РЕЦЕНЗИЯ

за дипломната работа

Модални езици, с имена
на **Огнян Йорданов Захариев**,
фак. номер 8413, **специалност "Математика и механика"**,
специализация "Математическа логика"

Представената ми за рецензиране дипломна работа е от 23 страници. Структурирата е така: увод, две глави, съдържащи съответно 5 и 7 секции, заключение и литература. В литературата са включени 8 неща.

Дипломната работа е в областта на модалните логики с константи, наричани от различни хора *имена* или *номинали*. По-подробно, разглежда се съждителен модален език, в който множеството на съждителните променливи е разделено на две изброими и непресичащи се множества, а модалните оператори са непразна съвкупност от двойки, α, $\backslash\alpha$. За този език се разглеждат 4 класа от релационни структури, структури на Крипке; ще ги означа с $\mathcal{K}_E$, $\mathcal{K}_U$, $\mathcal{K}_{\underline{E}}$, $\mathcal{K}_{\underline{U}}$. Сега ще опиша тези класове. Нека W е непразно множество и S е релация на еквивалентност в W. Нека R е функция, която на всеки модален оператор α съпоставя бинарна релация $R(\alpha)$ по такъв начин, че за всеки клас на еквивалентност A в W относно S и за всяка двойка асоциирани модални оператори α, $\backslash\alpha$ е в сила $A \times A = (R(\alpha) \cup R(\backslash\alpha)) \cap (A \times A)$. Наредената двойка $\langle W, R\rangle$ се нарича структура на Крипке за разглеждания език. Класът $\mathcal{K}_E$ се състои от всички структури на Крипке за разглеждания език. Класът $\mathcal{K}_U$ се състои от всички структури от $\mathcal{K}_E$, в които S е универсалната релация в W, т.е. $S = W \times W$. От тези два класа с условието $R(\alpha) \cap R(\backslash\alpha) = \varnothing$ се отделят съответно класовете $\mathcal{K}_{\underline{E}}$, $\mathcal{K}_{\underline{U}}$. Разглеждат се модели над дадена структура на Крипке, които се получават с добавяне на функция V, която на всяка съждителна променлива или име съпоставя подмножество на универсума, като на имената се съпоставя най-много елементно подмножество и освен това: точките от универсума, чиито синглетони са стойности на V за име, не могат да формират примки едновременно за $R(\alpha)$ и $R(\backslash\alpha)$. Вярност на формулите се дефинира по обичайния начин. В дипломната работа се твърди, 2.1, 2.2, 2.3, че множествата на общовалидните формули във всеки от тези четири класа съвпадат и са формалните теореми в предложената формална система от хилбертов тип. Разрешимостта на тази логика е обект на 2.4–2.7, в които се твърди, че всеки един от разгледаните класове допуска филтрация.

Дипломната работа е написана лошо — четенето е просто гадаене за намеренията на дипломанта. Формалните грешки са от разнообразно естество (дори има две съждителни формули, за които дипломанта погрешно си мисли, че са тавтологии) и не създават пречки за разбирането на стойността на постигнатото с представената дипломна работа.

В заключение препоръчвам на комисията по защитата да постави оценка около добър на г-н Огнян Йорданов Захариев за представената дипломна работа.

12 декември 2007 год.
София

(доц. д-р Тинко Тинчев)

Софийски университет “Св. Климент Охридски”
Факултет по математика и информатика

ДИПЛОМНА РАБОТА

за получаване на образователно-квалификационна степен “магистър”

на **Огнян Йорданов Захариев**, фак. № 8413,
специалност “Математика и механика”,
специализация “Математическа Логика”

тема:

Модални езици, с имена

Научен ръководител: Проф. Дмн Димитър Вакарелов

София, ноември 2007 г.

Съдържание

Увод

Още от времето на Аристотел – модалностите формализират философските категории “необходимост” и “възможност”. Релационната семантика на модалностите, въведена от Саул Крипке през 60-те години на миналия век, утвърждава модалностите като логико-математически апарат с различни приложения.

Настоящата дипломна работа разглежда модални езици, с имена. Модални езици с имена се разглеждат в структурите на Крипке, в семантики разрешаващи имената. В семантичните модели, за имената трябва да е вярно ‘ако ги има, то в не повече от един видим възможен свят’.

Настоящата дипломна работа доразвива идеите заложени в [5]. Първият вариант на настоящия текст има своята основа в [6]. И в двата споменати текста, както и тук, се разглеждат полимодални езици с допълнителен оператор върху модалностите – чертичка.

Модални езици с имена и семантични логики с имена

1.1 Модален език

Модалният език се определя от своята азбуката и понятието формула, т.е. модално съждение.

Азбуката, на модалният език с имена, се състои от:

- Непразно, изброимо множество Π, съдържащо съждения;
- Непразното, изброимо множество N, съдържащо имена (“имената” са наричани също така “имена на константи” или пък “номинали”);
- Непразно, множеството на булево-алгебричните оператори $\{\sim, \wedge\}$;
- Непразно, изброимо множество Δ, съдържащо модални оператори;
- Непразно, множество от технически символи $\{\ (,\ ),\ [,\ ],\ \backslash\ \}$. Техническите символи използваме само при нужда.

Непразното множество Φ, съдържащо формулите на модаления език с имена, се определя със следната индуктивна дефиниция:

- съждения са формули;
- имената са формули;
- ако “A” е формула, то формула е и означението “$\sim A$”;
- ако “A” и “B” са формули, то формула е и означенияето “$A \wedge B$”;
- ако “$\alpha \in \Delta$” и “A” е формула то формула е и означението “$[\alpha]A$”.
- ако “$\alpha \in \Delta$” и “A” е формула то формула е и означението “$[\backslash\alpha]A$”..

Нека “A” е формула, в модален език с имена, тогава ще използваме следните метасъкръщения:

- “$A \rightarrow B$” за всяка формула “$\sim(A \wedge \sim B)$”, от модалния език с имена;
- “$A \vee B$” за всяка формула “$\sim(\sim A \wedge \sim B)$”, от модалния език с имена;
- “$<\alpha>A$” за всяка формула “$\sim[\alpha]\sim A$”, от модалния език с имена;
- “$<\backslash\alpha>A$” за всяка формула “$\sim[\backslash\alpha]\sim A$”, от модалния език с имена;
- “$[\equiv]A$” за всяка формула “$[\alpha]A \wedge [\backslash\alpha]A$”, от модалния език с имена;
- “$<\equiv>A$” за всяка формула “$<\alpha>A \vee <\backslash\alpha>A$”, от модалния език с имена;

1.2 Семантика и логики

Абстрактна семантика на модалния език се определя с понятията "структура" и "модел".

Структура на Крипке, за модален език с имена, е свързаност от вида "$\underline{W}$ е <W,R>". В $\underline{W}$ непразния универсум от възможни светове е обозначен с W и R е функция, която съпоставя на всеки модален оператор и неговото "някакво допълнение '\α' " непразни релации, т.е. "$\forall\alpha\in\Delta(R(\alpha)\subseteq W^2)$" и "$\forall\alpha\in\Delta(R(\backslash\alpha)\subseteq W^2)$". Обединението "$R(\alpha)\cup R(\backslash\alpha)$" е еквивалентност обозначавана с "≡".
За тази еквивалентност "≡" е изпълнено:

- $\forall\alpha\in\Delta\forall x\in W\ (x\equiv x)$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall x\in W\forall y\in W\ (x\equiv y\Rightarrow y\equiv x)$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall x\in W\forall y\in W\ ((x\equiv y\ \&y\equiv z)\Rightarrow x\equiv z\ )$

За всеки два модални оператора е изпълнено: "$R(\alpha)\cup R(\backslash\alpha)=R(\beta)\cup R(\backslash\beta)$".

Нека "$\underline{W}$" е структура на Крипке, за модален език с имена. Свързаност от вида "М е <W,R,V>" обозначава модел на Крипке за модален език с имена. В модела М е изпълнено:

- V е функция която съпоставя на всяка двойка от вида < съждение, възможен свят> елемент на множеството {0, 1}, т.е. $\forall p\in\Pi\forall x\in W(V(p,x)\in\{0,1\})$;
- V е функция която съпоставя на всяка двойка от вида <име, възможен свят> елемент на множеството {0, 1}, т.е. :
  $\forall c\in N\forall x\in W(V(c,x)\in\{0,1\})\ \&$
  $\forall c\in N\forall x\in W\forall y\in W(\ x\equiv y\ \&\ V(c,x)=V(c,y)=1\ )\Rightarrow (x=y)\ )\ \&$
  $\forall c\in N\forall x\in W\forall y\in W(\ (\ x\equiv y\ \&\ V(c,x)=V(c,y)=1\ \&\ xR(\backslash\alpha)y\ )\Rightarrow\neg(xR(\alpha)y)\ )$;

Функцията V се разширява до оценка на произволна формула, от модален език с имена, в "произволен възможен свят в модела М" със следните дефиниции:

- ✓ $\forall A\in\Phi\forall x\in W(\ V(A,x)=1\Leftrightarrow V(\sim A,x)=0)\ )$;
- ✓ $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall x\in W(\ V(A\wedge B,x)\Leftrightarrow V(A,x)=1\ \&\ V(B,x)=1\ )$;
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W(\ V([\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W(xR(\alpha)y\Rightarrow V(A,y)=1)\ )$.
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W(\ V([\backslash\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W(xR(\backslash\alpha)y\Rightarrow V(A,y)=1)\ )$.

В модален език с имена, използваме следните метасъкращения, за функцията V:

- "$M,x|=A$" при следната оценка "$V(A,x)=1$";
- "$M,x|\neq A$" при следната оценка "$V(A,x)=0$";
- "$M|=A$", обозначава условието "$\forall x\in W(M,x|=A)$".

1.3 *Верни формули и логики*

Формулата “Семантиката от тип E има като елемент свързаността $\underline{W}$=<W,R>, която свъзаност поражда модела M=<W,R,V>” обозначава условията:

- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to A))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall C\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to C))\to((B\to C)\to(A\to C))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (\sim B\to\sim A)\to((B\to\sim A)\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\alpha]\ (A\to B)\to(\ [\alpha]A\to[\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\backslash\alpha](A\to B)\to(\ [\backslash\alpha]A\to[\backslash\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\backslash\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to [\equiv][\equiv]A\ )\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models A\to [\equiv]\langle\equiv\rangle A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall c\in N(\ M \models(\langle\equiv\rangle(c\wedge A)\to[\equiv](c\to A))\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall c\in N(\ M \models(\langle\backslash\alpha\rangle(c)\to\sim\langle\alpha\rangle(c)\ )$
- $\forall A\in\Phi(\ M\models A \Rightarrow (\ M \models A\to B \Rightarrow M\models B\ )\ );$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\alpha]A);$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\backslash\alpha]A);$

Формулата “A е вярна в семантиката E”, т.е. “$E\models A$”, обозначава условието “$\forall\underline{W}\forall M ((\underline{W}\in E\&\underline{W}\Vdash M)\Rightarrow M\models A)$”. Обозначението “L(E) е множеството $\{A \mid A\in\Phi\ \&\ E\models A\}$” е свързаност която се чете например така: ‘логиката на семантиката “E” е множеството съдържащо формулите верни в семантиката E’.

Формулата “ Семантиката от тип U има като елемент свързаността $\underline{W}_U$=<W_U,R_U>, която свъзаност поражда модела M_U=<W_U,R_U,V_U>”, обозначава условията:

- Семантиката от тип E има като елемент свързаността $\underline{W}_E$=<W_E,R_E>, която свъзаност поражда модела M_E=<W_E,R_E,V_E>;
- $\exists x\in W_E\ \ (W_U = \{y\ |\forall\alpha\in\Delta(\ x \equiv y\ )\ \})$
- $\forall\alpha\in\Delta\ (\ R_U(\alpha) = R_E(\alpha)\cap W_U\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\ (\ R_U(\backslash\alpha) = R_E(\backslash\alpha)\cap W_U\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_U(V_U(A,x)=1 \Leftrightarrow V_E(A,x)=1\ )$

Формулата “Семантиката от тип U има като елемент свързаността $\underline{W}$=<W,R>, която свъзаност поражда модела M=<W,R,V>” обозначава условията:

- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to A))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall C\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to C))\to((B\to C)\to(A\to C))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (\sim B\to\sim A)\to((B\to\sim A)\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\alpha]\ (A\to B)\to(\ [\alpha]A\to[\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\backslash\alpha](A\to B)\to(\ [\backslash\alpha]A\to[\backslash\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\backslash\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to A)\ )$

- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\,(M \models [\equiv]A \to [\equiv][\equiv]A)$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\,(M \models A\to [\equiv]\langle\equiv\rangle A)$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall c\in N(M \models (\langle\equiv\rangle(c\wedge A)\to[\equiv](c\to A)))$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall c\in N(M \models (\langle\backslash\alpha\rangle(c)\to\sim\langle\alpha\rangle(c)))$
- $\forall A\in\Phi(M\models A \Rightarrow (M\models A\to B \Rightarrow M\models B));$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\alpha]A);$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\backslash\alpha]A);$

Формулата "A е вярна в семантика U", т.е. "$U\models A$", е "$\forall\underline{W}\forall M((\underline{W}\in U\&\underline{W}||{=}M)\Rightarrow M\models A)$". Множеството "$L(U)$" е "$\{A \mid A\in\Phi \;\&\; U\models A\}$" и тази свързаност се чете отново, например така: 'логика на семантиката U е множество съдържащо формули верни в семантиката U'.

<u>Лема</u> Ако "E и U са семантики", то
"$(\exists\underline{W}(\underline{W}\in E)\Rightarrow\forall\underline{W}'\in U(\underline{W}'\in E\&\forall\alpha\in\Delta\forall x\in W'\forall y\in W'(x\equiv y)))$
$\Rightarrow\forall A\in\Phi(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(U))$".

Доказателство: Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. E и U са семантики и "$\exists\underline{W}(\underline{W}\in E)\Rightarrow\forall\underline{W}'\in U(\underline{W}'\in E\&\forall\alpha\in\Delta\forall x\in W'\forall y\in W'(x\equiv y))$" и "$\exists A\in\Phi(\neg(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(U)))$", т.е., изпълнено е "$A\in\Phi\;\&\neg(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(U))$", но това води до противоречие защото "не е вярно, $U\models A$", точно когато "не е вярно, $E\models A$"$\square$.

1.4 Други верни формули и логики

Формулата " Семантиката от тип $\underline{E}$ има като елемент свързаността $\underline{W}_{\underline{E}}=\langle W_{\underline{E}},R_{\underline{E}}\rangle$, която свъзаност поражда модела $M_E=\langle W_{\underline{E}},R_{\underline{E}},V_{\underline{E}}\rangle$", обозначава условията:

- Семантиката от тип E има като елемент свързаността $\underline{W}_E=\langle W_E,R_E\rangle$, която свъзаност поражда модела $M_E=\langle W_E,R_E,V_E\rangle$;
- $W_{\underline{E}} = \{y \mid y \in W_E\}\times\{0\}\cup$ $\{y \mid y\in W_E \& \forall c\in N \forall x\in W_{\underline{E}} \forall\alpha\in\Delta(x\equiv y \& V_{\underline{E}}(c,x)=V_{\underline{E}}(c,y)=1 \& xR_{\underline{nE}}(\backslash\alpha)y)\Rightarrow\neg(xR_{\underline{nE}}(\alpha)y))\}\times\{0\}$
- $\forall\langle x,i\rangle\in W_{\underline{E}}\forall\langle y,j\rangle\in W_{\underline{E}}\forall\alpha\in\Delta\ (\langle x,i\rangle R_{\underline{E}}(\alpha)\langle y,j\rangle\Leftrightarrow$ $(xR_E(\alpha)y \&\ (xR_E(\backslash\alpha)y)\Rightarrow i=j)))$
- $\forall\langle x,i\rangle\in W_{\underline{E}}\forall\langle y,j\rangle\in W_{\underline{E}}\forall\alpha\in\Delta\ (\langle x,i\rangle R_{\underline{E}}(\backslash\alpha)\langle y,j\rangle\Leftrightarrow$ $(xR_E(\backslash\alpha)y\&(xR_E(\alpha)y)\Rightarrow i\neq j)))$
- $\forall A\in\Phi\forall\langle y,i\rangle\in W_{\underline{E}}(V_{\underline{E}}(A,\langle y,i\rangle)=1\Leftrightarrow V_E(A,y)=1)$

Формулата "Семантиката от тип $\underline{E}$ има като елемент свързаността $\underline{W}=\langle W,R\rangle$, която свъзаност поражда модела $M=\langle W,R,V\rangle$" обозначава условията

- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to A))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall C\in\Phi(\ M \models (A\to(B\to C))\to((B\to C)\to(A\to C))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models (\sim B\to\sim A)\to((B\to\sim A)\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\alpha]\ (A\to B)\to(\ [\alpha]A\to[\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ M \models[\backslash\alpha](A\to B)\to(\ [\backslash\alpha]A\to[\backslash\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ M \models [\equiv]A\to[\backslash\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to [\equiv][\equiv]A\ )\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ M \models A\to [\equiv]\langle\equiv\rangle A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall c\in N(\ M \models(\langle\equiv\rangle(c\wedge A)\to[\equiv](c\to A))\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall c\in N(\ M \models(\langle\backslash\alpha\rangle(c)\to\sim\langle\alpha\rangle(c)\ )$
- $\forall A\in\Phi(\ M\models A \Rightarrow (\ M \models A\to B \Rightarrow M\models B\ )\ )$;
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\alpha]A)$;
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(M\models A\Rightarrow M\models[\backslash\alpha]A)$;

Формулата "A е вярна в семантиката $\underline{E}$", т.е. "$\underline{E}\models A$", е "$\forall\underline{W}(\ \underline{W}\in U\Rightarrow\underline{W}\models A)$". Множеството "$L(\underline{E})$" е "$\{A \mid A\in\Phi\ \&\ \underline{E}\models A\}$" и тази свързаност се чете отново, например така: 'логика на семантиката $\underline{E}$ е множество съдържащо формули верни в семантика E'.

<u>Лема</u> Ако "E и $\underline{E}$ са семантики", то "$\forall\underline{W}(\ \underline{W}\in E\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in E\&\underline{W}'\in\underline{E}))\Rightarrow\forall A\in\Phi(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(\underline{E}))$".

Доказателство: Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. E и $\underline{E}$ са семантики и "$\forall\underline{W}(\ \underline{W}\in E\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in E\&\underline{W}'\in\underline{E}))\ \&\ \exists A\in\Phi\neg(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(\underline{E}))$", т.е., изпълнено е " $A\in\Phi\&\neg(A\in L(E)\Leftrightarrow A\in L(\underline{E}))$", но това води до противоречие защото "не е вярно, $\underline{E}\models A$" точно когато "не е вярно, $E\models A$"□.

1.5 *Трети верни формули и логики*

Формулата "семантиката $\underline{U}$ има като елемент свързаността $\underline{W}_{\underline{U}}=<W_{\underline{U}},R_{\underline{U}}>$, която свързаност поражда модела $M_{\underline{U}}=<W_{\underline{U}},R_{\underline{U}},V_{\underline{U}}>$", обозначава условията:

- Семантиката от тип U има като елемент свързаността $\underline{W}_U=<W_U,R_U>$, която свързаност поражда модела $M_U=<W_U,R_U,V_U>$
- $W_{\underline{U}} = \{y \mid y \in W_U\} \times \{0\} \cup \{y \mid y \in W_U \& \forall c \in N \forall x \in W_U \forall \alpha \in \Delta (x \equiv y \& V_U(c,x)=V_U(c,y)=1 \& xR_U(\backslash\alpha)y) \Rightarrow \neg(xR_U(\alpha)y))\} \times \{0\}$
- $\forall <x,i> \in W_{\underline{U}} \forall <y,j> \in W_{\underline{U}} \forall \alpha \in \Delta\ (<x,i>R_{\underline{U}}(\alpha)<y,j> \Leftrightarrow (xR_U(\alpha)y \& (xR_U(\backslash\alpha)y \Rightarrow i=j)))$
- $\forall <x,i> \in W_{\underline{U}} \forall <y,j> \in W_{\underline{U}} \forall \alpha \in \Delta\ (<x,i>R_{\underline{U}}(\backslash\alpha)<y,j> \Leftrightarrow (xR_U(\backslash\alpha)y \& (xR_U(\alpha)y \Rightarrow i \neq j)))$
- $\forall A \in \Phi \forall <y,i> \in W_{\underline{U}}(V_{\underline{U}}(A,<y,i>)=1 \Leftrightarrow V_U(A,y)=1))$

Формулата "Семантиката от тип $\underline{U}$ има като елемент свързаността $\underline{W}=<W,R>$, която свързаност поражда модела $M=<W,R,V>$" обозначава условията:

- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi (\ M \models (A \to (B \to A))\ )$
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall C \in \Phi (\ M \models (A \to (B \to C)) \to ((B \to C) \to (A \to C))\ )$
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi (\ M \models (\sim B \to \sim A) \to ((B \to \sim A) \to A)\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall B \in \Phi (\ M \models [\alpha]\ (A \to B) \to (\ [\alpha]A \to [\alpha]B)\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall B \in \Phi (\ M \models [\backslash\alpha](A \to B) \to (\ [\backslash\alpha]A \to [\backslash\alpha]B)\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall \beta \in \Delta \forall A \in \Phi (\ M \models [\equiv]A \to [\beta]A\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall \beta \in \Delta \forall A \in \Phi (\ M \models [\equiv]A \to [\backslash\beta]A\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to A)\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi\ (\ M \models [\equiv]A \to [\equiv][\equiv]A\ )\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi\ (\ M \models A \to [\equiv]<\equiv>A\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall c \in N(\ M \models (<\equiv>(c \wedge A) \to [\equiv](c \to A))\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall c \in N(\ M \models (<\backslash\alpha>(c) \to \sim <\alpha>(c)\ )$
- $\forall A \in \Phi(\ M \models A \Rightarrow (\ M \models A \to B \Rightarrow M \models B\ )\ )$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi (M \models A \Rightarrow M \models [\alpha]A)$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi (M \models A \Rightarrow M \models [\backslash\alpha]A)$;

Формулата "A е вярна в семантиката $\underline{U}$", т.е. "$\underline{U} \models A$", е "$\forall \underline{W}(\ \underline{W} \in \underline{U} \Rightarrow \underline{W} \models A)$". Множеството "$L(\underline{U})$" е "$\{A \mid A \in \Phi\ \&\ \underline{U} \models A\}$" и тази свързаност се чете отново, например така: 'логика на семантиката $\underline{U}$ е множество съдържащо формули верни в семантика $\underline{U}$'.

<u>Лема</u> Ако "U и $\underline{U}$ са семантики", то "$\forall \underline{W}(\ \underline{W} \in U \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in U \& \underline{W}' \in \underline{U})) \Rightarrow \forall A \in \Phi (A \in L(U) \Leftrightarrow A \in L(\underline{U}))$".

Доказателство: Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. U и $\underline{U}$ са семантики и "$\forall \underline{W}(\ \underline{W} \in U \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in U \& \underline{W}' \in \underline{U}))$ & $\exists A \in \Phi(\neg(A \in L(U) \Leftrightarrow A \in L(\underline{U})))$", т.е., изпълнено е "$A \in \Phi\ \& \neg(A \in L(U) \Leftrightarrow A \in L(\underline{U}))$", но това води до противоречие защото "не е вярно, $\underline{U} \models A$" точно когато "не е вярно, $U \models A$"□.

2 Модални системи с имена и синтактични логики с имена

Сега ще дадем една синтактична дефиниция на логика основана на понятието доказателство от система аксиоми с помоща на правила за извод. Базисната аксиоматична система съдържа:

- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ A\to(B\to A)\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall C\in\Phi(\ A\to(B\to C))\to((B\to C)\to(A\to C))\ )$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ ({\sim}B\to{\sim}A)\to((B\to{\sim}A)\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ [\alpha](A\to B)\to(\ [\alpha]A\to[\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi(\ [\backslash\alpha](A\to B)\to(\ [\backslash\alpha]A\to[\backslash\alpha]B)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ [\equiv]A\to[\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall\beta\in\Delta\forall A\in\Phi(\ [\equiv]A\to[\backslash\beta]A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ [\equiv]A\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ [\equiv]A\to[\equiv][\equiv]A\ )\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\ (\ A\to[\equiv]\langle\equiv\rangle A\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall c\in N(\ \langle\equiv\rangle(c\wedge A)\to[\equiv](c\to A)\ )$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall c\in N(\ (\langle\backslash\alpha\rangle(c)\to{\sim}\langle\alpha\rangle(c)\ )$
- $\forall A\in\Phi(\ A\Rightarrow(A\to B\Rightarrow B\ )\ );$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(\ A\Rightarrow[\alpha]A);$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi(\ A\Rightarrow[\backslash\alpha]A);$

Една непразна крайна редица от формули $A_1,\ldots,A_n$ се нарича доказателство в модална система ако всеки нейн член е или аксиома или се получава от един или два предходни члена по някое от правилата за извод на модалната система. Една формула се нарича теорема на модална система ако е последен член на някое доказателство. Множеството от теореми на модалната система също ще бележим с буквата на модалната система.

Синтактичната дефиниция на логика е следната: множество от формули се нарича логика тогава и само тогава когато съвпада с някакво множество от всички теореми на модалната система.

2.1 Първи метод на каноничната конструкция

Нека nE е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в nE, тогава и само тогава, когато, "$nE \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in nE$, то и $A \in x$" и "ако $A \in nE$ и $(A \to B) \in nE$, то и $B \in nE$".

Нека nE е логика и x е теория в nE и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в nE", е точно условие "Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в nE, то $[\alpha]x$ е теория в nE".

Формулата "Теорията x в nE е максимална теория в nE", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A \in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A \in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика nE има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nE} = <W_{nE}, R_{nE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nE} = <W_{nE}, R_{nE}, V_{nE}>$", е обозначено с условията:

- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{nE}(\sim A \in x \Leftrightarrow \neg(A \in x))$;
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{nE}(A \wedge B \in x \Leftrightarrow A \in y \,\&\, B \in y))$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}([\alpha]A \in x \Leftrightarrow \forall y \in W_{nE}([\alpha]x \subseteq y \to A \in y))$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}([\backslash\alpha]A \in x \Leftrightarrow \forall y \in W_{nE}([\backslash\alpha]x \subseteq y \to A \in y))$;
- $\forall \alpha \in \Delta (R_{nE}(\alpha) \subseteq (W_{nE})^2_. \& \forall x \in W_{nE} \forall y \in W_{nE}(xR_{nE}(\alpha)y \Leftrightarrow [\alpha]x \subseteq y))$;
- $\forall \alpha \in \Delta (R_{nE}(\backslash\alpha) \subseteq (W_{nE})^2_. \& \forall x \in W_{nE} \forall y \in W_{nE}(xR_{nE}(\alpha)y \Leftrightarrow [\backslash\alpha]x \subseteq y))$;
- $\forall p \in \Pi \forall x \in W_{nE}(V_{nE}(p,x)=1 \Leftrightarrow p \in x)$;
- $\forall c \in N \forall x \in W_{nE}(V_{nE}(c,x)=1 \Leftrightarrow c \in x)$;
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}(V_{nE}(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{nE}(\sim A,x)=0))$;
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{nE} (V_{nE}(A \wedge B,x) \Leftrightarrow V_{nE}(A,x)=1 \,\&\, V_{nE}(B,x)=1)$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}(V_{nE}([\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{nE}(xR_{nE}(\alpha)y \Rightarrow V_{nE}(A,y)=1))$.
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}(V_{nE}([\backslash\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{nE}(xR_{nE}(\backslash\alpha)y \Rightarrow V_{nE}(A,y)=1))$.
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}((M_{nE},x \models A \Leftrightarrow V_{nE}(A,x)=1))$;
- $\forall A \in \Phi((M_{nE} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{nE}((M_{nE},x \models A)$.

Формулата "A е вярна в семантиката nE", обозначава условието "$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in nE \& \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$".

Нека nU е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в nU, тогава и само тогава, когато, "$nU \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in nE$, то и $A \in x$" и "ако $A \in nE$ и $(A \to B) \in nE$, то и $B \in nE$".

Нека nU е логика и x е теория в nU и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в nU", е точно условието "Ако $\alpha \in \Delta$

и x е теория в nE, то [α]x е теория в nU".

Формулата "Теорията x в nU е максималната теория в nU", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A\in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A\in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика nU има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nU}=<W_{nU},R_{nU}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nU}=<W_{nU},R_{nU},V_{nU}>$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика nE има като ~~единствен~~ елемент свързаността $\underline{W}_{nE}=<W_{nE},R_{nE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nE}=<W_{nE},R_{nE},V_{nE}>$;
- $\exists x\in W_E\,(W_{nU} = \{y \mid \forall\alpha\in\Delta(\,x \equiv y\,)\})$
- $\forall\alpha\in\Delta\,(\,R_{nU}(\alpha) = R_{nE}(\alpha)\cap W_{nE}\,)$
- $\forall\alpha\in\Delta\,(\,R_{nU}(\backslash\alpha) = R_{nE}(\backslash\alpha)\cap W_{nE}\,)$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU}\,(\,(V_{nU}(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{nE}(A,x)=1)\,)$
- $\forall p\in\Pi\forall x\in W_{nU}\,(\,(V_{nU}(p,x)=1 \Leftrightarrow V_{nE}(p,x)=1)\,)$
- $\forall c\in N\forall x\in W_{nU}\,(\,(V_{nU}(c,x)=1 \Leftrightarrow V_{nE}(c,x)=1)\,)$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU}\,(\,V_{nU}\,(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{nU}\,(\sim A,x)=0)\,)$;
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall x\in\,W_{nU}\,(\,V_{nU}(A\wedge B,x) \Leftrightarrow V_{nU}(A,x)=1\ \&\ V_{nU}(B,x)=1\,)$;
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU}(V_{nU}([\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W_{nU}(xR_{nU}(\alpha)y\Rightarrow V_{nU}(A,y)=1)\,)$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU}(V_{nU}([\backslash\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W_{nU}(xR_{nU}(\backslash\alpha)y\Rightarrow V_{nU}(A,y)=1))$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU}(\,(\,M_{nU},x|=A \Leftrightarrow V_{nU}(A,x)=1))$;
- $\forall A\in\Phi(\,(\,M_{nU}|=A \Leftrightarrow \forall x\in W_{nU}(\,(\,M_{nU},x|=A)$.

Формулата "A е вярна в семантиката nU", обозначава условието "$\forall\underline{W}\forall M$ $((\underline{W}\in nU\&\underline{W}||\text{-}M)\Rightarrow M|=A)$".

<u>Лема</u> Ако "nE и nU са каноничните семантики", то
"$\forall\underline{W}(\,\underline{W}\in nE\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in nU))\Rightarrow\forall A\in\Phi(A\in nE\Leftrightarrow A\in nU)$".
Доказателство:
Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено,
т.е. nE и nU са каноничните семантики и е
изпълнено "$\forall\underline{W}(\,\underline{W}\in nE\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in nU))$ и $\exists A\in\Phi\neg(A\in nE\Leftrightarrow A\in nU)\,)$",
т.е., "$A\in\Phi\&\neg(A\in nE\Leftrightarrow A\in nU)$ ", но това води до противоречие защото "не е вярно, A е вярна в семантиката nU", точно когато "не е вярно, A е вярна в семантиката nE" защото модалната система е една и съща. □.

2.2 Втори метод на каноничната конструкция

Нека $\underline{nE}$ е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в $\underline{nE}$, тогава и само тогава, когато, "$\underline{nE}\subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A\in\underline{nE}$, то и $A\in x$" и "ако $A\in\underline{nE}$ и $(A\to B)\in\underline{nE}$, то и $B\in\underline{nE}$".

Нека $\underline{nE}$ е логика и x е теория в $\underline{nE}$ и $\alpha\in\Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x=\{ A \mid [\alpha]A\in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в $\underline{nE}$", е точно условието "Ако $\alpha\in\Delta$ и x е теория в nE, то $[\alpha]x$ е теория в nU".

Формулата "Теорията x в $\underline{nE}$ е максимална теория в $\underline{nE}$", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A\in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A\in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика $\underline{nE}$ има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{\underline{nE}}=<W_{\underline{nE}},R_{\underline{nE}}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{\underline{nE}}=<W_{\underline{nE}},R_{\underline{nE}},V_{\underline{nE}}>$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика nE има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nE}=<W_{nE},R_{nE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nE}=<W_{nE},R_{nE},V_{nE}>$;
- $W_{\underline{nE}} = \{y \mid y \in W_{nE} \}\times\{0\}\cup$ $\{y|y\in W_{nE}\&\forall c\in N\forall x\in W_{\underline{nE}}\forall\alpha\in\Delta(x\equiv y\&V_{\underline{nE}}(c,x)=V_{\underline{nE}}(c,y)=1\&xR_{\underline{nE}}(\backslash\alpha)y)\Rightarrow\neg(xR_{\underline{nE}}(\alpha)y))\}\times\{0\}$
- $\forall<x,i>\in W_{\underline{nE}}\forall<y,j>\in W_{\underline{nE}}\forall\alpha\in\Delta\ (<x,i>R_{\underline{nE}}(\alpha)<y,j>\Leftrightarrow(xR_{nE}(\alpha)y\&(xR_{nE}(\backslash\alpha)y\Rightarrow i=j)))$
- $\forall<x,i>\in W_{\underline{nE}}\forall<y,j>\in W_{\underline{nE}}\forall\alpha\in\Delta\ (<x,i>R_{\underline{nE}}(\backslash\alpha)<y,j>\Leftrightarrow(xR_{nE}(\backslash\alpha)y\&(xR_{nE}(\alpha)y\Rightarrow i\neq j)))$
- $\forall p\in\Pi\forall<y,i>\in W_{\underline{nE}}(V_{nE}(p,<y,i>) \Leftrightarrow V_{nE}(p, y))$
- $\forall c\in N\forall<y,i>\in W_{\underline{nE}}(V_{nE}(c,<y,i>) \Leftrightarrow V_{nE}(c, y))$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nU} (V_{nE}(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{nE}(\sim A,x)=0));$
- $\forall A\in\Phi\forall B\in\Phi\forall x\in W_{nE}(V_{nE}(A\wedge B,x) \Leftrightarrow V_{nE}(A,x)=1\ \&\ V_{nE}(B,x)=1);$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nE}(V_{nE}([\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W_{nU}(xR_{nE}(\alpha)y\Rightarrow V_{nE}(A,y)=1))$
- $\forall\alpha\in\Delta\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nE}(V_{nE}([\backslash\alpha]A,x)=1\Leftrightarrow\forall y\in W_{nE}(xR_{nE}(\backslash\alpha)y\Rightarrow V_{nE}(A,y)=1))$
- $\forall A\in\Phi\forall x\in W_{nE}((M_{nE},x|=A \Leftrightarrow V_{nE}(A,x)=1));$
- $\forall A\in\Phi((M_{nE}|=A \Leftrightarrow \forall x\in W_{nE}((M_{nE},x|=A)$

Формулата "A е вярна в семантиката $\underline{nE}$", обозначава условието "$\forall\underline{W}\forall M ((\underline{W}\in \underline{nE}\ \&\underline{W}||\!-M)\Rightarrow M|=A)$".

Лема Ако "nE и $\underline{nE}$ са каноничните семантики", то "$\forall\underline{W}(\underline{W}\in nE\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in\underline{nE}))\Rightarrow\forall A\in\Phi(A\in nE\Leftrightarrow A\in\underline{nE})$".

Доказателство:

Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено,
т.е. nE и $\underline{nE}$ са каноничните семантики и е
изпълнено "$\forall\underline{W}(\underline{W}\in nE\Rightarrow\exists\underline{W}'(\underline{W}'\in\underline{nE}))$ и $\exists A\in\Phi\neg(A\in nE\Leftrightarrow A\in\underline{nE})$",
т.е., "$A\in\Phi\&\neg(A\in nE\Leftrightarrow A\in\underline{nE})$", но това води до противоречие защото "не е вярно, A е вярна в семантиката $\underline{nE}$", точно когато "не е вярно, A е вярна в семантиката nE защото модалната система е една и съща."

2.3 *Трети метод на каноничната конструкция*

Нека $\underline{nU}$ е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в $\underline{nU}$, тогава и само тогава, когато, “$\underline{nU} \subset x$” и “множеството x е затворено отностно правилото (MP)”, т.е. “ако $A \in \underline{nU}$, то и $A \in x$” и “ако $A \in \underline{nU}$ и $(A \rightarrow B) \in \underline{nE}$, то и $B \in \underline{nU}$”.

Нека $\underline{nU}$ е логика и x е теория в $\underline{nU}$ и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: “$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x \}$”.

Формулата “Теорията x е релационно свързана в $\underline{nU}$”, е точно условието “Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в nE, то $[\alpha]x$ е теория в $\underline{nU}$”.

Формулата “Теорията x в $\underline{nU}$ е максимална теория в $\underline{nU}$”, е точно условието “всяка формула A е в сила, ‘$(\sim A \in x)$’ тогава и само тогава когато ‘$\neg(A \in x)$’”.

Формулата “Каноничната семантика $\underline{nU}$ има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nU} = \langle W_{\underline{nU}}, R_{\underline{nU}} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{\underline{nU}} = \langle W_{\underline{nU}}, R_{\underline{nU}}, V_{\underline{nU}} \rangle$”, е обозначено с условията:

- Каноничната семантика nU има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nE} = \langle W_{nU}, R_{nU} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nE} = \langle W_{nU}, R_{nU}, V_{nU} \rangle$;
- $W_{\underline{nU}} = \{ y \mid y \in W_U \} \times \{0\} \cup$ $\{ y \mid y \in W_{nU} \& \forall c \in N \forall x \in W_{nU} \forall \alpha \in \Delta (x \equiv y \& V_{nU}(c,x) = V_{nU}(c,y) = 1 \& x R_{nU}(\backslash\alpha) y) \Rightarrow \neg(x R_{nU}(\alpha) y)) \} \times \{0\}$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{nU}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{nU}} \forall \alpha \in \Delta\ (\langle x,i \rangle R_{\underline{nU}}(\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (x R_{nU}(\alpha) y \& (x R_{nU}(\backslash\alpha) y \Rightarrow i = j)))$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{nU}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{nU}} \forall \alpha \in \Delta\ (\langle x,i \rangle R_{\underline{nU}}(\backslash\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (x R_{nU}(\backslash\alpha) y \& (x R_{nU}(\alpha) y \Rightarrow i \neq j)))$
- $\forall p \in \Pi \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{nU}} (\ V_{nU}(p, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{nU}(p, y))$
- $\forall c \in N \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{nU}} (\ V_{nU}(c, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{nU}(c, y))$
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{\underline{nU}} (\ V_{nU}(A \wedge B, x) \Leftrightarrow V_{\underline{nU}}(A,x) = 1 \ \& \ V_{\underline{nU}}(B,x) = 1\ );$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{nU}} (V_{\underline{nU}}([\alpha]A, x) = 1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{nU}} (x R_{\underline{nU}}(\alpha) y \Rightarrow V_{\underline{nU}}(A,y) = 1)\ )$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{nU}} (V_{\underline{nU}}([\backslash\alpha]A, x) = 1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{nU}} (x R_{\underline{nU}}(\backslash\alpha) y \Rightarrow V_{\underline{nU}}(A,y) = 1))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{nU}} (\ (M_{\underline{nU}}, x \models A \Leftrightarrow V_{\underline{nU}}(A,x) = 1));$
- $\forall A \in \Phi (\ (M_{\underline{nU}} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{\underline{nU}} (\ (M_{\underline{nU}}, x \models A).$

Формулата “A е вярна в семантиката $\underline{nU}$”, обозначава условието “$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in \underline{nU} \ \& \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$”.

Лема Ако “nU и $\underline{nU}$ са канонични семантики”, то “$\forall \underline{W}(\ \underline{W} \in nU \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{nU})) \Rightarrow \forall A \in \Phi(A \in L(nU) \Rightarrow A \in L(\underline{nU}))$”.

Доказателство:

Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. nU и $\underline{nU}$ са канонични семантики и “$\forall \underline{W}(\ \underline{W} \in n\underline{U} \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{nU}))$ и $\exists A \in \Phi(A \in L(nU) \& A \notin L(\underline{nU})\ )$”, т.е., изпълнено ли е $A \in \Phi \& A \in n\underline{U} \& A \notin \underline{nU}$ “, но това води до противоречие защото ако “не е вярно $A \in \underline{nE}$”, то “не е вярно $A \in nE$” защото модалната система е една и съща.□.

2.4 Първи метод на филтрация

Нека fnE е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в fnE, тогава и само тогава, когато, "$fnE \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in fnE$, то и $A \in x$" и "ако $A \in fnE$ и $(A \rightarrow B) \in fnE$, то и $B \in fnE$".

Нека $fn\underline{E}$ е логика и x е теория в fnE и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x=\{ A \mid [\alpha]A \in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в fnE", е точно условието "Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в nE, то $[\alpha]x$ е теория в fnE".

Формулата "Теорията x в fnE е максимална теория в fnE", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A \in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A \in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика fnE има като елемент свързаността $\underline{W}_{fnE}=<W_{fnE},R_{fnE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{fnE}=<W_{fnE},R_{fnE},V_{fnE}>$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика nE има като единствен елемент свързаността $\underline{W}_{nE}=<W_{nE},R_{nE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nE}=<W_{nE},R_{nE},V_{nE}>$;
- $\forall A \in \Phi \forall A' \in o(A)$ (1. A' е "формулата A", или
  2. $\exists A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $\sim A_1$"), или
  3. $\exists A_1 \in o(A)\ \exists A_2 \in o(A)$ (A' е "формулата $A_1 \wedge A_2$"), или
  4. $A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $[\alpha]A_1$"), или
  5. $\exists A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $[\backslash\alpha]A_1$")
- $\forall x \in W_{fnE}(x \subseteq W_{nE})$
- $\exists A \in \Phi \forall A' \in o(A) \forall x \in W_{fnE} \forall y \in x \forall z \in x(V_{nE}(A',y) = V_{nE}(A',z))$
- $\forall x \in W_{fnE} \forall y \in W_{fnE}(xR_{fnE}(\alpha)y \Leftrightarrow \exists\ x' \in x \exists\ y' \in y(x'R_{nE}(\alpha)y'))$
- $\forall x \in W_{fnE} \forall y \in W_{fnE}(xR_{fnE}(\backslash\alpha)y \Leftrightarrow \exists\ x' \in x \exists\ y' \in y(x'R_{nE}(\backslash\alpha)y'))$
- $\forall p \in \Pi \forall x \in W_{fnE}$ ($V_{fnE}(p,x) \Leftrightarrow V_{nE}(p,x)$)
- $\forall c \in N \forall x \in W_{fnE}$ ($V_{fnE}(c,x) \Leftrightarrow V_{nE}(c,x)$)
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{fnE}(V_{fnE}(A \wedge B,x) \Leftrightarrow V_{fnE}(A,x)=1\ \&\ V_{fnE}(B,x)=1)$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{fnE}(V_{fnE}([\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{fnE}(xR_{fnE}(\alpha)y \Rightarrow V_{fnE}(A,y)=1))$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{fnE}(V_{fnE}([\backslash\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{fnE}(xR_{fnE}(\backslash\alpha)y \Rightarrow V_{fnE}(A,y)=1))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{nE}((M_{fnE},x \models A \Leftrightarrow V_{fnE}(A,x)=1))$;
- $\forall A \in \Phi((M_{fnE} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{fnE}((M_{fnE},x \models A)$

Формулата "A е вярна в семантиката fnE", обозначава условието "$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in fnE\ \& \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$".

Лема Ако "nE и fnE са канонични семантики", то "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in nU \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{nU})) \Rightarrow \forall A \in \Phi \forall A' \in o(A)(A' \in nE \Leftrightarrow A' \in fnE)$".

Доказателство:
Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено,
т.е. nE и fnE са канонични семантики и е изпълнимо ли е "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in n\underline{U} \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in n\underline{U}))$ и $\exists A \in \Phi \exists A' \in o(A) \neg (A' \in L(nE) \Leftrightarrow A' \in L(fnE))$", т.е., изпълнено ли е "$A \in \Phi \& A' \in o(A) \& \neg (A' \in nE \Leftrightarrow A' \in fnE)$", но това води до противоречие защото "не е вярно, A' е вярна в семантиката fnE", точно когато "не е вярно, A' е вярна в семантиката nE" защото модалната система е една и съща.□.

2.5 Втори метод на филтрация

Нека fnU е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в fnU, тогава и само тогава, когато, "$fnU \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in fnU$, то и $A \in x$" и "ако $A \in fnU$ и $(A \rightarrow B) \in fnU$, то и $B \in fnU$".

Нека fnU е логика и x е теория в fnU и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x \}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в fnU", е точно условието "Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в nE, то $[\alpha]x$ е теория в fnU".

Формулата "Теорията x в fnU е максимална теория в fnU", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A \in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A \in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика fnU има като елемент свързаността $\underline{W}_{fnE} = <W_{fnE}, R_{fnE}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{fnE} = <W_{fnE}, R_{fnE}, V_{fnE}>$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика nU има като елемент свързаността $\underline{W}_{nU} = <W_{nU}, R_{nU}>$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{nU} = <W_{nU}, R_{nU}, V_{nU}>$;
- $\forall A \in \Phi \forall A' \in o(A)$ (1. A' е "формулата A", или
  2. $\exists A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $\sim A_1$"), или
  3. $\exists A_1 \in o(A)\ \exists A_2 \in o(A)$ (A' е "формулата $A_1 \wedge A_2$"), или
  4. $A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $[\alpha]A_1$"), или
  5. $\exists A_1 \in o(A)$(A' е "формулата $[\backslash\alpha]A_1$")
- $\forall x \in W_{fnU}(x \subseteq W_{nU})$
- $\exists A \in \Phi \forall A' \in o(A) \forall x \in W_{fnU} \forall y \in x \forall z \in x (V_{nU}(A', y) = V_{nU}(A', z))$
- $\forall x \in W_{fnU} \forall y \in W_{fnU}(xR_{fnU}(\alpha)y \Leftrightarrow \exists x' \in x \exists y' \in y (x' R_{nU}(\alpha) y'))$
- $\forall x \in W_{fnU} \forall y \in W_{fnU}(xR_{fnU}(\backslash\alpha)y \Leftrightarrow \exists x' \in x \exists y' \in y (x' R_{nU}(\backslash\alpha) y'))$
- $\forall p \in \Pi \forall x \in W_{fnU}(V_{fnU}(p,x) \Leftrightarrow V_{nU}(p,x))$
- $\forall c \in N \forall x \in W_{fnU}(V_{fnU}(c,x) \Leftrightarrow V_{nU}(c,x))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{nU}$ ($V_{fnU}(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{fnU}(\sim A,x)=0)$);
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{fnU}$ ($V_{fnU}(A \wedge B,x) \Leftrightarrow V_{fnU}(A,x)=1\ \&\ V_{fnU}(B,x)=1$);
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{fnU}(V_{fnU}([\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{nU}(xR_{fnU}(\alpha)y \Rightarrow V_{fnU}(A,y)=1)$)
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{fnU}(V_{fnU}([\backslash\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{fnU}(xR_{fnU}(\backslash\alpha)y \Rightarrow V_{fnU}(A,y)=1))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{fnU}($ ($M_{fnU},x \models A \Leftrightarrow V_{fnU}(A,x)=1))$
- $\forall A \in \Phi($ ($M_{fnU} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{fnU}($ ($M_{fnU},x \models A)$

Формулата "A е вярна в семантиката fnU", обозначава условието "$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in fnU\ \&\ \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$".

<u>Лема</u> Ако "nU и fnU са канонични семантики", то "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in nU \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{nU})) \Rightarrow \forall A \in \Phi \forall A' \in o(A)(A' \in nE \Leftrightarrow A' \in fnU)$".

Доказателство:
Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено,
т.е. nU и fnU са канонични семантики и е изпълнимо ли е “$\forall \underline{W}(\underline{W} \in n\underline{U} \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in f\underline{nU}))$ и $\exists A \in \Phi \exists A' \in o(A) \neg(A' \in L(nU) \Leftrightarrow A' \in L(fnU))$”, т.е., изпълнено ли е “$A \in \Phi \& A' \in o(A) \& \neg(A' \in nU \Leftrightarrow A' \in fnU)$”, но това води до противоречие защото “не е вярно, A’ е вярна в семантиката fnU”, точно когато “не е вярно, A’ е вярна в семантиката nU” защото модалната система е една и съща.□.

2.6 *Трети метод на филтрация*

Нека $\underline{fnE}$ е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в $\underline{fnE}$, тогава и само тогава, когато, "$\underline{fnE} \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in fnE$, то и $A \in x$" и "ако $A \in fnE$ и $(A \to B) \in \underline{fnE}$, то и $B \in \underline{fnE}$".

Нека $\underline{fnE}$ е логика и x е теория в $\underline{fnE}$ и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в $\underline{fnE}$", е точно условието "Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в $\underline{fnE}$, то $[\alpha]x$ е теория в $\underline{fnE}$".

Формулата "Теорията x в $\underline{fnE}$ е максимална теория в $\underline{fnE}$", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A \in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A \in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика $\underline{fnE}$ има като елемент свързаността $\underline{W}_{\underline{fnE}} = \langle W_{\underline{fnE}}, R_{\underline{fnE}} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{\underline{fnE}} = \langle W_{\underline{fnE}}, R_{\underline{fnE}}, V_{\underline{fnE}} \rangle$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика fnE има като елемент свързаността $\underline{W}_{fnE} = \langle W_{fnE}, R_{fnE} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{fnE} = \langle W_{fnE}, R_{fnE}, V_{fnE} \rangle$;
- $W_{\underline{fnE}} = \{y \mid y \in W_{fnE}\} \times \{0\} \cup \{y \mid y \in W_{fnE} \& \forall c \in N \forall x \in W_{fnE} \forall \alpha \in \Delta (x \equiv y \& V_{fnE}(c,x) = V_{fnE}(c,y) = 1 \& xR_{fnE}(\backslash\alpha)y) \Rightarrow \neg(xR_{fnE}(\alpha)y))\} \times \{0\}$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{fnE}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{fnE}} \forall \alpha \in \Delta (\langle x,i \rangle R_{\underline{fnE}}(\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (xR_{fnE}(\alpha)y \& (xR_{fnE}(\backslash\alpha)y \Rightarrow i=j)))$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{fnE}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{fnE}} \forall \alpha \in \Delta (\langle y,i \rangle R_{\underline{fnE}}(\backslash\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (xR_{fnE}(\backslash\alpha)y \& (xR_{fnE}(\alpha)y \Leftrightarrow i \neq j)))$
- $\forall p \in \Pi \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}(p, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{fnE}(p, y))$
- $\forall c \in N \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}(c, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{fnE}(c, y))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}(A,x)=1 \Leftrightarrow V_{\underline{fnE}}(\sim A,x)=0));$
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}(A \wedge B,x) \Leftrightarrow V_{\underline{fnE}}(A,x)=1 \& V_{\underline{fnE}}(B,x)=1);$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}([\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{fnE}} (xR_{\underline{fnE}}(\alpha)y \Rightarrow V_{\underline{fnE}}(A,y)=1))$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnE}} (V_{\underline{fnE}}([\backslash\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{fnE}} (xR_{\underline{fnE}}(\backslash\alpha)y \Rightarrow V_{\underline{fnE}}(A,y)=1))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnE}} ((M_{\underline{fnE}},x \models A \Leftrightarrow V_{\underline{fnE}}(A,x)=1));$
- $\forall A \in \Phi ((M_{\underline{fnE}} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{\underline{fnE}} ((M_{nE},x \models A)$

Формулата "A е вярна в семантиката $\underline{fnE}$", обозначава условието "$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in \underline{fnE} \& \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$".

Лема Ако "fnE и $\underline{fnE}$ са канонични семантики", то "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in fnE \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{fnE})) \Rightarrow \forall A \in \Phi (A \in fnE \Leftrightarrow A \in \underline{fnE})$".

Доказателство:

Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. fnE и $\underline{fnE}$ са канонични семантики и изпълнено ли е "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in fnE \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{fnE}))$ и $\exists A \in \Phi(\neg(A' \in fnE \Leftrightarrow A' \in \underline{fnE})$", т.е., изпълнено ли е "$A \in \Phi \& \neg(A' \in fnE \Leftrightarrow A' \in \underline{fnE})$ ", но това води до противоречие защото "не е вярно, A' е вярна в семантиката $\underline{fnE}$", точно когато "не е вярно, A' е вярна в семантиката fnE" защото разглежданата модална система е една и съща.□.

2.7 *Четвърти метод на филтрация*

Нека $\underline{fnU}$ е логика. Ще казваме че множеството от формули x е теория в $\underline{fnU}$, тогава и само тогава, когато, "$\underline{fnU} \subseteq x$" и "множеството x е затворено относно правилото (MP)", т.е. "ако $A \in fnE$, то и $A \in x$" и "ако $A \in fnE$ и $(A \rightarrow B) \in \underline{fnU}$, то и $B \in \underline{fnU}$".

Нека $\underline{fnU}$ е логика и x е теория в $\underline{fnU}$ и $\alpha \in \Delta$ тогава е в сила: "$[\alpha]x = \{ A \mid [\alpha]A \in x\}$".

Формулата "Теорията x е релационно свързана в $\underline{fnU}$", е точно условието "Ако $\alpha \in \Delta$ и x е теория в $\underline{fnU}$, то $[\alpha]x$ е теория в $\underline{fnU}$".

Формулата "Теорията x в $\underline{fnU}$ е максимална теория в $\underline{fnU}$", е точно условието "всяка формула A е в сила, '$(\sim A \in x)$' тогава и само тогава когато '$\neg(A \in x)$'".

Формулата "Каноничната семантика $\underline{fnU}$ има като елемент свързаността $\underline{W}_{\underline{fnU}} = \langle W_{\underline{fnU}}, R_{\underline{fnU}} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{\underline{fnU}} = \langle W_{\underline{fnU}}, R_{\underline{fnU}}, V_{\underline{fnU}} \rangle$", е обозначено с условията:

- Каноничната семантика fnU има като елемент свързаността $\underline{W}_{fnU} = \langle W_{fnU}, R_{fnU} \rangle$ която свързаност поражда каноничен модел $M_{fnU} = \langle W_{fnU}, R_{fnU}, V_{fnU} \rangle$;
- $W_{\underline{fnU}} = \{y \mid y \in W_{fnU}\} \times \{0\} \cup \{y \mid y \in W_{fnU} \& \forall c \in N \forall x \in W_{fnU} \forall \alpha \in \Delta (x \equiv y \& V_{fnU}(c,x) = V_{fnU}(c,y) = 1 \& xR_{fnU}(\backslash\alpha)y) \Rightarrow \neg(xR_{fnU}(\alpha)y))\} \times \{0\}$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{fnU}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{fnU}} \forall \alpha \in \Delta (\langle x,i \rangle R_{\underline{fnU}}(\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (xR_{fnU}(\alpha)y \& (xR_{fnU}(\backslash\alpha)y \Rightarrow i=j)))$
- $\forall \langle x,i \rangle \in W_{\underline{fnU}} \forall \langle y,j \rangle \in W_{\underline{fnU}} \forall \alpha \in \Delta (\langle x,i \rangle R_{\underline{fnU}}(\backslash\alpha) \langle y,j \rangle \Leftrightarrow (xR_{fnU}(\backslash\alpha)y \& (xR_{fnU}(\alpha)y \Rightarrow i \neq j)))$
- $\forall p \in \Pi \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}}(p, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{fnU}(p, y))$
- $\forall c \in N \forall \langle y,i \rangle \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}}(c, \langle y,i \rangle) \Leftrightarrow V_{fnU}(c, y))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}} (A,x)=1 \Leftrightarrow V_{\underline{fnU}}(\sim A,x)=0))$;
- $\forall A \in \Phi \forall B \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}}(A \wedge B,x) \Leftrightarrow V_{\underline{fnU}}(A,x)=1 \ \& \ V_{\underline{fnU}}(B,x)=1)$;
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}}([\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{fnU}} (xR_{\underline{fnU}}(\alpha)y \Rightarrow V_{\underline{fnU}}(A,y)=1))$
- $\forall \alpha \in \Delta \forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnU}} (V_{\underline{fnU}}([\backslash\alpha]A,x)=1 \Leftrightarrow \forall y \in W_{\underline{fnU}} (xR_{\underline{fnU}}(\backslash\alpha)y \Rightarrow V_{\underline{fnU}}(A,y)=1))$
- $\forall A \in \Phi \forall x \in W_{\underline{fnU}} ((M_{\underline{fnU}},x \models A \Leftrightarrow V_{\underline{fnU}}(A,x)=1))$;
- $\forall A \in \Phi ((M_{\underline{fnU}} \models A \Leftrightarrow \forall x \in W_{\underline{fnU}} ((M_{nE},x \models A)$

Формулата "A е вярна в семантиката $\underline{fnU}$", обозначава условието "$\forall \underline{W} \forall M ((\underline{W} \in \underline{fnU} \ \& \underline{W} \Vdash M) \Rightarrow M \models A)$".

<u>Лема</u> Ако "fnU и $\underline{fnU}$ са канонични семантики", то "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in fnU \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{fnU})) \Rightarrow \forall A \in \Phi (A \in fnU \Leftrightarrow A \in \underline{fnU})$".

Доказателство:

Да допуснем, че твърдението на лемата не е изпълнено, т.е. fnU и $\underline{fnU}$ са канонични семантики и изпълнено ли е "$\forall \underline{W}(\underline{W} \in fnU \Rightarrow \exists \underline{W}'(\underline{W}' \in \underline{fnU}))$ и $\exists A \in \Phi$

$(\neg(A' \in fnU \Leftrightarrow A' \in \underline{fnU}))$", т.е., изпълнено ли е "$A \in \Phi \& \neg(A' \in fnU \Leftrightarrow A\ ' \in \underline{fnU})$ ", но това води до противоречие защото "не е вярно, A е вярна в семантиката $\underline{fnU}$", точно когато "не е вярно, A е вярна в семантиката fnU" защото разглежданата модална система е една и съща.□.

3 Заключение

Основният мотив тази дипломна работа да е озаглавена “модални езици, с имена” е в проявения, и от мен, интерес към тази област и полученото съгласие. За мен, посочените източници [1]-[4] имат и въвеждащ и стилообразуващ характер.

Формулираното в увода, като задачи на дипломната работа, е представено като възможни, контекстни решения, в няколко различни но свързани семантики: E, U и т.н...

В царството на “ математически светове” като ориентир съм изпозвал и [7] и [8].

Литература

1. "Лекции по Модални Логики. Семестър Лято-Есен'1983"
   Четени от доц. Димитър Вакарелов

2. "Лекции PDL Лято-Есен'1986"
   Четени от доц. Г.Гаргов

3. "Упражнения по математическа логика. Семестър 1985"
   Провеждани от гл.Петьо Петков

4. "ЗАМЕТКИ О ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКЕ ЛУКАСЕВИЧА"
   Comptes rendus de l'Academia bulgare des Sciences
   Tome 25, № 11, 1972
   Д.И.Вакарелов

5. Modal Definability In Enriched Languages, Draft, August 1988
   Valentin Goranko, Faculty of Mathematics at Sofia University

6. Бимодални логики с константи. Чернова, 1988
   Огнян Захариев

7. http://plato.stanford.edu/entries/logic-dynamic/#PDLInt

8. Modal Logic, draft edition, September 1998
   Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, Yde Venema