preceq_A C_j$. Нека $a_i, a_j \in A_k$. Нека $R_k$ е изборът за корен (т.е. $K(R_k)$). Тогава $\tilde{K}(\tau(R_k))$ от първа точка от дефиницията на $\tau$. Ще разгледаме случаи, като във всеки от тях ние изобразяваме елементите $a_i$ и $a_j$ във върхове с общ предшественик относно $\leq$ - $\tau(R_k)$, т.е. $\tau(R_k) \leq \sigma(a_i)$ и $\tau(R_k) \leq \sigma(a_j)$. **1-ви случай.** Нека $C_i \preceq_A R_k$ и $C_j \preceq_A R_k$. Тогава от трета точка от дефиницията на функцията $\tau$ получаваме, че

$$RSuccessor1[\tau(C_i),\tau(R_k)], RSuccessor1[\tau(C_j),\tau(R_k)] \text{ и } \tau(C_j) \leq \tau(C_i),$$

откъдето, позовавайки се на факта, че $Range(\tau) \cap T_{zero} = \emptyset$,

$$ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)], ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)] \text{ и}$$

$$\text{и } \sigma(a_j) = r_0^p(\tau(C_j)) \leq^{lex} r_0^q(\tau(C_i)) = \sigma(a_i)$$

Така,

$$\mathbb{T}_\omega \models \theta_1[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$$

**2$^{\text{-ри}}$ случай.** Нека $C_i \preceq_A R_k$, $C_j$ и $R_k$ са несравними относно $\preceq_A$. Нека $D \in A_k/_\sim$ е такъв клъстер, че

$$D \preceq_A R_k, D \preceq_A C_j \text{ и } \neg\exists X(D \preceq_A X \& X \preceq_A R_k \& X \preceq_A C_j), \text{т.е.}$$

клъстерът $C_j$ се намира в разклоненията (различни от тези към $R_k$) на клъстера $D$. Ще разгледаме случаи спрямо отношението на $D$ към $C_i$.

**2.1.** Нека $C_i \preceq_A D$. Тук имаме сумарно, че $C_i \preceq_A D$, $C_i \preceq_A R_k$ и $D \preceq_A R_k$. От трета точка от дефинията на $\tau$ получаваме, че $\tau(D) \leq \tau(C_i)$ и $RSuccessor1[\tau(D), \tau(R_k)]$. От друга страна, имаме, че $D \preceq_A R_k$, $D \preceq_A C_j$ и $\neg\exists Z(D \preceq_A Z \& Z \preceq_A R_k \& Z \preceq_A C_j)$. От четвърта точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $\tau(D) \leq \tau(C_j)$ и $\neg(r_1(\tau(D)) \leq \tau(C_j))$.

1. $RSuccessor1[\tau(C_i), \tau(R_k)] \Rightarrow ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)]$

2. Щом $D \preceq_A R_k$, от втора точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $RSuccessor1[\tau(D), \tau(R_k)]$. Тогава $\tau(D)$ е от вида $\tau(R_k)11...1$, откъдето $r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(D)$. Но $\tau(D) \leq \tau(C_j)$, откъдето $r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_j) \leq \sigma(a_j)$.

3. Ако $RSuccessor1[\tau(C_j), \tau(R_k)]$, то от втора точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $C_j \preceq_A R_k$, което е невъзможно. Значи, $\neg RSuccessor1[\tau(C_j), \tau(R_k)]$, откъдето $\neg ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_j), \tau(R_k)]$

4. Нека $z \in T_\omega$ е такова, че $P(z)$, $RSuccessor1[z, \tau(R_k)]$ и $z \leq \sigma(a_j)$. Щом $P(z)$, то $z = \tau(E)$ за някой клъстер $E \in A/_\sim$. Щом $RSuccessor1[z, \tau(R_k)]$, то от втора точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $E \preceq_A R_k$. Също така, щом $\tau(E) = z \leq \sigma(a_j)$, то $\tau(E) \leq \tau(C_j)$. Ако $\tau(D) < \tau(E)$, то $r_1(\tau(D)) \leq \tau(C_j)$, понеже $\tau(E) \leq \tau(C_i)$, което е противоречие. Следователно, $\tau(E) \leq \tau(D)$, но $\tau(D) \leq \tau(C_i)$. Тогава $\tau(E) \leq \tau(C_i)$, откъдето $z = \tau(E) \leq \sigma(a_i)$.

От четирите точки сумарно получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)] \& r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j) \& \neg ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)] \&$$

$$\& \forall z(P(z) \& RSuccessor1[z, \tau(R_k)] \& z \leq \sigma(a_j) \to z \leq \sigma(a_i)), \text{т.е.}$$

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_2[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$$

**2.2** Нека $D \preceq_A C_i$. Тук клъстерите $C_i$ и $C_j$, за които знаем, че $C_i \preceq_A C_j$, се намират в различни разклонения на клъстера $D$, откъдето няма как да бъдат сравними. Тоест този случай е невъзможен.

**2.3** Нека $C_i$ и $D$ са несравними. Това отново е невъзможен случай, понеже имаме, че $C_i \preceq_A R_k$ и $D \preceq_A R_k$, а според аксиома 3 от аксиоматиката $G$ няма как дървото да се разклонява в обратна на $\preceq_A$ посока.

**3$^{\text{-ти}}$ случай.** Нека $C_i$ и $R_k$ са несравними и $C_j \preceq_A R_k$. Нека $D \in A/_\sim$ е такъв клъстер, че $D \preceq_A R_k$, $D \preceq$

$$D \preceq_A R_k, D \preceq_A C_i \text{ и } \neg\exists X(X \preceq_A C_i \& X \preceq_A \& D \prec_A X)$$

Ще разгледаме случаи за отношението между $C_j$ и $D$.

**3.1.** Нека $C_j \preceq_A D$. Щом $C_j \preceq_A D$ и $D \preceq_A C_i$, то $C_j \preceq_A C_i$, което е възможно само ако $C_i = C_j$. Следователно, изпълнено е, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_6[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$$

**3.2.** Нека $D \prec_A C_j$. Тук $C_i$ и $C_j$ се намират в различни разклонения от $D$, следователно, са несравними, което е противоречие, което прави този случай невъзможен.

**3.3.** Нека $D$ и $C_j$са несравними. Подобно на случай **2.3.**, този случай е невъзможен.

**4-ти случай.** Нека $C_i$ и $R_k$ са несравними относно $\preceq_A$ и $C_j$ и $R_k$ са несрваними относно $\preceq_A$. Подобно на предишните случаи, нека $D_i$ и $D_j$ са клъстерите, в чиито разклонения се намират съответно $C_i$ и $C_j$. Ако $D_i \neq D_j$, то няма как $C_i$ и $C_j$ да бъдат сравними относно $\preceq_A$. Следователно, $D_i = D_j = D$, т.е.

$$D \preceq_A R_k \& D \preceq_A C_i \& D \preceq_A C_j \& \neg\exists X(X \preceq_A R_k \& X \preceq_A C_i \& X \preceq_A C_j \& D \prec_A X)$$

Имаме, че $C_i$ и $R_k$ са несравними и $C_j$ и $R_k$ са несравними, т.е.

$$\neg(C_i \preceq_A R_k)\&\neg(R_k \preceq_A C_i)\&\neg(C_j \preceq_A R_k)\&\neg(R_k \preceq_A C_j)$$

Също така, по допускане имаме, че $C_i \preceq_A C_j$. Следователно, от пета точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че

1. $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$.
2. $\neg RSuccessor1[\tau(C_i),\tau(R_k)]$ и $\neg RSuccessor1[\tau(C_j),\tau(R_k)]$
3. $r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_i)$ и $r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_j)$

Ако $C_i = C_j$, то имаме две възможности за изобразяване на елементите $a_i$ и $a_j$ под действие на $\sigma$ в зависимост от това, какви са номерата им. Тоест ако $\sigma(a_i) = r_0^p(\tau(C_i))$ и $\sigma(a_j) = r_0^q(\tau(C_j))$, и $p \leq q$, то $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$. В противен случай (т.е. $q \leq p$), ще имаме, че $\sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$. Нека сега $C_i \neq C_j$. От 1. ще имаме, че $\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j)$. Така, получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$$

От 2. следва, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]\&\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]$$

По допускане имаме, че $C_i$ и $C_j$ са в разклонението на един и същи клъстер $D$, по-малък от корена $R_k$. Следователно, и за техните елементи ще бъде вярно, че се намират в един и същи клон:

$$\mathbb{T}_\omega \vDash SameBranch[P,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$$

Наистина, нека $\tau(E)$ е такова, че $\tau(E) \leq \sigma(a_i)$. Тогава от 1. получаваме, че $\tau(E) \leq \tau(C_i) \leq \tau(C_j)$, откъдето $\tau(E) \leq \sigma(a_j)$. Така, получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_i) \& \neg ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)] \&$$

$$\& r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_j) \& \neg ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_j), \tau(R_k)] \&$$

$$\& SameBranch[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)] \& (\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_3[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$$

**5-ти случай.** Нека $R_k \preceq_A C_i$ и $\neg(R_k \preceq_A C_j)$. В този случай, $C_i$ и $C_j$ или са несравними, или $C_j \prec_A C_i$. И в двата варианта получаваме противоречие с факта, че $C_i \preceq_A C_j$. Следователно, този случай е невъзможен.

**6-ти случай.** Нека $\neg(R_k \preceq_A C_i)$ и $R_k \preceq_A C_j$. Ако $C_i$ и $R_k$ са несравними, ти и $C_i$ и $C_j$ ще бъдат несравними, което е противоречие. Затова нека $C_i \preceq_A R_k$. Тогава от втора точка от дефиницията на $\tau$ ще имаме, че $RSuccessor1[\tau(C_i), \tau(R_k)]$. Следователно, за $\sigma(a_i)$ имаме $ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$.
От друга страна, имаме, че $R_k \preceq_A C_j$ и $R_k \preceq_A R_k$, откъдето по шеста точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $\neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(C_j))$, откъдето $\neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j))$.
Така, получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)] \& \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j)), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_4[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$$

**6-ти случай.** Нека $R_k \preceq_A C_i$ и $R_k \preceq_A C_j$. Аналогично на шестия случай, от това, че $R_k \preceq_A C_i$, $R_k \preceq_A C_j$ и $C_i \preceq_A C_j$, получаваме, че $\neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_i))$ и $\neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j))$. Също така, получаваме, че $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$.
Ако изберем $\tau(E)$ такова, че $\tau(E) \leq \sigma(a_i)$, то ще получим, че $\tau(E) \leq \tau(C_i) \leq \tau(C_j)$, откъдето $\tau(E) \leq \sigma(a_j)$. Следователно,

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \forall z (P(z) \& z \leq \sigma(a_i) \to z \leq \sigma(a_j))$$

От това, че $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$, както в четвърти случай, следва, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$$

Така, получаваме, че

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_i)) \& \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j)) \&$$

$$\& \sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i), \text{ т.е.}$$

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_5[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$$

Окончателно, от всички случаи получаваме, че $(z = \tau(R_k))$

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \exists r (\tilde{K}(r) \& r \leq \sigma(a_i) \& r \leq \sigma(a_j) \& \bigvee_{l=1}^{6} \theta_l[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), r])$$

($\Leftarrow$) Нека $\mathbb{T}_\omega \models F^{\varphi[\![\sigma[A_1],\dots,\sigma[A_m],\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)]\!]}[P,Q]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \models \exists r(\tilde{K}(r)\&r \leq \sigma(a_i)\&r \leq \sigma(a_j)\& \bigvee_{l=1}^{6} \theta_l[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),r])$$

Нека $r'$ е свидетел за това съществуване. Щом $\tilde{K}(r')$ и $P(r')$, то $r' = \tau(R_k)$ за някое $k \leq \alpha$. Също така, щом $r' \leq \sigma(a_i)$ и $r' \leq \sigma(a_j)$, то $a_i$ и $a_j$ се намират в дървото, от което сме избрали $R_k$ за корен, т.е. $a_i, a_j \in A_k$.
Формулите $\theta_l$, $1 \leq l \leq 5$, са взаимно изключващи се, а $\theta_6$ определя дали елементите $a_i$ $a_j$ са в един и същи клъстер (ако това е така, то, разбира се, $a_i \leq_A a_j$). Затова ще разгледаме петте случая, като във всеки от тях е вярна по една формула $\theta_l$.

**1-ви случай.** Нека $\mathbb{T}_\omega \models \theta_1[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \models ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]\&ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]\&\sigma(a_j) \leq^{lex} \sigma(a_i)$$

Щом $ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]$ и $ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]$, то $RSuccessor1[\tau(C_i),\tau(R_k)]$ и $RSuccessor1[\tau(C_j),\tau(R_k)]$, т.е. $\tau(C_i)$ и $\tau(C_j)$ са от вида $\tau(R_k)11\dots1$. Също така, $\sigma(a_j) \leq^{lex} \sigma(a_i)$, то $\tau(C_j) \leq^{lex} \tau(C_i)$. Предвид вида на $\tau(C_i)$ и $\tau(C_j)$, получаваме, че $\tau(C_j) \leq \tau(C_i)$. Така, от третата точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$, а оттам и $a_i \leq_A a_j$.

**2-ри случай.** Нека $\mathbb{T}_\omega \models \theta_2[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \models ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]\&r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j)\&\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]\&$$

$$\&\forall z(P(z)\&RSuccessor1[z,\tau(R_k)]\&z \leq \sigma(a_j) \to z \leq \sigma(a_i))$$

Нека $\tau(D)$ е такова, че $RSuccessor1[\tau(D),\tau(R_k)]$, $\tau(D) \leq \tau(R_k)$ и

$$(\star)\ \neg\exists x(RSuccessor1[x,\tau(R_k)]\&x \leq \tau(C_j)\&\tau(D) < x)$$

• Имаме, че $ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]$, откъдето $RSuccessor1[\tau(C_i),\tau(R_k)]$, където от втора точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $C_i \preceq_A R_k$. Аналогично, $D \preceq_A R_k$. По допускане получаваме също, че $\tau(D) \leq \sigma(a_i)$, откъдето $\tau(D) \leq \tau(C_i)$. Така, от трета точка от дефиницията на $\tau$ следва, че $C_i \preceq_A D$ **(1)**.

• Имаме, че $\tau(D) \leq \tau(C_j)$ и $RSuccessor1[\tau(D),\tau(R_k)]$. Ако $r_1(\tau(D)) \leq \tau(C_j)$, получаваме противоречие със $(\star)$. Значи, $\neg(r_1(\tau(D)) \leq \tau(C_j))$. Тогава от четвърта точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $D \preceq_A C_j$ **(2)**.
От **(1)** и **(2)** получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$, а оттам и $a_i \leq_A a_j$.

**3-ти случай.** Нека $\mathbb{T}_\omega \models \theta_3[P,Q,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \models r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_i)\&\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]\&$$

$$\&r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j)\&\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]\&$$

$$\&SameBranch[P,\sigma(a_i),\sigma(a_j),\tau(R_k)]\&(\sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i))$$

• От това, че $\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_i),\tau(R_k)]$ и $\neg ElementRSuccessor1[P,\sigma(a_j),\tau(R_k)]$ следва, че $\neg RSuccessor1[\tau(C_i),\tau(R_k)]$ и $\neg RSuccessor1[\tau(C_j),\tau(R_k)]$.

• От това, че $SameBranch[P, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$ имаме, че

$$\forall z(P(z) \& z \leq \sigma(a_i) \rightarrow z \leq \sigma(a_j))$$

Тогава щом $P(\tau(C_i))$ и $\tau(C_i) \leq \sigma(a_i))$, то $\tau(C_i) \leq \sigma(a_j)$, откъдето и $\tau(C_i) \leq \tau(C_j)$. Така, от пета точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$, а оттам и $a_i \leq_A a_j$.

**4-ти случай.** Нека $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_4[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \vDash ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)] \& \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j))$$

• Тривиално имаме, че $\neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \tau(R_k))$. Също така, $C_j \in A_k$, откъдето $\tau(R_k) \leq \tau(C_j)$. Тогава по шеста точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $R_k \preceq_A C_j$ **(1)**.

• Щом $ElementRSuccessor1[P, \sigma(a_i), \tau(R_k)]$, то $RSuccessor1[\tau(C_i), \tau(R_k)]$. Тогава от втора точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A R_k$ **(2)**.

Така, от **(1)** и **(2)** следва, че $C_i \preceq_A C_j$, а оттам и $a_i \leq_A a_j$.

**5-ти случай.** Нека $\mathbb{T}_\omega \vDash \theta_5[P, Q, \sigma(a_i), \sigma(a_j), \tau(R_k)]$, т.е.

$$\mathbb{T}_\omega \vDash \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_i) \& \neg(r_1(\tau(R_k)) \leq \sigma(a_j)) \& \forall z(P(z) \& z \leq \sigma(a_i) \rightarrow z \leq \sigma(a_j)) \&$$

$$\& \sigma(a_i) \leq^{lex} \sigma(a_j) \vee \sigma(a_j) \leq \sigma(a_i)$$

Тогава понеже $P(\tau(C_i))$ и $\tau(C_i) \leq \sigma(a_i)$, $\tau(C_i) \leq \sigma(a_j)$. От шеста точка от дефиницията на $\tau$ получаваме, че $C_i \preceq_A C_j$, а оттам и $a_i \leq_A a_j$.

Окончателно, във всички случаи получихме, че $\mathscr{A} \vDash a_i \leq_A a_j$. Следователно, изпълнена е и обратната посока.

Останалите случаи в индукцията следват напълно аналогично, както в доказателството на **Твърдение 8.** $\square$

# Библиография


1. Ehrenfeucht, A., Decidability of the theory of the linear ordering relation. *Notices Amer. Math. Soc.* **6** (1959), 556-38.

2. Läuchli, H., and Leonard, J., On the elementary theory of linear order, *Fund. Math.* **59** (1966), 109-116.

3. Läuchli, H., A decision procedure for the weak second order theory of linear order, *Contribution to mathematical logic*, K. Schutte, editor, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 189-197.

4. Rabin, M., Decidability of second order theories and automata on infinite trees. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 141,1969.

5. Chang. C. C., Keisler, H. Jerome, Model Theory, 3rd Edition, *Sudies on logic and the foundations of mathematics*, Volume 73.

6. Marker, D., Model Theory : An Introduction, *Graduate Texts in Mathematics*, volume 217.