С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т
"СВ.   К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И"

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А
Катедра по Математическа логика и приложенията ѝ

Александър Ангелов Терзииванов

ПРИЛОЖЕНИЯ НА МАРКЕРОВИТЕ РАЗШИРЕНИЯ

Научен ръководител
доц. д-р Александра Соскова

СОФИЯ, 2014

Съдържание

Глава 1

Тюрингова и номерационна сводимост, номерации

Тази глава ще посветим на основни дефиниции и факти, които ще бъдат използвани в следващите глави. Ще представим накратко Тюринговата и номерационната сводимости и някои техни свойства, които ще използваме. Също така ще въведем операцията обединение на структури, ще дадем дефиниция за номерация на структура и ще докажем няколко леми и свойства, които ще използваме в Глава 3 и Глава 4.

1.1. Основни означения

Множеството на естествените числа ще отбелязваме с $\mathbb{N}$ като ще приемаме и числото 0 за естествено.

Нека $A \subseteq \mathbb{N}$. Характеристичната функция на множеството A ще означаваме сχ_A, т.е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, \text{ ако } x \in A \\ 1, \text{ ако } x \notin A \end{cases}$$

С φ_e ще означаваме частично рекурсивната функция с гьоделев индекс e. Съответно с φ_e^A ще означаваме частичната функция рекурсивна в A с гьоделев индекс e. С W_e^B ще означаваме множеството $W_e^B = dom(\varphi_e^B)$. Ще казваме, че множеството A е рекурсивно номеруемо в B, ако съществува индекс e такъв, че $A = W_e^B$. С W_e, където e е индекс, ще отбелязваме полуразрешимите множества.

Нека D е крайно множество от естествни числа. Каноничен код на крайното множество D ще наричаме естественото число $v = \sum\limits_{x \in D} 2^x$. Обратно, ако знаем, че v е каноничен код на крайно множество, то това множество ще отбелязваме с D_v.

За произволни естествени числа x и y с $\langle x, y\rangle$ ще означаваме числото $2^x(2y+1)-1$, което ще наричаме код на наредената двойка (x, y).

Ако A и B са множества с $A \oplus B$ ще означаваме множеството

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x+1 \mid x \in B\},$$

1.2. Тюрингова сводимост

Нека ξ и ψ са едноаргументни тотални функции в естествените числа. Ще казваме, че функцията ξ е тюрингово сводима към функцията ψ, ако съществува естествено число e, такова че $\xi = \varphi_e^{\psi}$. Това ще означаваме $\xi \leq_{\mathrm{T}} \psi$.

Нека $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Ще казваме, че множеството A е тюрингово сводимо към множеството B, ако $\chi_A \leq_{\mathrm{T}} \chi_B$. Това ще означаваме $A \leq_{\mathrm{T}} B$.

Казваме, че две множества са тюрингово еквивалентни, когато са тюрингово сводими едно към друго т.е.

$$A \equiv_{\mathrm{T}} B \iff A \leq_{\mathrm{T}} B \ \&\ B \leq_{\mathrm{T}} A.$$

Ще отблежим едно свойство даващо връзката между тюринговата сводимост и рекурсивната номеруемост:

Нека $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, A е рекурсивно номеруемо в B и $B \leq_{\mathrm{T}} C$. Тогава A е рекурсивно номеруемо в C.

Нека $A \subseteq \mathbb{N}$, с $A'_T = K^A$ ще означаваме тюринговият скок на множеството A, където

$$K^A = \{\langle e, x\rangle \mid !\{e\}^A(x)\}.$$

Можем да дефинираме n-ти тюрингов скок на множеството A чрез итериране на горната дефиниция. За n-тия скок ще използваме означението $A_{\mathrm{T}}^{(n)}$.

Следващото свойство дава връзката между рекурсивната номеруемост в множество и тюринговата сводимост в скока му:
Нека $A, B \subseteq \mathbb{N}$ и A е рекурсивно номеруемо в B, тогава $A \leq_{\mathrm{T}} B'_T$.

1.3. Номерационна сводимост

Всяко полуразрешимо множество W_a определя оператор за номерационна сводимост $W_a : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ по следния начин:

Нека X и Y са множества от естествени числа, тогава:

$$X = W_a(Y) \iff (\forall x)(x \in X \iff (\exists v)(\langle x, v\rangle \in W_a \ \&\ D_v \subseteq Y)),$$

където с D_v означаваме крайното множество с каноничен код v.

За всеки две множества $A, B \subseteq \mathbb{N}$, казваме че A е номерационно сводимо към B, ако съществува полуразрешимо множество W, такова че $A = W(B)$. Това ще означаваме $A \leq_{\mathrm{e}} B$. Казваме, че две множества са номерационно еквивалентни, когато са номерационно сводими едно към друго т.е.

$$A \equiv_{\mathrm{e}} B \iff A \leq_{\mathrm{e}} B \ \&\ B \leq_{\mathrm{e}} A.$$

Нека $A \subseteq \mathbb{N}$. Полагаме $A^+ = A \oplus (\mathbb{N} \setminus A)$. Множеството A ще наричаме тотално, ако $A \equiv_e A^+$.

Ще отбележим две свойства на номерационната сводимост:
Нека $A, B \subseteq \mathbb{N}$:

(a) A е рекурсивно номеруемо в $B \iff A \leq_{\mathrm{e}} B^+$
Ако B е тотално множество, то A е рекурсивно номеруемо в $B \iff A \leq_{\mathrm{e}} B$.

(б) $A \leq_{\mathrm{T}} B \iff A^+ \leq_{\mathrm{e}} B^+$

Ако A и B са тотални множества, то $A \leq_{\mathrm{T}} B \iff A \leq_{\mathrm{e}} B$.

Номерационният скок е дефиниран в [**4**]. Тук ще използваме една негова m-еквивалентна дефиниция.

Нека A е множество от естествени числа. Полагаме $L_A = \{\langle a, x\rangle \mid x \in W_a(A)\}$. Тогава номерационният скок на множеството A ще наричаме множестовото $A'_e = L_A^+$. Очевидно за всяко $A \subseteq \mathbb{N}$, номерационният скок A'_e е тотално множество.

В [**2**](Твърдение 2.5.) е доказано следното свойство на номерационния скок, даващо връзката му с тюринговия скок на тотални множества:

За всяко множество $A \subseteq \mathbb{N}$, $(A^+)'_e \equiv_{\mathrm{e}} (A'_T)^+$ равномерно спрямо множеството A.

Използвайки този резултат може лесно да се види, че:

Ако $A \subseteq \mathbb{N}$ е тотално множество, то $A'_e \equiv_{\mathrm{T}} A'_T$.

1.4. Номерации, обединение на структури

В тази част ще разгледаме дефинициите за номерация на множество, структура, редица от структури и обединение на две структури.

Дефиниция 1.4.1. *Нека A е изброимо множество. Номерация на A ще наричаме всяка тотална сюрективна функция $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Дефиниция 1.4.2. *Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s)$ е изброима структура. Номерация f на структурата $\mathfrak{A}$ ще наричаме всяка номерация на универсума A. Нека $R \subseteq A^a$, тогава*

$$f^{-1}(R) = \{\langle x_1, \ldots, x_a\rangle \mid (f(x_1), \ldots, f(x_a)) \in R\}.$$

Полагаме $f^{-1}(\mathfrak{A}) = f^{-1}(R_1) \oplus \ldots \oplus f^{-1}(R_s)$.

Забележка 1. *Разглеждаме и неинективни номерации на структури за да можем лесно да обединим всички използвани резултати. Например частта от доказателството на Твърдение 15 от* [**1**]*, която ще представим и допълним, е формулирана за произволни номерации.*

Дефиниция 1.4.3. *Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s)$ е изброима структура. Ще наричаме структурата $\mathfrak{A}$ тотална, ако за всеки предикат $R_i \subseteq A^k$ съществува предикат R_j, такъв че $R_i = A^k \setminus R_j$.*

Забележка 2. *Нека $\mathfrak{A}$ е тотална структура и f е нейна номерация. Тогава $f^{-1}(\mathfrak{A})$ е тотално множество.*

Дефиниция 1.4.4. *Нека $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ е редица от структури, A_i е универсум на $\mathfrak{A}_i$ и $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Номерация на редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ наричаме всяка номерация на множеството A.*

Нека X е множество и f и g са номерации, които са дефинирани поне върху X. Често ще разглеждаме множества от вида $E = \{\langle x, y\rangle \mid f(x) = g(y) \in X\}$, затова въвеждаме следното означение за E: $E_X^{f,g}$.

Едно свойство на тези множества, което често ще използваме, е:

Свойство 1.4.5. *Нека $A \subseteq \mathbb{N}$, f, h и g са номерации. Нека $E_X^{f,g}$ и $E_Y^{g,h}$ са рекурсивно номеруеми в A. Следователно $E_{X\cap Y}^{f,h}$ е рекурсивно номеруемо в A.*

Доказателство: За множеството $E_{X\cap Y}^{f,h}$ имаме следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E_{X\cap Y}^{f,h} \iff (\exists z \in \mathbb{N})(\langle x, z\rangle \in E_X^{f,g} \;\&\; \langle z, y\rangle \in E_Y^{g,h})$$

Следователно $E_{X\cap Y}^{f,h}$ е рекурсивно номеруемо в A. □

Лема 1.4.6. *Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, ..., R_s, =)$ е изброима структура,. За всяка номерация f на $\mathfrak{A}$, съществува инективна номерация g на $\mathfrak{A}$ със следните свойства:*

(1) $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A})$

(2) $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $f^{-1}(\mathfrak{A})$.

Доказателство: Дефинираме функция $m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ по следния начин:

$$m(0) = 0$$
$$m(i+1) = \mu z[(\forall k \leq i)(\langle m(k), z\rangle \notin f^{-1}(=_{\mathfrak{A}}))].$$

Очевидно $m \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A})$. Полагаме $g = \lambda x. f(m(x))$ и следователно g е инективна номерация на $\mathfrak{A}$.

За всеки предикат $R_i \subseteq A^k$ е изпълнено:

$$\langle x_1, \ldots, x_k\rangle \in g^{-1}(R_i) \iff \langle m(x_1), \ldots, m(x_k)\rangle \in f^{-1}(R_i).$$

Следователно $g^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A})$.

Първообразът на равенството можем да представим така:

$$g^{-1}(=_{\mathfrak{A}}) = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\},$$

защото g е инективна номерация.

Следователно $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A})$.

Построението на функцията m ни дава следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E_A^{f,g} \iff f(x) = g(y) \in A \iff (\exists z)(z = m(y) \;\& \;\langle z, x\rangle \in f^{-1}(=_{\mathfrak{A}})).$$

Следователно $E_A^{f,g}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{A})$. □

Ще завършим тази част с дефиниция на операцията обединение на две структури и едно нейно свойство. Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s, =)$ и $\mathfrak{B} = (B; P_1, \ldots, P_t, =)$ са изброими структури в езиците $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$.

Ще предположим, че $\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2 = \{=\}$ и $A \cap B = \emptyset$. Нека $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2 \cup \{A, B\}$, където A и B са унарни предикати.

Дефиниция 1.4.7. *Обединение на структурите $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ще наричаме $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} = (A \cup B; R_1, \dots, R_s, P_1, \dots, P_t, A, B, =)$ в езика $\mathfrak{L}$, където*

(а) Предикатът A е верен само върху елементите на множеството A и съответно B е верен само върху елементите на B;

(б) Предикатите R_i са дефинирани върху A както в структурата $\mathfrak{A}$ и са неверни за всички елементи извън A. Аналогично за предикатите P_j.

Лема 1.4.8. *Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, ..., R_s, =)$ и $\mathfrak{B} = (B; P_1, ..., P_t, =)$ са изброими структури, такива че $A \cap B = \emptyset$. За всяка номерация f на $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, съществува инективна номерация g на $\mathfrak{A}$ със следните свойства:*

(1) $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$

(2) $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$.

Доказателство: По дефиниция в структурата $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ имаме предикат за универсума A. Следователно $f^{-1}(A) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$. Нека $x_0 \in f^{-1}(A)$. Дефинираме функция $m : \mathbb{N} \longrightarrow f^{-1}(A)$ по следния начин:

$$m(0) = x_0$$
$$m(i+1) = (\mu z \in f^{-1}(A))[(\forall k \leq i)(\langle m(k), z\rangle \notin f^{-1}(=_{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}}))].$$

Очевидно $m \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$. Полагаме $g = \lambda x.f(m(x))$ и следователно g е инективна номерация на $\mathfrak{A}$.

За всеки предикат $R_i \subseteq A^k$ е изпълнено:

$$\langle x_1, \dots, x_k\rangle \in g^{-1}(R_i) \iff \langle m(x_1), \dots, m(x_k)\rangle \in f^{-1}(R_i).$$

Следователно $g^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$.

Първообразът на равенството можем да представим така:

$$g^{-1}(=_{\mathfrak{A}}) = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\},$$

защото g е инективна номерация.

Следователно $g^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$.

Построението на функцията m ни дава следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E_A^{f,g} \iff f(x) = g(y) \in A \iff (\exists z)(z = m(y)\ \& \\ \langle z, x\rangle \in f^{-1}(=_{\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}})).$$

Следователно $E_A^{f,g}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$. □

Забележка 3. *Нека структурите $\mathfrak{A} = (A; R_1, \dots, R_s, =)$ и $\mathfrak{B} = (B; P_1, \dots, P_t, =)$ са изброими, $A \cap B = \emptyset$ и f е номерация на структурата $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. Тогава $f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) = f^{-1}(R_1) \oplus \dots \oplus f^{-1}(R_s) \oplus$*

$f^{-1}(P_1) \oplus \ldots \oplus f^{-1}(P_t) \oplus f^{-1}(A) \oplus f^{-1}(B)$. *За съкращение това ще записваме по следния начин:* $f^{-1}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) = f^{-1}(\mathfrak{A}) \oplus f^{-1}(\mathfrak{B}) \oplus f^{-1}(A) \oplus f^{-1}(B)$.

Глава 2

Скок на структура, Маркерови и консервативни разширения

В тази глава ще въведем основните понятия и резултати нужни за останалата част от изложението.

2.1. Скок на структура

Ще въведем понятието скок на структура следвайки изложението в [**1**].

2.1.1. Московакисово разширение на структура $\mathfrak{A}$. Първо следвайки [**5**] въвеждаме Московакисово разширение на структура.

Нека $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s)$ е изброима структура и нека равенството е измежду предикатите $R_1, \ldots, R_s$.

Нека 0 е обект, който не принадлежи на A, и Π е операция за наредени двойки, избрана така, че нито 0, нито който и да е елемент на A е наредена двойка. Нека A^* е най-малкото множество съдържащо всички елементи на $A_0 = A \cup \{0\}$ и затворено относно операцията Π.

На всяко естествено число n съпоставяме елемента n^* от A^* по следния начин:

$$\begin{aligned} 0^* &= 0; \\ (n+1)^* &= \Pi(0, n^*). \end{aligned}$$

Множеството от всички елементи n^* ще отбелязваме с N^*.

Нека L и R са функции дефинирани над A^* и изпълняващи следните условия:

$$\begin{aligned} &L(0) = R(0) = 0; \\ &(\forall t \in A)(L(t) = R(t) = 1^*); \\ &(\forall s, t \in A^*)(L(\Pi(s,t)) = s \; \& \; R(\Pi(s,t)) = t). \end{aligned}$$

Операцията Π ни позволява да кодираме крайни редици по следния начин:

Нека $\Pi_1(t_1) = t_1$ и
$\Pi_{n+1}(t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}) = \Pi(t_1, \Pi_n(t_2, \ldots, t_{n+1}))$
за всяко $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1} \in A^*$.

За всеки предикат R_i на структурата $\mathfrak{A}$ дефинираме съответстващ предикат R_i^* такъв, че $R_i^* \subseteq A^*$ по следния начин:

$$R_i^*(t) \iff (\exists a_1 \in A)\dots(\exists a_{r_i} \in A)(t = \Pi_{r_i}(a_1, \dots, a_{r_i}) \ \& \\ R_i(a_1, \dots, a_{r_i})).$$

Дефиниция 2.1.1. *Московакисово разширение на структурата $\mathfrak{A}$ ще наричаме структурата*

$$\mathfrak{A}^* = (A^*; A_0, R_1^*, \dots, R_s^*, G_\Pi, G_L, G_R, =),$$

където G_Π, G_L и G_R са съответно графиките на функциите Π, L и R.

Забележка 4. *За всеки две множества A и B, такива че $A \subseteq B$, ще смятаме, че $A^* \subseteq B^*$. Това е възможно, понеже можем да използваме избраните за B, 0 и Π, и за получаването на множеството A^*.*

В [**1**] е доказана следната лема(Лема 7.):

Лема 2.1.2. *Нека f е номерация на структурата $\mathfrak{A}$. Тогава съществува номерация f^* на структурата $\mathfrak{A}^*$ такава, че:*

$$(f^*)^{-1}(\mathfrak{A}^*) \equiv_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A}).$$

Тъй като ще използваме номерацията f^* в последствие, ще представим тази част от доказателството:

Функцията $J(x, y) = 2^{x+1}.(2y + 1)$ е ефективно кодиране на наредените двойки от естествени числа. По индукция дефинираме:

$$\begin{array}{l} J_1(x_1) = x_1 \\ J_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = J(x_1, J_n(x_2, \dots, x_{n+1})) \\ \text{ за всички } x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{N} \end{array}$$

Нека l и r са изчислими функции изпълняващи следните условия:

$$\begin{array}{l} l(0) = r(0) = 0, \\ l(2x + 1) = r(2x + 1) = 2 = J(0, 0), \\ l(J(x, y)) = x \ \& \ r(J(x, y)) = y. \end{array}$$

Дефинираме f^* индуктивно:

$$\begin{array}{ll} f^*(0) & = 0^*, \\ f^*(2x + 1) & = f(x), \\ f^*(J(x, y)) & = \Pi(f^*(x), f^*(y)). \end{array}$$

Забележка 5. *Ако f е инективна номерация на $\mathfrak{A}$, то f^* е инективна номерация на $\mathfrak{A}^*$.*

2.1.2. Аналог на множеството на Клини K за структури. Нека f е номерация на изброима структура $\mathfrak{A}$ и нека e и x са естествени числа. Дефинираме моделираща релация по следния начин:

$$f \models F_e(x) \iff x \in W_e^{f^{-1}(\mathfrak{A})}.$$
$$f \models \neg F_e(x) \iff f \not\models F_e(x).$$

Крайни функции, които имат за дефиниционна област подмножество на $\mathbb{N}$ и за множество от стойности подмножество на A, ще наричаме крайни части. С моделиращата релация "$\models$"ще свържем форсинг с условия всички крайни части подредени по стандартен начин. Крайните части ще отбелязваме с буквите δ, τ, ρ.

Нека δ е крайна част и $R \subseteq A^n$ е предикат от структурата $\mathfrak{A}$. Тогава с $\delta^{-1}(R)$ ще отбелязваме крайната функция, приемаща стойности в множеството $\{0, 1\}$, такава че:

$\delta^{-1}(R)(u) \simeq 1 \iff (\exists x_1, \dots x_n \in dom(\delta))(u = \langle x_1, \dots, x_n \rangle\ \&$
$(\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)) \in R)$ и
$\delta^{-1}(R)(u) \simeq 0 \iff (\exists x_1, \dots x_n \in dom(\delta))(u = \langle x_1, \dots, x_n \rangle\ \&$
$(\delta(x_1), \dots, \delta(x_n)) \notin R)$.

$\delta^{-1}(\mathfrak{A})$ ще използваме за да означаваме крайната функция $\delta^{-1}(R_1) \oplus \dots \oplus \delta^{-1}(R_s)$.

Нека δ е крайна част и $e \in \mathbb{N}$, тогава с W_e^δ ще означаваме множеството от всички x, такива че изчислението $\{e\}^\delta(x)$ завършва успешно. Ще приемаме, че ако по време на изчислението оракулът δ е извикан с аргумент извън дефиниционната си област, то изчислението завършва неуспешно.

Дефиниция 2.1.3. *За всички $e, x \in \mathbb{N}$ и за всяка крайна част δ, дефинираме форсиращата релация $\delta \Vdash F_e(x)$ и $\delta \Vdash \neg F_e(x)$ по следния начин:*

$$\delta \Vdash F_e(x) \iff x \in W_e^{\delta^{-1}(\mathfrak{A})}$$
$$\delta \Vdash \neg F_e(x) \iff (\forall \tau \supseteq \delta)(\tau \nVdash F_e(x)).$$

Лесно могат да се докажат следните две свойства на форсинга:

(F1) $\delta \Vdash (\neg)F_e(x)\ \&\ \delta \subseteq \tau \Rightarrow \tau \Vdash (\neg)F_e(x)$.

(F2) За всяка номерация f на структурата $\mathfrak{A}$,

$$f \models F_e(x) \iff (\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x)).$$

На всяка крайна част $\tau \neq \emptyset$, такава че $\mathrm{dom}(\tau) = \{x_1, \dots, x_n\}$ и $\tau(x_1) = s_1, \dots, \tau(x_n) = s_n$, съпоставяме елемента $\tau^* = \Pi_n(\Pi(x_1^*, s_1), \dots, \Pi(x_n^*, s_n))$ от A^*. Нека $\tau^* = 0$ ако $\tau = \emptyset$.

Дефинираме

$$K_{\mathfrak{A}} = \{\Pi_3(\delta^*, e^*, x^*) \mid (\exists \tau \supseteq \delta)(\tau \Vdash F_e(x))\ \&\ e^*, x^* \in N^*\}.$$

Дефиниция 2.1.4. *Нека* $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s, =)$ *е изброима структура. Тогава структурата*

$$\mathfrak{A}' = (A^*, A_0, R_1^*, \ldots, R_s^*, G_\Pi, G_L, G_R, =, K_\mathfrak{A})$$

ще наричаме скок на структурата $\mathfrak{A}$.

Вече можем да дефинираме и един основен обект, от който ще се интересуваме:

Дефиниция 2.1.5. *Нека* $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ *е редица от структури. Тогава n-ти полином на редицата* $\vec{\mathfrak{A}}$ *ще наричаме структурата* $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$, *дефинирана индуктивно по следния начин:*

(1) $\mathfrak{P}_0(\vec{\mathfrak{A}}) = \mathfrak{A}_0$

(2) $\mathfrak{P}_{n+1}(\vec{\mathfrak{A}}) = (\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}}))' \oplus \mathfrak{A}_{n+1}$

Забележка 6. *За да удоволетворим условията на дефиницията за обединение на структури, че универсумите са непресичащи се множества, ще разглеждаме само редици* $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$, *такива че структурата* $\mathfrak{A}_i$ *е с универсум* A_i, *и е изпълнено условие за универсумите* $(\forall i)(\forall j)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$. *За такива редици можем да искаме, за всяко* $n \in \mathbb{N}$, *в Московакисовото разширение на* $\mathfrak{P}_n$ *множеството* $|\mathfrak{P}_n|^*$ *да бъде дефинирано, така че* $|\mathfrak{P}_n|^* \cap |\mathfrak{A}_{n+1}| = \emptyset$.

2.1.3. Връзки между номерации на структура и номерации на нейния скок.

Дефиниция 2.1.6. *Номерация* f *на структура* $\mathfrak{A}$ *наричаме генерична, ако за всеки* $e, x \in \mathbb{N}$:

$$(\exists \tau \subseteq f)(\tau \Vdash F_e(x) \vee \tau \Vdash \neg F_e(x)).$$

Следващите две леми ще докажем, следвайки доказателствата в [**1**](Твърдение 13 и Твърдение 15), като ще пропуснем частите, които не ни интересуват, и ще допълним резултите със съществуване на съответни множества E.

Лема 2.1.7. *Нека* $\mathfrak{A}$ *е изброима структура с универсум* A. *За всяка номерация* f *на структурата* $\mathfrak{A}$ *съществува инективна номерация* g *на* $\mathfrak{A}'$, *такава че:*

(1) $g^{-1}(\mathfrak{A}') \leq_\mathrm{T} (f^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$

(2) $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $(f^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$

Доказателство: От Лема 1.4.6 съществува инективна номерация h на структурата $\mathfrak{A}$ такава, че

$$h^{-1}(\mathfrak{A}) \leq_\mathrm{T} f^{-1}(\mathfrak{A})$$
$$E_A^{f,h} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f^{-1}(\mathfrak{A}).$$

Понеже номерацията h е инективна, то и h^* е инективна.

Множеството N^* дефинирахме по следния начин: $N^* = \{x^* : x \in \mathbb{N}\}$. За всяко естествено число x полагаме $x^\# = (h^*)^{-1}(x^*)$

и нека $N^{\#} = \{x^{\#} \mid x \in \mathbb{N}\} = (h^*)^{-1}(N^*)$. Ясно е, че $0^{\#} = 0$ и $(x+1)^{\#} = J(0, x^{\#})$, откъдето следва, че $N^{\#}$ е изчислимо множество. Съществуват изчислими функции n_1 и n_2 такива, че за всяко естествено число x, $n_1(x^{\#}) = x$ и $n_2(x) = x^{\#}$.

С Δ ще отбелязваме множеството на всички крайни части в $\mathfrak{A}$. За всяка крайна част τ, съществува единствен елемент τ^* на множеството A^* и единствено число $\tau^{\#} = (h^*)^{-1}(\tau^*)$.

Нека $\Delta^* = \{\tau^* \mid \tau \in \Delta\}$ и $\Delta^{\#} = \{\tau^{\#} \mid \tau \in \Delta\} = (h^*)^{-1}(\Delta^*)$.

Лесно може да се докаже, че $\tau^{\#}$ принадлежи на $\Delta^{\#}$ тогава и само тогава когато $\tau^{\#} = 0$ или за някое $n \geq 1$ съществуват n различни елемента $x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}$ на $N^{\#}$ и n нечетни числа $y_1, \dots, y_n$, такива че

$$\tau^{\#} = J_n(J(x_1^{\#}, y_1), \dots, J(x_n^{\#}, y_n)).$$

Следователно множеството $\Delta^{\#}$ също е изчислимо.

Нека $\tau^{\#} = J_n(J(x_1^{\#}, y_1), \dots, J(x_n^{\#}, y_n)) \in \Delta^{\#}$, тогава

$$dom(\tau^{\#}) = \{x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#}\}$$

и за всяко $x_i^{\#} \in dom(\tau^{\#})$, полагаме $\tau^{\#}(x_i^{\#}) \simeq y_i$.

Ще приемаме, че $dom(\tau^{\#}) = \emptyset$ точно когато $\tau^{\#} = 0$.

Забелязваме, че $dom(\tau^{\#}) = \{x^{\#} \mid x \in dom(\tau)\}$ и за всяко $x \in dom(\tau)$, $h^*(\tau^{\#}(x^{\#})) \simeq h(\tau^{\#}(x^{\#})/2) \simeq \tau(x)$.

Нека R е подмножество на A^n и $\tau^{\#} \in \Delta^{\#}$, полагаме $(\tau^{\#})^{-1}(R) = \tau^{-1}(R)$. Тогава имаме следните две еквивалентности

$$(\tau^{\#})^{-1}(R)(u) \simeq 1 \iff (\exists x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#} \in dom(\tau^{\#}))(u = \langle x_1, \dots, x_n\rangle \ \& \ \langle \tau^{\#}(x_1^{\#})/2, \dots, \tau^{\#}(x_n^{\#})/2\rangle \in h^{-1}(R))$$

и

$$(\tau^{\#})^{-1}(R)(u) \simeq 0 \iff (\exists x_1^{\#}, \dots, x_n^{\#} \in dom(\tau^{\#}))(u = \langle x_1, \dots, x_n\rangle \ \& \ \langle \tau^{\#}(x_1^{\#})/2, \dots, \tau^{\#}(x_n^{\#})/2\rangle \notin h^{-1}(R)).$$

Полагаме $(\tau^{\#})^{-1}(\mathfrak{A}) = \tau^{-1}(\mathfrak{A})$. Тогава

$$(\tau^{\#})^{-1}(\mathfrak{A}) = (\tau^{\#})^{-1}(R_1) \oplus \cdots \oplus (\tau^{\#})^{-1}(R_s).$$

От горните две еквивалентности следва, че съществува изчислима функция ρ, такава че за всяко $\tau \in \Delta$, $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) = \{\rho(\tau^{\#})\}^{h^{-1}(\mathfrak{A})}$.

Също така съществува изчислим предикат P, такъв че за всяко $\tau, \delta \in \Delta$, $P(\tau^{\#}, \delta^{\#}) \simeq 1 \iff \tau \subseteq \delta$.

Така получаваме следното:

$$(h^*)^{-1}(K_{\mathfrak{A}}) = \{J_3(\delta^{\#}, e^{\#}, x^{\#}) : (\exists \tau \in \Delta)(\delta \subseteq \tau \ \& \ \tau \Vdash F_e(x))\} = \{J_3(\delta^{\#}, e^{\#}, x^{\#}) : (\exists \tau^{\#} \in \Delta^{\#})(P(\delta^{\#}, \tau^{\#}) \simeq 1 \ \& \ x \in W_e^{\{\rho(\tau^{\#})\}^{h^{-1}(\mathfrak{A})}})\}.$$

Следователно $(h^*)^{-1}(K_{\mathfrak{A}})$ е рекурсивно номеруемо в $h^{-1}(\mathfrak{A})$, а от това директно следва, че $(h^*)^{-1}(K_{\mathfrak{A}}) \leq_{\mathrm{T}} (h^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$.

Полагаме търсената номерация g да бъде номерацията h^*. Тогава $g^{-1}(\mathfrak{A}') \leq_{\mathrm{T}} (h^{-1}(\mathfrak{A}))'_T \leq_{\mathrm{T}} (f^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$.

Очевидно $E_A^{h,g} = \{\langle x, 2x+1\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$ е разрешимо.

Множеството $E_A^{f,g}$ можем да представим по следния начин: $\langle x, y\rangle \in E_A^{f,g} \iff (\exists z)(\langle x, z\rangle \in E_A^{f,h} \;\&\; \langle z, y\rangle \in E_A^{h,g})$.

Множеството $E_A^{f,g}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{A})$ и следователно е рекурсивно номеруемо в $(f^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$. □

Лема 2.1.8. *Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура с универсум A. За всяка номерация f на структурата $\mathfrak{A}'$ съществува номерация g на $\mathfrak{A}$, такава че:*

(1) $(g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A}')$
(2) $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $f^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Доказателство: От Лема 1.4.6 знаем, че за f съществува инективна номерация h на структурата $\mathfrak{A}'$, такава че:

$$h^{-1}(\mathfrak{A}') \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A}')$$
$$E_{A^*}^{f,h} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f^{-1}(\mathfrak{A}').$$

Полагаме $h^{-1}(A) = A^{\#}$ и $h^{-1}(K_{\mathfrak{A}}) = K^{\#}$. Очевидно множествата $A^{\#}$ и $K^{\#}$ са изчислими в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Дефинираме изчислимата в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ функция J по следния начин: $J(x, y) = h^{-1}(\Pi(f(x), f(y)))$. Очевидно съществуват изчислими в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ функции l и r, такива че за всеки $x, y \in \mathbb{N}$:

$$l(J(x, y)) = x \text{ и } r(J(x, y)) = y.$$

Полагаме $J_1(x_1) = x_1$ и $J_{n+1}(x_1, ..., x_{n+1}) = J(x_1, J_n(x_2, ..., x_{n+1}))$. За всяко естествено число x разглеждаме елемента x^* на A^* и полагаме $x^{\#} = h^{-1}(x^*)$. Нека $N^{\#} = \{x^{\#} \mid x \in \mathbb{N}\}$. Тогава $N^{\#}$ е изчислимо в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ и съществуват изчислими в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ функции n_1 и n_2 такива, че за всяко естествено число x, $n_1(x^{\#}) = x$ и $n_2(x) = x^{\#}$.

Нека t е частична номерация на $\mathbb{N}$ в A, с $t^{\#}$ ще означаваме единствената частична номерация на $N^{\#}$ в $A^{\#}$ удоволетворяваща за всички естествени числа x равенството:

$$t^{\#}(x^{\#}) \simeq h^{-1}(t(x)).$$

За всеки две частични номерации t_1 и t_2 на $\mathbb{N}$ в A е изпълнено, че:

$$t_1 \subseteq t_2 \iff t_1^{\#} \subseteq t_2^{\#}.$$

За всички крайни части τ полагаме $\tau^{\#} = f^{-1}(\tau^*)$. С Δ ще означаваме множеството от всички крайни части и нека $\Delta^{\#} = \{\tau^{\#} \mid \tau \in \Delta\}$. Тогава $\Delta^{\#}$ е изчислимо в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Както в предишната лема можем да заключим, че съществува изчислима в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ функция ρ, такава че за всяко $\tau \in \Delta$, $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) = \{\rho(\tau^{\#})\}^{h^{-1}(\mathfrak{A})}$.

Ще построим номерацията g като генерична номерация, така че $g^{\#}$ да е изчислима в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Номерацията ще строим на стъпки. На всяка стъпка ще дефинираме крайната част τ_s, така че $\tau_s \subseteq \tau_{s+1}$ и ще положим $g = \cup_s \tau_s$.

От конструкцията ще следва, че функцията $\lambda_s.\tau_s^{\#}$ е изчислима в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ и следователно и номерацията $g^{\#}$ също е изчислима в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Ще разглеждаме два вида стъпки. На стъпките $s = 2r$ ще осигуряваме, че номерацията g е тотална и сюрективна. На стъпките $s = 2r+1$ ще осигуряваме, че g е генерична номерация.

Полагаме $\tau_0 = \emptyset$. Нека вече сме дефинирали τ_s.

(а) Случай $s = 2r$. Нека x е най-малкото естествено число, такова че $x \in N^{\#}$, което не принадлежи на $\mathrm{dom}(\tau_s)$ и нека y е най-малко естествено число, такова че $y \in A^{\#}$, което не принадлежи на множеството от стойности на τ_s. Полагаме $\tau_{s+1}(x) = y$ и $\tau_{s+1}(z) \simeq \tau_s(z)$ за всяко $z \neq x$.

(б) Случай $s = 2\langle e, x\rangle + 1$. Разглеждаме множеството $X_{\langle e,x\rangle} = \{\delta \mid \delta \Vdash F_e(x)\}$. Проверяваме дали има крайна част $\delta \in X_{\langle e,x\rangle}$, която разширява τ_s. Това е еквивалентно на $J_3(\tau^{\#}, e^{\#}, x^{\#}) \in K^{\#}$. Ако отговорът е отрицателен, то $\tau_s \Vdash \neg F_e(x)$. Полагаме $\tau_{s+1} = \tau_s$. При положителен отговор трябва да намерим $\delta^{\#}$, такова че $\tau_s^{\#} \subseteq \delta^{\#}$ и

$$x \in W_e^{\{\rho(\delta^{\#})\}^{h^{-1}(\mathfrak{A}')}}.$$

Това можем да направим ефективно в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ като номерираме всички наредени тройки $(\delta^{\#}, s_1, s_2)$, където $\tau_s^{\#} \subseteq \delta^{\#}$ и $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$, и проверяваме дали:

$$x \in W_{e,s_1}^{\{\rho(\delta^{\#})\}_{s_2}^{h^{-1}(\mathfrak{A}')}}.$$

Полагаме $\tau_{s+1} = \delta$.

Край на конструкцията

Полагаме $g = \cup_s \tau_s$. От генеричността на g следва:

$$x \in (g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T \iff g \models F_x(x) \iff (\exists \tau \subseteq g)(\tau \Vdash F_x(x)) \iff (\exists \tau^{\#} \subseteq g^{\#})(x \in W_e^{\{\rho(\tau^{\#})\}^{h^{-1}(\mathfrak{A}')}}).$$

и

$$x \in \mathbb{N} \setminus (g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T \iff g \models \neg F_x(x) \iff (\exists \tau \subseteq g)(\tau \Vdash \neg F_x(x)) \iff (\exists \tau^{\#} \subseteq g^{\#})(J_3(\tau^{\#}, e^{\#}, x^{\#}) \notin K^{\#}).$$

Понеже $g^{\#}$ е изчислима в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$, то $(g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$ и $\mathbb{N} \setminus (g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T$ са рекурсивно номеруемо в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$ и следователно $(g^{-1}(\mathfrak{A}))'_T \leq_{\mathrm{T}} h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Разглеждаме свойството на номерацията $g^{\#}$, че за всички естествени числа z имаме равенството:

$$g^{\#}(z^{\#}) \simeq h^{-1}(g(z)).$$

Чрез него можем да изчислим множеството $E_A^{h,g}$ по следния начин:

$$\langle x, y\rangle \in E_A^{h,g} \iff h(x) = g(y) \iff g^{\#}(y^{\#}) = x.$$

Следователно множеството $E_A^{h,g}$ е рекурсивно номеруемо в $h^{-1}(\mathfrak{A}')$.

Множеството $E_A^{f,g}$ можем да представим по следния начин:
$\langle x, y\rangle \in E_A^{f,g} \iff (\exists z)(\langle x, z\rangle \in E_A^{f,h} \ \&\ \langle z, y\rangle \in E_A^{h,g})$.

Очевидно $E_A^{f,g}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{A}')$. $\square$

Следствие 2.1.9. *За всяко $n \in \mathbb{N}$ и всяка номерация f на $\mathfrak{M}^{(n)}$ съществува номерация f_n на $\mathfrak{M}$, такава че:*

(1) $(f_n^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n)} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$

(2) $E_{|\mathfrak{M}|}^{f,f_n}$ *е рекурсивно номеруемо в* $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$.

Доказателство: Доказателството ще извършим с индукция по n.

За случая $n = 0$ имаме, че $\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}$.

Нека f е произволна номерация на $\mathfrak{M}$. Тогава за нея от Лема 1.4.6 имаме номерация f_0 изпълняваща исканите условия.

Нека твърдението е вярно за някое $n \in \mathbb{N}$.

Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$. От дефиницията на скок на структура имаме, че $\mathfrak{M}^{(n+1)} = (\mathfrak{M}^{(n)})'$. Нека f е произволна номерация на $(\mathfrak{M}^{(n)})'$. Тогава за нея от Лема 2.1.8 съществува номерация f_1, такава че:

$(f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}((\mathfrak{M}^{(n)})')$
$E_{|\mathfrak{M}^{(n)}|}^{f,f_1}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}((\mathfrak{M}^{(n)})')$.

От индукционното предположение за f_1 съществува номерация f_n на $\mathfrak{M}$, такава че

$(f_n^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n)} \leq_{\mathrm{T}} f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$
$E_{|\mathfrak{M}|}^{f_1,f_n}$ е рекурсивно номеруемо в $f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$.

Полагаме $f_{n+1} = f_n$.

Следователно $((f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n)})'_T \leq_{\mathrm{T}} (f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}((\mathfrak{M}^{(n)})')$ откъдето получаваме, че $(f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n+1)} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

Понеже $\mid \mathfrak{M} \mid \subseteq \mid \mathfrak{M}^{(n)} \mid$ и $E_{|\mathfrak{M}^{(n)}|}^{f,f_1}$ и $E_{|\mathfrak{M}|}^{f_1,f_n}$ са рекурсивно номеруеми в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$, то $E_{|\mathfrak{M}|}^{f,f_{n+1}}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. $\square$

2.2. Консервативни разширения

В тази част ще въведем Σ_n определимост в структура, понятието консервативно разширение и връзката между двете. Ще превеждаме английският термин "relatively intrinsically като "относно същността си".

2.2.1. Σ_n определими множества в $\mathfrak{A}$ и относно същността си Σ_n множества в $\mathfrak{A}$. Безкрайните изчислими формули са въведени от Аш [**6**]. Най-общо казано, безкрайните изчислими формули са безкрайни формули с конюнкции и дизюнкции на рекурсивно номеруеми множества от формули. Ще дадем неформална дефиниция на множеството от изчислими безкрайни Σ_n формули в езика на структура $\mathfrak{A}$, които ще означаваме Σ_n^c.

- Σ_0^c и Π_0^c формулите са крайните безкванторни формули.
- Нека $n > 0$.
  (а) Σ_n^c формула $\varphi(\bar{x})$ е дизюнкция на рекурсивно номеруемо множество от формули, които са от вида $\exists \bar{y} \psi$, където ψ е Π_k^c, за някое $k < n$, а $\bar{y}$ съдържа всички променливи на ψ, които не са в $\bar{x}$.
  (б) Π_n^c формула $\varphi(\bar{x})$ е конюнкция на рекурсивно номеруемо множество от формули, които са от вида $\forall \bar{y} \psi$, където ψ е Σ_k^c, за някое $k < n$, а $\bar{y}$ съдържа всички променливи на ψ, които не са в $\bar{x}$.

Дефиниция 2.2.1. *Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура с универсум A и $R \subseteq A^k$. Казваме, че R е Σ_n^c определимо в структурата $\mathfrak{A}$, ако съществува Σ_n^c формула $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ и краен брой параметри $\bar{a}$ от A, такива че:*

$$\bar{b} \in R \iff \mathfrak{A} \models \psi(\bar{b}, \bar{a}).$$

Дефиниция 2.2.2. *Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура с универсум A и $R \subseteq A^k$. Казваме, че R е относно същността си Σ_{n+1} в $\mathfrak{A}$ ако за всяка номерация f на $\mathfrak{A}$, $f^{-1}(R)$ е рекурсивно номеруемо в $(f^{-1}(\mathfrak{A}))^{(n)}_{\mathrm{T}}$.*

Връзката между предишните две дефиниции се дава от следния важен резултат, доказан от Аш, Найт, Манаси, Слеман [**7**] и независимо от Чисхолм [**8**]:

Теорема 2.2.3. *(Ash-Knight-Manasse-Slaman, Chisholm). Нека $\mathfrak{A}$ е изброима структура с универсум A и $R \subseteq A^k$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:*

(1) *R е относно същността си Σ_n в $\mathfrak{A}$*
(2) *R е Σ_n^c определимо в структурата $\mathfrak{A}$.*

2.2.2. Консервативни разширения. Ще въведем понятието за консервативно разширение и две негови свойства доказани в [**3**], но използвайки представената тук дефиниция за номерация на структура, а не използваната в [**3**]. Въпреки разликата в дефинициите двата резултата, от които се интересуваме, остават валидни.

Дефиниция 2.2.4. *Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са изброими структури с универсуми A и B, като $A \subseteq B$.*

(1) $\mathfrak{A} \Rightarrow_n^k \mathfrak{B}$, *ако за всяка номерация* g *на* $\mathfrak{B}$ *съществува номерация* f *на* $\mathfrak{A}$, *такава че* $(f^{-1}(\mathfrak{A}))_{\mathrm{T}}^{(k)} \leq_{\mathrm{T}} (g^{-1}(\mathfrak{B}))_{\mathrm{T}}^{(n)}$ *и множеството* $E_A^{g,f}$ *е рекурсивно номеруемо в* $(g^{-1}(\mathfrak{B}))_{\mathrm{T}}^{(n)}$.

(2) $\mathfrak{A} \Leftarrow_n^k \mathfrak{B}$, *ако за всяка номерация* f *на* $\mathfrak{A}$ *съществува номерация* g *на* $\mathfrak{B}$, *такава че* $(g^{-1}(\mathfrak{B}))_{\mathrm{T}}^{(n)} \leq_{\mathrm{T}} (f^{-1}(\mathfrak{A}))_{\mathrm{T}}^{(k)}$ *и множеството* $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $(f^{-1}(\mathfrak{A}))_{\mathrm{T}}^{(k)}$.

(3) $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_n^k \mathfrak{B}$, *ако* $\mathfrak{A} \Rightarrow_n^k \mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{A} \Leftarrow_n^k \mathfrak{B}$. *Казваме, че* $\mathfrak{B}$ *е* (k,n)*-консервативно разширение на* $\mathfrak{A}$.

Теорема 2.2.5. *Нека* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *са изброими структури с универсуми* A *и* B, *като* $A \subseteq B$.

(1) *Ако* $\mathfrak{A} \Rightarrow_n^k \mathfrak{B}$, *то* $(\forall X \subseteq A)(X$ *е* Σ_{k+1}^c *определимо в* $\mathfrak{A} \to X$ *е* Σ_{n+1}^c *определимо в* $\mathfrak{B})$;

(2) *Ако* $\mathfrak{A} \Leftarrow_n^k \mathfrak{B}$, *то* $(\forall X \subseteq A)(X$ *е* Σ_{n+1}^c *определимо в* $\mathfrak{B} \to X$ *е* Σ_{k+1}^c *определимо в* $\mathfrak{A})$;

(3) *Ако* $\mathfrak{A} \Leftrightarrow_n^k \mathfrak{B}$, *то* $(\forall X \subseteq A)(X$ *е* Σ_{k+1}^c *определимо в* $\mathfrak{A} \leftrightarrow X$ *е* Σ_{n+1}^c *определимо в* $\mathfrak{B})$.

Твърдение 2.2.6. *За всяка изброима структура* $\mathfrak{A}$ *и всяко естествено число* n, *е изпълнено:*

$$\mathfrak{A} \Leftrightarrow_0^n \mathfrak{A}^{(n)}.$$

2.3. Маркерови разширения

В тази част ще въведем понятието Маркерово разширение на редица от структури, следвайки изложението в [**2**].

Нека $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ е редица от изброими структури. Нека структурата $\mathfrak{A}_i$ има вида $\mathfrak{A}_i = (A_i; P_1^i, \ldots, P_{m_i}^i)$, където всеки предикат P_k^i е безкрайно подмножество на $A_i^{r_k^i}$ за всяко $1 \leq k \leq m_i$. Освен това, както вече споменахме, ще искаме универсумите на структурите от редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ да бъдат непресичащи се, т.е. $(\forall i)(\forall j)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$. Предполагаме, че съществува изчислима функция ρ, такава че за всяко i имаме, че $\rho(i) = \langle r_1^i, \ldots, r_{m_i}^i \rangle$.

Нека $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$. Фиксираме R подмножество на A^r. За всяко $n \geq 0$ ще дефинираме n-тото Маркерово разширение $\mathfrak{M}_n(R)$ на R, както следва: Избираме $n+1$ нови и непресичащи се множества $X_0^R, \ldots, X_n^R$ и дефинираме функциите $h_0^R, \ldots, h_n^R$, така че следните условия да са изпълнени:

- h_0^R е биективна функция от R върху X_0^R.
- h_1^R е биективна функция от $(A^r \times X_0^R) \setminus G_{h_0^R}$ върху X_1^R.

  $\ldots$
- h_n^R е биективна функция от $(A^r \times X_0^R \times \cdots \times X_{n-1}^R) \setminus G_{h_{n-1}^R}$ върху X_n^R.

Полагаме $M^R_k = G_{h^R_k}$ за $k \leq n$ и полагаме структурата

$$\mathfrak{M}_n(R) = (A \cup \bigcup_{k \leq n} X^R_k; M^R_n, X^R_0, \ldots, X^R_n).$$

Множествата $X^R_0, \ldots, X^R_n$ се наричат *компаньони* на разширението $\mathfrak{M}_n(R)$.

За така дефинираните структури имаме, че R е Σ_{n+1} определимо в $\mathfrak{M}_n(R)$ по равномерен начин. Наистина, за всяко $\bar{a} \in A^r$,

$$R(\bar{a}) \iff (\exists x_0 \in X^R_0)(M^R_0(\bar{a}, x_0))$$

и за всеки $k < n, x_0 \in X^R_0, \ldots, x_k \in X^R_k$,

$$M^R_k(\bar{a}, x_0, \ldots, x_k) \iff (\forall x_{k+1} \in X^R_{k+1})(\neg M^R_{k+1}(\bar{a}, x_0, \ldots, x_k, x_{k+1})).$$

За да дефинираме n-тото Маркерово разширение на структурата $\mathfrak{A}_n$ конструираме стуктурите $\mathfrak{M}_n(A_n), \mathfrak{M}_n(P^n_1), \ldots, \mathfrak{M}_n(P^n_{m_n})$ с непресичащи се компаньони и нека

$$\mathfrak{M}_n(\mathfrak{A}_n) = (|\mathfrak{M}_n(A_n)| \cup \bigcup_{1 \leq k \leq m_n} |\mathfrak{M}_n(P^n_k)|; M^{A_n}_n, M^{P_1}_n, \ldots, M^{P^n_{m_n}}_n, \\ X^{A_n}_0, \ldots, X^{P^n_{m_n}}_n).$$

Накрая конструираме за всяко $n \geq 0$, n-тото Маркерово разширение $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{A}_n)$ на структурата $\mathfrak{A}_n$, така че всички компаньони да са непресичащи се и нека $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})$ е структурата с универсум обединението на универсумите на структурите $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{A}_n)$, $n < \omega$, и с множество от предикати състоящо се от A, $=$ и всички предикати на структурите $\mathfrak{M}_n(\mathfrak{A}_n)$, $n < \omega$.

Въпреки, че структурата $\mathfrak{M}$ има безкрайно много предикати, тя е структура в изчислим език от първи ред. Освен това за всяко n универсумът A_n и предикатите $P^n_1, \ldots, P^n_{m_n}$ на структурата $\mathfrak{A}_n$ са Σ_{n+1} определими в $\mathfrak{M}$ равномерно спрямо n.

Нека f е номерация на универсума на структурата $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})$. Полагаме

$$f^{-1}(\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})) = f^{-1}(A) \oplus \bigoplus_n [f^{-1}(M^{A_n}_n) \oplus f^{-1}(M^{P^n_1}_n) \oplus \ldots \oplus f^{-1}(M^{P^n_{m_n}}_n)] \\ \oplus \bigoplus_n [f^{-1}(X^{A_n}_0) \oplus \ldots \oplus f^{-1}(X^{P^n_{m_n}}_n)].$$

2.3.1. $\leq_{\mathrm{n}}$ определими множества в редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ и Σ_n определими множества в Маркеровото ѝ разширение.

Дефиниция 2.3.1. *Ще казваме, че редицата от множества от естествени числа $\mathcal{X} = \{X_n\}_{n<\omega}$ е рекурсивно номеруемо в множеството B, ако $(\forall n)(X_n$ е рекурсивно номеруемо в $B^{(n)}_{\mathrm{T}}$ равномерно спрямо $n)$.*

Дефиниция 2.3.2. *Нека X е множество от естествени числа, а $\mathcal{Y}$ е редица от множества от естествени числа, тогава $X \leq_{\mathrm{n}} \mathcal{Y}$, ако за всяко множество B, такова че $\mathcal{Y}$ е рекурсивно номеруемо в B, е изпълнено X е Σ^0_{n+1} определимо в B.*

Дефиниция 2.3.3. *Нека $\mathcal{Y} = \{Y_n\}_{n<\omega}$ е редица от множества от естествени числа. Скок редица $\mathcal{P}(\mathcal{Y}) = \{\mathcal{P}_n(\mathcal{Y})\}_{n<\omega}$ на редицата $\mathcal{Y}$ дефинираме по индукция:*

(i) $\mathcal{P}_0(\mathcal{Y}) = Y_0$

(ii) $\mathcal{P}_{n+1}(\mathcal{Y}) = (\mathcal{P}_n(\mathcal{Y}))'_e \oplus Y_{n+1}$.

Ще отбележим едно важно свойство на $\leq_{\mathrm{n}}$ определимите множества доказано в [**2**].

Следствие 2.3.4. *Нека $X \subseteq \mathbb{N}$ и нека $\mathcal{Y}$ е редица от множества от естествени числа. Тогава $X \leq_{\mathrm{n}} \mathcal{Y} \iff X \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{P}_n(\mathcal{Y})$.*

Дефиниция 2.3.5. *Нека $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ е редица от изброими структури, като $\mathfrak{A}_i$ е с универсум A_i. Нека $A = \bigcup_{i\in\omega} A_i$, $R \subseteq A$ и $n \geq 0$. Казваме, че $R \leq_{\mathrm{n}} \vec{\mathfrak{A}}$, ако за всяка номерация g на $\mathfrak{A}$, $g^{-1}(R) \leq_{\mathrm{n}} g^{-1}(\vec{\mathfrak{A}})$, т.е. $g^{-1}(R) \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{P}_n(g^{-1}(\vec{\mathfrak{A}}))$.*

Едно много важно свойство на структурата $\mathfrak{M}$, доказано в [**2**], е следното:

Твърдение 2.3.6. *Нека $R \subseteq A$ и $n \geq 0$. Тогава $R \leq_{\mathrm{n}} \vec{\mathfrak{A}} \iff R$ е относно същността си Σ_{n+1} в $\mathfrak{M}$.*

Глава 3

Еквивалентност относно редица от структури $\vec{\mathfrak{A}}$

Основната ни цел ще бъде да покажем един вид слаба, но валидна за всички редици $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$, еквивалентност на структурите $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})^{(n)}$ и $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$.

Дефиниция 3.0.7. *Нека* $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ *е редица от стуктури с равенство, като всяка от тях е с универсум множество* A_i. *Нека* $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{C}$ *са структури, за които* $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subseteq |\mathfrak{B}|$ *и* $\bigcup_{i=0}^{n} A_i \subseteq |\mathfrak{C}|$. *Ще казваме, че структурата* $\mathfrak{B}$ *е* n*-еквивалентна на структурата* $\mathfrak{C}$ *спрямо редицата* $\vec{\mathfrak{A}}$*, ако:*

$$(\forall X \subseteq \textstyle\bigcup_{i=0}^{n} A_i)(X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{B} \iff X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{C}).$$

Това ще записваме по следния начин: $\mathfrak{B} \equiv_{\vec{\mathfrak{A}}}^{n} \mathfrak{C}$.

Ние ще разглеждаме редици $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ от тотални структури с равенство. Освен това ще предполагаме, че всички структури от редицата са с универсуми A_i, за които $(\forall i)(\forall j)(i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$. За такива редици ще докажем, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ структурите $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})^{(n)}$ и $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$ са n- еквивалентни спрямо редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ т.е.:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})^{(n)} \equiv_{\vec{\mathfrak{A}}}^{n} \mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})).$$

Нека фиксираме една такава редица $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$ за тази глава. $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})$ ще съкращаваме като $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$ ще съкращаваме като $\mathfrak{P}_n$.

3.1. Връзки между номерациите на редица $\vec{\mathfrak{A}}$ и номерациите на n-тия ѝ полином

Нека f е номерация на редицата от структури $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$, като $\mathfrak{A}_i$ е с универсум A_i, тогава с $f^{-1}(\vec{\mathfrak{A}})$ ще означаваме редицата $\{f^{-1}(\mathfrak{A}_i)\}_{i\in\omega}$. Множеството $\mathcal{P}_n(f^{-1}(\vec{\mathfrak{A}}))$ ще пишем, за по-кратко, като $\mathcal{P}_n^f$. Лесно може да се докаже, че ако структурата $\mathfrak{A}_n$ е тотална, то $\mathcal{P}_n^f$ е тотално множество. Освен това множеството $\mathcal{P}_n^f$ зависи само от първите n члена на редицата и затова, когато имаме номерация g на $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$ отново ще означаваме множеството $\mathcal{P}_n(\mathcal{Y})$, където редицата $\mathcal{Y} = \{g^{-1}(\mathfrak{A}_0), g^{-1}(\mathfrak{A}_1), \dots, g^{-1}(\mathfrak{A}_n), \emptyset, \emptyset, \dots\}$, с $\mathcal{P}_n^g$.

Лема 3.1.1. *За всяка номерация* f *на* $\vec{\mathfrak{A}}$ *и всяко* $n \in \mathbb{N}$, *съществува инективна номерация* f_n *на* $\mathfrak{A}_n$ *със следните свойства:*

(1) $f_n^{-1}(\mathfrak{A}_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_n^f$

(2) $E^{f,f_n}_{A_n}$ *е рекурсивно номеруемо в* $\mathcal{P}^f_n$.

Доказателство: Нека $n \in \mathbb{N}$. От дефиницията на $\mathcal{P}^f_n$ е очевидно, че за всеки предикат на структурата $\mathfrak{A}_n$, първообразът му спрямо номерацията f е изчислим в $\mathcal{P}^f_n$.

Първо ще покажем, че $f^{-1}(A_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$.

Множеството $f^{-1}(A_n)$ можем да представим, използвайки предиката $=_{\mathfrak{A}_n}$, по следния начин:

$$f^{-1}(A_n) = \{x \mid \langle x, x\rangle \in f^{-1}(=_{\mathfrak{A}_n})\}.$$

Понеже $f^{-1}(=_{\mathfrak{A}_n}) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$, то $f^{-1}(A_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$.

Нека $x_n \in f^{-1}(A_n)$. Сега можем да построим функция $m_n : \mathbb{N} \longrightarrow f^{-1}(A_n)$ по следния начин:

$$m_n(0) = x_n$$
$$m_n(i+1) = (\mu z \in f^{-1}(A_n))[(\forall k \leq i)(\langle m(k), z\rangle \notin f^{-1}(=_{\mathfrak{A}_n}))].$$

Очевидно $m_n \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$.

Полагаме $f_n = \lambda x.f(m_n(x))$ и следователно f_n е инективна номерация на $\mathfrak{A}_n$.

За всеки предикат $R_i \subseteq A^s$ на структурата $\mathfrak{A}_n$ е изпълнено:

$$\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \in f_n^{-1}(R_i) \iff \langle m_n(x_1), \ldots, m_n(x_s)\rangle \in f^{-1}(R_i).$$

Следователно $f_n^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$.

Първообразът на равенството можем да представим така:

$$f_n^{-1}(=_{\mathfrak{A}_n}) = \{\langle x, x\rangle \mid x \in \mathbb{N}\},$$

защото f_n е инективна номерация.

Следователно $f_n^{-1}(\mathfrak{A}_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$.

Построението на функцията m_n ни дава следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E^{f,f_n}_{A_n} \iff f(x) = f_n(y) \in A_n \iff (\exists z)(z = m_n(y)\ \&\ \langle z, x\rangle \in f^{-1}(=_{\mathfrak{A}_n})).$$

Следователно $E^{f,f_n}_{A_n}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}^f_n$. □

Твърдение 3.1.2. *За всяка номерация f на $\vec{\mathfrak{A}}$ и всяко $n \in \mathbb{N}$ съществува инективна номерация g_n на $\mathfrak{P}_n$, такава че:*

(1) $g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_n$

(2) $E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ *е рекурсивно номеруемо в* $\mathcal{P}^f_n$.

Доказателство: Твърдението ще докажем с индукция по n.

За случая $n = 0$ от дефинициите имаме, че $\mathcal{P}^f_0 = f^{-1}(\mathfrak{A}_0)$ и $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_0$. Нека f е произволна номерация на $\vec{\mathfrak{A}}$. Можем да приложим Лема 3.1.1 и следователно за f съществува инективна номерация f_0 на структурата $\mathfrak{A}_0$, такава че:

$$f_0^{-1}(\mathfrak{A}_0) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_0$$
$$E^{f,f_0}_{A_0} \text{ е рекурсивно номеруемо в } \mathcal{P}^f_0.$$

Полагаме $g_0 = f_0$ и очевидно тази номерация изпълнява и двете изисквания.

Нека твърдението е вярно за някое $n \in \mathbb{N}$.

Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$. Нека f е произволна номерация на $\vec{\mathfrak{A}}$. Нека за нея g_n е номерацията на $\mathfrak{P}_n$ и $E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ множеството от индукционното предположение. По дефиниция имаме $\mathcal{P}^f_{n+1} = (\mathcal{P}^f_n)'_e \oplus f^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1})$ и $\mathfrak{P}_{n+1} = \mathfrak{P}'_n \oplus \mathfrak{A}_{n+1}$.

Прилагаме Лема 2.1.7 за номерацията g_n, т.е. съществува инективна номерация g_1 на $\mathfrak{P}'_n$, такава че:

$$\begin{array}{l} g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \\ E^{g_n,g_1}_{|\mathfrak{P}_n|} \text{ е рекурсивно номеруемо в } (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T. \end{array}$$

Използвайки факта, че $(\mathcal{P}^f_n)'_T \equiv_{\mathrm{T}} (\mathcal{P}^f_n)'_e$, защото $\mathcal{P}^f_n$ е тотално множество, получаваме следното:

$$g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} (\mathcal{P}^f_n)'_e \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1}.$$

Знаем, че $E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ и $E^{g_n,g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ са рекурсивно номеруеми в $(g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T$ и $\bigcup_{i=0}^n A_i \subseteq |\mathfrak{P}_n|$, следователно $E^{f,g_1}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}^f_{n+1}$.

Остава да добавим структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$. Нека за номерацията f приложим отново Лема 3.1.1, но този път относно структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$, тогава съществува нейна инективна номерация f_{n+1}, такава че:

$$\begin{array}{l} f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1} \\ E^{f,f_{n+1}}_{A_{n+1}} \text{ е рекурсивно номеруемо в } \mathcal{P}^f_{n+1}. \end{array}$$

Полагаме номерацията g_{n+1} да бъде:

$$\begin{array}{l} g_{n+1}(2x) = g_1(x) \\ g_{n+1}(2x+1) = f_{n+1}(x). \end{array}$$

Очевидно g_{n+1} е инективна номерация на $\mathfrak{P}_{n+1}$. Тогава имаме:

$$\begin{array}{l} g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{P}'_n) = \{2x \mid x \in g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n)\}, \text{ т.е. } g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1} \\ g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) = \{2x+1 \mid x \in f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1})\}, \text{ т.е. } g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1}. \end{array}$$

Освен това $g_{n+1}^{-1}(|\mathfrak{P}'_n|) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ и $g_{n+1}^{-1}(A_{n+1}) = \{2x+1 \mid x \in \mathbb{N}\}$ са изчислими множества. Следователно

$$g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \oplus g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \oplus g_{n+1}^{-1}(|\mathfrak{P}'_n|) \oplus g_{n+1}^{-1}(A_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1}.$$

Тогава $g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}^f_{n+1}$. Остава да удоволетворим условието за множеството $E^{f,g_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i}$:

$$\begin{array}{l} \langle x, 2y\rangle \in E^{f,g_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i} \iff \langle x, y\rangle \in E^{f,g_1}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \\ \langle x, 2y+1\rangle \in E^{f,g_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i} \iff \langle x, y\rangle \in E^{f,f_{n+1}}_{A_{n+1}}. \end{array}$$

Следователно $E^{f,g_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}^f_{n+1}$. $\square$

Твърдение 3.1.3. *Нека $n \in \mathbb{N}$. За всяка номерация g на $\mathfrak{P}_n$ съществува номерация f_n на множеството $\bigcup_{i=0}^n A_i$, такава че:*

(1) $\mathcal{P}_n^{f_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$
(2) $E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ *е рекурсивно номеруемо в* $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$.

Доказателство: Твърдението ще докажем с индукция по n.

За случая $n = 0$, от дефинициите имаме $\mathcal{P}_0^{f_0} = f_0^{-1}(\mathfrak{A}_0)$ и $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_0$.

Нека g е произволна номерация на $\mathfrak{P}_0$, тогава тя е номерация на структурата $\mathfrak{A}_0$. Полагаме $f_0 = g$. Очевидно $\mathcal{P}_0^{f_0} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_0)$. Остава да удоволетворим изискването за E_A^{g,f_0}. Това множество можем да представим по следния начин: $E_A^{g,f_0} = \{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in g^{-1}(=_{\mathfrak{A}_0})\}$. Очевидно E_A^{g,f_0} е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_0)$.

Нека твърдението е вярно за някое $n \in \mathbb{N}$.

Ще докажем, че твърдението е вярно за $n + 1$. По дефиниция имаме $\mathfrak{P}_{n+1} = \mathfrak{P}'_n \oplus \mathfrak{A}_{n+1}$ и $\mathcal{P}_{n+1}^{f_{n+1}} = (\mathcal{P}_n^{f_{n+1}})'_e \oplus f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1})$. Нека g е произволна номерация на $\mathfrak{P}_{n+1}$. Можем да приложим Лема 1.4.8 за номерацията g относно структурата $\mathfrak{P}'_n$, тогава за g съществува номерация g' на $\mathfrak{P}'_n$, такава че:

$$(g')^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$$
$E^{g,g'}_{|\mathfrak{P}'_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$.

Прилагаме Лема 2.1.8 за номерацията g', т.е. съществува номерация g_1 на $\mathfrak{P}_n$, такава че:

$$(g_1^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} (g')^{-1}(\mathfrak{P}'_n)$$
$E^{g',g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $g'^{-1}(\mathfrak{P}'_n)$.

Получаваме, че $(g_1^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} (g')^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$ и следователно $E^{g,g'}_{|\mathfrak{P}'_n|}$ и $E^{g',g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ са рекурсивно номеруеми в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$. Тогава $E^{g,g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$.

Нека f_n е номерацията на $\bigcup_{i=0}^n A_i$ и $E^{g_1,f_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ множеството от индукционното предположение за номерацията g_1. От тук имаме:

$$(\mathcal{P}_n^{f_n})'_e \equiv_{\mathrm{T}} (\mathcal{P}_n^{f_n})'_T \leq_{\mathrm{T}} (g_1^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1}).$$

$\bigcup_{i=0}^n A_i \subseteq |\mathfrak{P}_n|$ и от тук множеството $E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^n A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$.

Остава да добавим структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$. Нека приложим още веднъж Лема 1.4.8 за номерацията g, но този път относно структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$, тогава съществува номерация f_1 на структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$, такава че:

$$f_1^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$$
$E^{g,f_1}_{A_{n+1}}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$.

Полагаме номерецията f_{n+1} да бъде:

$$\begin{aligned} &f_{n+1}(2x) = f_n(x) \\ &f_{n+1}(2x+1) = f_1(x). \end{aligned}$$

Очевидно f_{n+1} е номерация на $\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i$. Тогава имаме $\mathcal{P}_n^{f_{n+1}} = \{2x \mid x \in \mathcal{P}_n^{f_n}\}$, т.е. $\mathcal{P}_n^{f_{n+1}} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_n^{f_n}$, но $(\mathcal{P}_n^{f_n})'_e \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$, следователно $(\mathcal{P}_n^{f_{n+1}})'_e \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$

$$f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) = \{2x+1 \mid x \in f_1^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1})\}, \text{ т.е. } f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1}).$$

Следователно

$$\mathcal{P}_{n+1}^{f_{n+1}} = (\mathcal{P}_n^{f_{n+1}})'_e \oplus f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1}).$$

Остава да удоволетворим условието за множеството $E^{g,f_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i}$:

$$\begin{aligned} &\langle x, 2y\rangle \in E^{g,f_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i} \iff \langle x, y\rangle \in E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \\ &\langle x, 2y+1\rangle \in E^{g,f_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i} \iff \langle x, y\rangle \in E^{g,f_1}_{A_{n+1}}. \end{aligned}$$

Следователно $E^{g,f_{n+1}}_{\bigcup_{i=0}^{n+1} A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1})$.

□

Следствие 3.1.4. *Нека $n \in \mathbb{N}$. За всяка номерация g на $\mathfrak{P}_n$ съществува номерация f_n на $\vec{\mathfrak{A}}$, такава че:*

(1) $\mathcal{P}_n^{f_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$
(2) $E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$ *е рекурсивно номеруемо в* $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$.

Доказателство: Нека g е произволна номерация на $\mathfrak{P}_n$. Тогава от горното твърдение, за g съществува номерация h_n на $\bigcup_{i=0}^{n} A_i$, такава че:

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_n^{h_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n) \\ &E^{g,h_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \text{ е рекурсивно номеруемо в } g^{-1}(\mathfrak{P}_n). \end{aligned}$$

Нека, за всяко $i > n$, g_i е произволна номерация на $\mathfrak{A}_i$. Дефинираме номерацията f_n по следния начин:

$$\begin{aligned} &f_n(2x) = h_n(x) \\ &f_n(2\langle i, y\rangle + 1) = h_i(y). \end{aligned}$$

Тогава $\mathcal{P}_n^{f_n} \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_n^{h_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$ и $f_n^{-1}(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$. Множеството $E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$ можем да представим така: $\langle x, 2y\rangle \in E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \iff \langle x, y\rangle \in E^{g,h_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$. Следователно $E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$.

□

3.2. Еквивалентност относно редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ на n-тия ѝ полином и n-тия скок на Маркеровото ѝ разширение

Теорема 3.2.1. *Нека $n \in \mathbb{N}$ и $X \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Вярна е следната еквивалентност:*
X е относно същността си Σ_1 в $\mathfrak{P}_n \iff X \leq_{\mathrm{n}} \vec{\mathfrak{A}}$.

Доказателство: ($\Rightarrow$) От дефиницията на X е относно същността си Σ_1 в $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$ следва, че за всяка номерация g на $\mathfrak{P}_n$ е изпълнено, че $g^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$.

Ще докажем, че за произволна номерация f на $\vec{\mathfrak{A}}$ е вярно, че $f^{-1}(X) \leq_{\mathrm{e}} P_n^f$. Според Твърдение 3.1.2 по номерацията f можем да построим номерация g_n на $\mathfrak{P}_n$, такава че:

$$g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_n^f$$
$$E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \text{ е рекурсивно номеруемо в } \mathcal{P}_n^f.$$

Разглеждаме еквивалентността:

$$x \in f^{-1}(X) \iff (\exists y)(\langle x, y\rangle \in E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \;\&\; y \in g_n^{-1}(X)).$$

Но $g_n^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n)$, защото по условието на този случай това е вярно за всяка номераци на $\mathfrak{P}_n$, и $g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n) \leq_{\mathrm{T}} \mathcal{P}_n^f$ от свойствата на g_n. Следователно $g^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в P_n^f. От това и факта, че $E^{f,g_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i}$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}_n^f$, получаваме че $f^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}_n^f$.

Вземайки впредвид, че $\mathcal{P}_n^f$ е тотално множество, то $f^{-1}(X) \leq_{\mathrm{e}} P_n^f$.

($\Leftarrow$) От свойствата на $X \leq_{\mathrm{n}} \vec{\mathfrak{A}}$ имаме, че за всяка номерация f на $\vec{\mathfrak{A}}$ е изпълнено, че $f^{-1}(X) \leq_{\mathrm{e}} P_n^f$. Ще разгледаме произволна номерация g на $\mathfrak{P}_n$. Според Следствие 3.1.4 можем по номерацията g да построим номерация f_n на $\vec{\mathfrak{A}}$, такава че:

$$\mathcal{P}_n^{f_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$$
$$E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \text{ е рекурсивно номеруемо в } g^{-1}(\mathfrak{P}_n).$$

Имаме, че $f_n^{-1}(X) \leq_{\mathrm{e}} \mathcal{P}_n^{f_n}$, понеже от условието на този случай това е вярно за всяка номерация на $\vec{\mathfrak{A}}$, но множеството $\mathcal{P}_n^f$ е тотално и следователно $f_n^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $\mathcal{P}_n^{f_n}$. Знаем също, че $\mathcal{P}_n^{f_n} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$ по свойствата на f_n и следователно $f_n^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$.

Разглеждаме еквивалентността:

$$x \in g^{-1}(X) \iff (\exists y)(\langle x, y\rangle \in E^{g,f_n}_{\bigcup_{i=0}^{n} A_i} \;\&\; y \in f_n^{-1}(X)).$$

Тя ни показва, че $g^{-1}(X)$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_n)$. $\square$

Следствие 3.2.2. *За всяко $n \in \mathbb{N}$ е вярно, че:*

$$\mathfrak{M}^{(n)} \equiv^{n}_{\vec{\mathfrak{A}}} \mathfrak{P}_n.$$

Доказателство: Нека $n \in \mathbb{N}$ и X е Σ_1^c определимо в $\mathfrak{M}^{(n)}$. Тогава от Теорема 2.2.5 и Твърдение 2.2.6 можем да заключим, че това е изпълнено тогава и само тогава когато X е Σ_{n+1}^c определимо в $\mathfrak{M}$, т.е:

$$X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}^{(n)} \iff X \text{ е } \Sigma_{n+1}^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}.$$

Използвайки резултата от Теорема 2.2.3, че Σ_{n+1}^c определимите множества и относно същността си Σ_{n+1} множествата в една структура съвпадат, горната еквивалентност придобива вида:

$$\begin{aligned} &X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}^{(n)} \iff \\ &X \text{ е относно същността си } \Sigma_{n+1} \text{ в } \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Вече можем да приложим Твърдение 2.3.6 и да получим:

$$X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}^{(n)} \iff X \leq_{\mathrm{n}} \vec{\mathfrak{A}}.$$

Горната теорема ни дава следващата еквивалентност:

$$\begin{aligned} &X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}^{(n)} \iff \\ &X \text{ е относно същността си } \Sigma_1 \text{ в } \mathfrak{P}_n. \end{aligned}$$

Накрая, прилагайки още веднъж Теорема 2.2.3, получаваме:

$$X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{M}^{(n)} \iff X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ определимо в } \mathfrak{P}_n,$$

което записано в термините на n-еквивалентност относно редица е

$$\mathfrak{M}^{(n)} \equiv_{\vec{\mathfrak{A}}}^{n} \mathfrak{P}_n.$$

□

Глава 4

Еквивалентност на структури

В тази глава, ще разгледаме един вид силна сводимост на структурите $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$ и $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})$, която ще ни даде следната еквивалентност за всяко $n \in \mathbb{N}$:

$$(\forall X \subseteq |\mathfrak{P}_n|)(X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ в } \mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}}) \Rightarrow X \text{ е } \Sigma_1^c \text{ в } \mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})^{(n)}).$$

Остава отворен въпросът, дали за някои специални редици еквивалентността е вярна и в двете посоки. Ще дадем две условия за редицата $\vec{\mathfrak{A}}$, които да подпомогнат бъдещи изследвания по темата.

Нека фиксираме за тази глава една редица от изброими тотални структури $\vec{\mathfrak{A}} = \{\mathfrak{A}_i\}_{i\in\omega}$, където $\mathfrak{A}_i = (A; R_{1,i}, \ldots, R_{m_i,i})$ и предикатът за равенство е измежду предитатите на $\mathfrak{A}_i$. Ще съкращаваме нейното Маркерово разширение $\mathfrak{M}(\vec{\mathfrak{A}})$ с $\mathfrak{M}$ и нейния n-ти полином $\mathfrak{P}_n(\vec{\mathfrak{A}})$ с $\mathfrak{P}_n$.

Дефиниция 4.0.3. *Ще казваме, че две изброими структури $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ с универсуми съответно A и B, като $A \subseteq B$, са сводими, ако $\mathfrak{A} \Rightarrow_0^0 \mathfrak{B}$. Това ще означаваме по следния начин: $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$. Обратно, ако $\mathfrak{A} \Leftarrow_0^0 \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$. Ако $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ и ще казваме, че $\mathfrak{A}$ е еквивалентна на $\mathfrak{B}$.*

Забележка 7. *Дефиницията за сводимост не е симетрична, т.е. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ не значи, че $\mathfrak{B} \geq \mathfrak{A}$. Съответно $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ е различно от $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$.*

4.1. Сводимост на n-тия полином на редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ към n-тия скок на Маркеровото разширение на $\vec{\mathfrak{A}}$

В тази част ще докажем, че $\mathfrak{P}_n \leq (\mathfrak{M})^{(n)}$.

Разглеждайки доказателството на Лема 3.1.1 лесно може да се докаже следното:

Лема 4.1.1. *За всяка номерация f на $\vec{\mathfrak{A}}$ и всяко $n \in \mathbb{N}$, съществува инективна номерация f_n на $\mathfrak{A}_n$ със следните свойства:*

(1) $f_n^{-1}(\mathfrak{A}_n) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A}_n)$
(2) $E_{A_n}^{f,f_n}$ *е рекурсивно номеруемо в* $f^{-1}(\mathfrak{A}_n)$.

Лема 4.1.2. *Нека $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ са структури с изброими универсуми съответно A и B като $A \subseteq B$. Нека f е инективна номерация на $\mathfrak{A}'$ и g инективна номерация на $\mathfrak{B}'$, такива че $f^{-1}(\mathfrak{A}') \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{B}')$ и* *множеството* $E_A^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $g^{-1}(\mathfrak{B}')$. *Тогава* $E_{A^*}^{f,g}$ *е рекурсивно номеруемо в* $g^{-1}(\mathfrak{B}')$.

Доказателство: За универсумите A и B знаем, че $A \subseteq B$, следователно можем да смятаме, че и $A^* \subseteq B^*$. Нека $0^A = f_1^{-1}(0^*)$ и $0^B = g_1^{-1}(0^*)$. Дефинираме функциите $J_{\mathfrak{A}}$ и $J_{\mathfrak{B}}$ по следния начин:

$$J_{\mathfrak{A}}(x,y) = f^{-1}(\Pi_{\mathfrak{A}}(f(x), f(y)))$$
$$J_{\mathfrak{B}}(x,y) = g^{-1}(\Pi_{\mathfrak{B}}(g(x), g(y))).$$

Очевидно $J_{\mathfrak{A}} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{A}')$ и $J_{\mathfrak{B}} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{B}')$, но $f^{-1}(\mathfrak{A}') \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{B}')$, следователно и $J_{\mathfrak{A}} \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{B}')$. Също така съществуват изчислими в $g^{-1}(\mathfrak{B}')$ функции $l_{\mathfrak{A}}$, $l_{\mathfrak{B}}$, $r_{\mathfrak{A}}$ и $r_{\mathfrak{B}}$, такива че за всеки $x, y \in \mathbb{N}$:

$$l_{\mathfrak{A}}(J_{\mathfrak{A}}(x,y)) = x \text{ и } r_{\mathfrak{A}}(J_{\mathfrak{A}}(x,y)) = y$$
$$l_{\mathfrak{B}}(J_{\mathfrak{B}}(x,y)) = x \text{ и } r_{\mathfrak{B}}(J_{\mathfrak{B}}(x,y)) = y.$$

Тогава за $E_{A^*}^{f,g}$ имаме следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E_{A^*}^{f,g} \iff (x = 0^A \ \&\ y = 0^B) \vee (\langle x,y\rangle \in E_A^{f,g}) \vee$$
$$(x = J_{\mathfrak{A}}(x_1, x_2) \ \&\ y = J_{\mathfrak{B}}(y_1, y_2) \ \&\ \langle x_1, y_1\rangle \in E_{A^*}^{f,g} \ \&\ \langle x_2, y_2\rangle \in E_{A^*}^{f,g}).$$

От тази еквивалентност, следва че $E_{A^*}^{f,g}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{B}')$. □

Забележка 8. *Горната лема може да бъде доказана за произволни структури* $\bar{\mathfrak{A}}$ *и* $\bar{\mathfrak{B}}$ *съдържащи в себе си Московакисовото разширение на структурите* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *съответно, но условието за тюрингова сводимост на първообразите възпрепятства лесното ѝ формулиране в по-общ вид.*

Теорема 4.1.3. *За всяко* $n \in \mathbb{N} : \mathfrak{P}_n \leq \mathfrak{M}^{(n)}$.

Доказателство: Това, което трябва да докажем, е че за всяка номерация f на структурата $\mathfrak{M}^{(n)}$ съществува номерация g_n на структурата $\mathfrak{P}_n$, такава че:

(1) $g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$
(2) $E_{|\mathfrak{P}_n|}^{f,g_n}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)})$.

Доказателството ще извършим с индукция по n.

За $n = 0$ от дефинициите на n-ти полином на редица от структури и скок на структура имаме следното:

$$\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{A}_0$$
$$\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}$$

Нека f е произволна номерация на структурата $\mathfrak{M}$, тогава от факта, че $\mathfrak{M}$ има предикат A, имаме че $f^{-1}(A) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$. Ще построим номерация h на редицата $\vec{\mathfrak{A}}$, т.е. h ще бъде номерация на множеството A.

Нека $x_0 \in f^{-1}(A)$. Дефинираме функцията $m : \mathbb{N} \longrightarrow f^{-1}(A)$ по следния начин:

$$m(0) = x_0$$
$$m(i+1) = (\mu z \in f^{-1}(A))[(\forall k \leq i)(\langle m(k), z\rangle \notin f^{-1}(=_{\mathfrak{M}}))].$$

Очевидно $m \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$. Полагаме $h = \lambda x.f(m(x))$ и следователно h е инективна номерация на $\vec{\mathfrak{A}}$.

Построението на функцията m ни дава следната еквивалентност:

$$\langle x, y\rangle \in E_A^{f,h} \iff f(x) = h(y) \in A \iff$$
$$(\exists z)(z = m(y) \ \&\ \langle z, x\rangle \in f^{-1}(=_{\mathfrak{M}})).$$

Следователно $E_A^{f,h}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M})$.

Нека $R_i \subseteq (A_0)^t$ е произволен предикат на структурата $\mathfrak{A}_0$. Тогава за него знаем, че съществува j, такова че $R_i = (A_0)^t \setminus R_j$, защото $\mathfrak{A}_0$ е тотална. Ще докажем, че $f^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$, като за целта ще използваме нулевите маркерови разширения на R_i и R_j в структурата $\mathfrak{M}$. Нека $M_0^{R_i}$ и $M_0^{R_j}$ са съответните предикати от Маркеровото разширение и $X_0^{R_i}$, $X_0^{R_j}$ са техните компаньони. Имаме следните две еквивалентности:

$$\langle x_1, \ldots, x_t\rangle \in f^{-1}(R_i) \iff (f(x_1), \ldots, f(x_t)) \in R_i \iff$$
$$(\exists a \in X_0^{R_i})(f(x_1), \ldots, f(x_t), a) \in M_0^{R_i}) \iff$$
$$(\exists z \in f^{-1}(X_0^{R_i}))(f(x_1), \ldots, f(x_t), f(z)) \in M_0^{R_i}) \iff$$
$$(\exists z \in f^{-1}(X_0^{R_i}))(\langle x_1, \ldots, x_t, z\rangle \in f^{-1}(M_0^{R_i})) \iff$$
$$(\exists z)(z \in f^{-1}(X_0^{R_i}) \ \&\ \langle x_1, \ldots, x_t, z\rangle \in f^{-1}(M_0^{R_i}))$$

и

$$\langle x_1, \ldots, x_t\rangle \in f^{-1}(R_j) \iff (f(x_1), \ldots, f(x_t)) \in R_j \iff$$
$$(\exists a \in X_0^{R_j})(f(x_1), \ldots, f(x_t), a) \in M_0^{R_j}) \iff$$
$$(\exists z \in f^{-1}(X_0^{R_j}))(f(x_1), \ldots, f(x_t), f(z)) \in M_0^{R_j}) \iff$$
$$(\exists z \in f^{-1}(X_0^{R_j}))(\langle x_1, \ldots, x_t, z\rangle \in f^{-1}(M_0^{R_j})) \iff$$
$$(\exists z)(z \in f^{-1}(X_0^{R_j}) \ \&\ \langle x_1, \ldots, x_t, z\rangle \in f^{-1}(M_0^{R_j})).$$

От тези еквивалентности, следва че $f^{-1}(R_i)$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M})$ и $f^{-1}(R_j)$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M})$. От това и факта, че$f^{-1}(R_i) \cup f^{-1}(R_j) = \{\langle x_1, \ldots, x_t\rangle \mid x_1, \ldots, x_t \in f^{-1}(A)\} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(A) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$, получаваме $f^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$ и $f^{-1}(R_j) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$.

Разглеждайки еквивалентността

$$x \in h^{-1}(R_i) \iff (\exists y)(\langle x, y\rangle \in E_A^{f,h} \ \&\ y \in f^{-1}(R_i)),$$

и отново възползвайки се от това, че $\mathfrak{A}_0$ е тотална, можем да докажем, че $h^{-1}(R_i) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$ и следователно $h^{-1}(\mathfrak{A}_0) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$.

Прилагаме Лема 4.1.1 за номерацията h на $\vec{\mathfrak{A}}$. Тогава съществува номерация h_0 на $\mathfrak{A}_0$, такава че

$$\begin{array}{l} h_0^{-1}(\mathfrak{A}_0) \leq_{\mathrm{T}} h^{-1}(\mathfrak{A}_0) \\ E_{A_0}^{h,h_0} \text{ е рекурсивно номеруемо в } h^{-1}(\mathfrak{A}_0). \end{array}$$

Следователно $h_0^{-1}(\mathfrak{A}_0) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M})$ и лесно се вижда, че $E_{A_0}^{f,h_0}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M})$. Полагаме $g_0 = h_0$, с което случая $n = 0$ е доказан.

Допускаме, че твърдението е вярно за някое $n \in \mathbb{N}$. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$.

За $n+1$ от дефинициите на полином на редица от структури и скок на структура имаме следното:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{P}_{n+1} = \mathfrak{P}'_n \oplus \mathfrak{A}_{n+1} \\ \mathfrak{M}^{(n+1)} = (\mathfrak{M}^{(n)})'. \end{array}$$

Нека s е произволна номерация на структурата $\mathfrak{M}^{(n+1)}$. По Лема 1.4.6 за номерацията s съществува инективна номерация f на $\mathfrak{M}^{(n+1)}$, такава че:

$$\begin{array}{l} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}) \leq_{\mathrm{T}} s^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}) \\ E_{|\mathfrak{M}^{(n+1)}|}^{s,f} \text{ е рекурсивно номеруемо в } s^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}). \end{array}$$

За удобство ще работим с инективната номерация f, като в края на доказателството ще се върнем към номерацията s.

От Лема 2.1.8 знаем, че за номерацията f съществува номерация f_1 на $\mathfrak{M}^{(n)}$ със следните свойства:

$$\begin{array}{l} (f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}) \\ E_{|\mathfrak{M}^{(n)}|}^{f,f_1} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}). \end{array}$$

За номерацията f_1 по индукционното предположение съществува номерация g_n на структурата $\mathfrak{P}_n$, такава че:

$$\begin{array}{l} g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n) \leq_{\mathrm{T}} f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}) \\ E_{|\mathfrak{P}_n|}^{f_1,g_n} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}). \end{array}$$

Следователно $(g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} (f_1^{-1}(\mathfrak{M}^{(n)}))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. От тук получаваме, че $E_{|\mathfrak{P}_n|}^{f_1,g_n}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. Освен това знаем, че $|\mathfrak{P}_n| \subseteq |\mathfrak{M}^{(n)}|$ и следователно $E_{|\mathfrak{P}_n|}^{f,g_n}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

По Лема 2.1.7 за номерацията g_n на структурата $\mathfrak{P}_n$ съществува инективна номерация g_1 на структурата $\mathfrak{P}'_n$, такава че:

$$\begin{array}{l} g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \\ E_{|\mathfrak{P}_n|}^{g_n,g_1} \text{ е рекурсивно номеруемо в } (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T. \end{array}$$

Следователно $g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} (g_n^{-1}(\mathfrak{P}_n))'_T \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. От тук получаваме, че $E_{|\mathfrak{P}_n|}^{g_n,g_1}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.Следователно

$E^{f,g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. Знаем, че номерациите g_1 и f са инкетивни, че $g_1^{-1}(\mathfrak{P}'_n) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$,и че $E^{f,g_1}_{|\mathfrak{P}_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$, следователно можем да приложим Лема 4.1.2. От нея получаваме, че $E^{f,g_1}_{|\mathfrak{P}'_n|}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

Нека f_{n+1} е номерация на $\mathfrak{M}$ получена за f от Следствие 2.1.9, т.е.

$$(f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n+1)} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$$
$$E^{f,f_{n+1}}_{|\mathfrak{M}|} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)}).$$

Остава да добавим структурата $\mathfrak{A}_{n+1}$. Разглеждаме един предикат $R_i \subseteq (A_{n+1})^t$ на $\mathfrak{A}_{n+1}$. Понеже структурата е тотална, то съществува j, такова че $R_j \subseteq (A_{n+1})^t$ и $R_i = (A_{n+1})^t \setminus R_j$. Отново, както в случая $n = 0$, можем по номерацията f_{n+1} на $\mathfrak{M}$ да построим номерация h на $\vec{\mathfrak{A}}$ и по нея номерация h_{n+1} на $\mathfrak{A}_{n+1}$, такава че:

$$h_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_{n+1}) \leq_{\mathrm{T}} f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M})$$
$$E^{f_{n+1},h_{n+1}}_{A_{n+1}} \text{ е рекурсивно номеруемо в } f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}).$$

Разглеждаме еквивалентностите:

$$\begin{aligned}
&\langle x_1,\dots,x_t\rangle \in f_{n+1}^{-1}(R_i) \iff (f_{n+1}(x_1),\dots,f_{n+1}(x_t)) \in R_i \iff \\
&(\exists a_0 \in X_0^{R_i})(\forall a_1 \in X_1^{R_i})\dots(Q_{n+2}\ a_{n+1} \in X_{n+1}^{R_i}) \\
&((f_{n+1}(x_1),\dots,f_{n+1}(x_t),a_0,\dots,a_{n+1})\Delta M_{n+1}^{R_i}) \iff \\
&(\exists z_0)(\forall z_1)\dots(Q_{n+2}\ z_{n+1})(z_0 \in f_{n+1}^{-1}(X_0^{R_i})\ \&\ \dots \\
&\&\ z_{n+1} \in f_{n+1}^{-1}(X_{n+1}^{R_i}) \& \langle x_1\dots,x_t,z_0,\dots,z_{n+1}\rangle \Delta f_{n+1}^{-1}(M_{n+1}^{R_i}))
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\langle x_1,\dots,x_t\rangle \in f_{n+1}^{-1}(R_j) \iff (f_{n+1}(x_1),\dots,f_{n+1}(x_t)) \in R_j \iff \\
&(\exists a_0 \in X_0^{R_j})(\forall a_1 \in X_1^{R_j})\dots(Q_{n+2}\ a_{n+1} \in X_{n+1}^{R_j}) \\
&((f_{n+1}(x_1),\dots,f_{n+1}(x_t),a_0,\dots,a_{n+1})\Delta M_{n+1}^{R_j}) \iff \\
&(\exists z_0)(\forall z_1)\dots(Q_{n+2}\ z_{n+1})(z_0 \in f_{n+1}^{-1}(X_0^{R_j})\ \&\ \dots \\
&\&\ z_{n+1} \in f_{n+1}^{-1}(X_{n+1}^{R_j})\ \&\ \langle x_1\dots,x_t,z_0,\dots,z_{n+1}\rangle \Delta f_{n+1}^{-1}(M_{n+1}^{R_j})),
\end{aligned}$$

Където $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ и всеки следващ квантор се сменя алтернативно. Ако $n+2$ е четно, то $Q_{n+2} = \exists$ и $\Delta = \in$, иначе $Q_{n+2} = \forall$ и $\Delta = \notin$.

Следователно $f_{n+1}^{-1}(R_i), f_{n+1}^{-1}(R_j) \in \Sigma_{n+2}(f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}))$. Но $(f_{n+1}^{-1}(\mathfrak{M}))_{\mathrm{T}}^{(n+1)} \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$, откъдето следва, че $f_{n+1}^{-1}(R_i), f_{n+1}^{-1}(R_j)$ са рекурсивно номеруеми в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

$E^{f_{n+1},h_{n+1}}_{A_n}$ и $E^{f,f_{n+1}}_{|\mathfrak{M}|}$ са рекурсивно номеруеми в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$ следователно $E^{f,h_{n+1}}_{A_n}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

От тук, аналогично на доказателството за $n = 0$, можем да докажем, че $h_{n+1}^{-1}(\mathfrak{A}_n) \leq_{\mathrm{T}} f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

Дефинираме g_{n+1}:

$$g_{n+1}(2x) = g_1(x)$$
$$g_{n+1}(2x+1) = h_{n+1}(x).$$

Лесно се вижда, че g_{n+1} е номерация на $\mathfrak{P}_{n+1}$ и $g_{n+1}^{-1}(\mathfrak{P}_{n+1}) \leq_T f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$. Също така лесно може да се провери, че $E^{f,g_{n+1}}_{|\mathfrak{P}_{n+1}|}$ е рекурсивно номеруемо в $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(n+1)})$.

С една тривиална стъпка можем да я свържем с началната номерация s, с което твърдението е доказано. □

4.2. Сводимост на n-тия скок на Маркеровото разширение на редицата $\vec{\mathfrak{A}}$ към n-тия полином на $\vec{\mathfrak{A}}$

В тази част ще дадем двете условия, които да подпомогнат бъдещите изследвания по темата.

Ще релативизираме едно твърдение(Твърдение 7.5.) доказано в [**2**]:

Твърдение 4.2.1. *Съществува изчислима функция $\lambda(n, r, \sigma)$, такава че ако $X \subseteq \mathbb{N}$, $R = W_r^{X^{(n)}}$, σ е програма изчислима спрямо X за безкрайно подмножество S на R тогава съществуват $\kappa_0, \ldots, \kappa_n$, такива че κ_n е изчислима спрямо X с програмата $\lambda(n, r, \sigma)$ и*

κ_0 е биекция от R в $\mathbb{N}$;
κ_1 е биекция от $\mathbb{N}^2 \setminus G_{\kappa_0}$ в $\mathbb{N}$;
...
κ_n е биекция от $\mathbb{N}^{n+1} \setminus G_{\kappa_{n-1}}$ в $\mathbb{N}$.

От това твърдение ще формулираме две условия за $\vec{\mathfrak{A}}$:

(1) Ще искаме за всяка структура $\mathfrak{A}_i$ и всяка нейна номерация f, да е изпълнено:
За всеки предикат R_i на $\mathfrak{A}_i$, $f^{-1}(R_i)$ има безкрайно изчислимо подмножество.

(2) За всяка номерация h на структурата $\mathfrak{A}_0$ и за всяко $n \geq 1$, да съществуват номерации h_n на $\mathfrak{A}_n = (A_n; R_1, \ldots, R_{m_n})$, такива че да бъде изчислима функция
$$H(n) = \langle\langle r_1^n, \sigma_1^n\rangle, \ldots, \langle r_{m_n}^n, \sigma_{m_n}^n\rangle\rangle,$$
където $h_n^{-1}(R_s) = W_{r_s^n}^{(h^{-1}(\mathfrak{A}_0))^{(n)}}$ и σ_s^n е програма изчислима спрямо $h^{-1}(\mathfrak{A}_0)$ за безкрайно подмножество T_s^n на $h_n^{-1}(R_s)$.

Условие (1) не е голямо ограничение, защото за всяка структура $\mathfrak{A} = (A; R_1, \ldots, R_s)$, можем да дефинираме структура $\mathfrak{A}^\top$, по следния начин:

Нека $\top \notin A$ и нека $A_\top = A \cup \{\top\}$. Ако $R \subseteq A^r$, полагаме $R^\top = \{(\bar{a}, t) | \bar{a} \in R \vee t = \top\}$.

За такива структури лесно може да се види, че условие (1) е изпълнено.

За да покажем качествата на двете условия, които формулирахме, ще докажем следното твърдение:

ТВЪРДЕНИЕ 4.2.2. *Ако условия (1) и (2) са изпълнени за редицата* $\vec{\mathfrak{A}}$, *то* $\mathfrak{P}_0 \geq \mathfrak{M}^{(0)}$.

ДОКАЗАТЕЛСТВО: Това, което трябва да докажем е, че за всяка номерация g на структурата $\mathfrak{P}_0$ съществува номерация f на структурата $\mathfrak{M}^{(0)}$, такава че:

(1) $f^{-1}(\mathfrak{M}^{(0)}) \leq_{\mathrm{T}} g^{-1}(\mathfrak{P}_0)$

(2) $E^{g,f}_{|\mathfrak{P}_0|}$ е рекурсивно номеруемо в $g^{-1}(\mathfrak{P}_0)$.

Трябва да построим по номерация g на $\mathfrak{A}_0$, номерация f_0 на $\mathfrak{M}$.

Първо нека за всяко $i \geq 1$, g_i е номерация на структурата $\mathfrak{A}_i$, такава че изпълнява изискванията на условия (1) и (2). Тогава ще построим номерация h на множеството A, по следния начин:

$$h(\langle 0, x\rangle) = g(x)$$
$$h(\langle i, x\rangle) = g_i(x), i \geq 1.$$

Нека положим $X = g^{-1}(\mathfrak{A}_0)$.

За улеснение на изложението ще смятаме, че всяка структура $\mathfrak{A}_i$ има само един предикат $R_i \subseteq A_i$. От това, че номерацията g_i изпълнява условия (1) и (2), знаем че за предикатът R_i на структурата $\mathfrak{A}_i$, е вярно, че $g_i^{-1}(R_i) = W^X_{r^i}$ и нека T^i е безкрайното изчислимо, с оракул X и програма σ^i, подмножество на $g_i^{-1}(R_i)$.

Според Твърдение 4.2.1 за всяко n съществува система от функции $\kappa_{n,0} \dots, \kappa_{n,n}$, такива че $\kappa_{n,n}$ са изчислими в X равномерно по n и

$\kappa_{n,0}$ е биекция от $g_n^{-1}(R_n)$ в $\mathbb{N}$;
$\kappa_{n,1}$ е биекция от $\mathbb{N}^2 \setminus G_{\kappa_{n,0}}$ в $\mathbb{N}$;
...
$\kappa_{n,n}$ е биекция от $\mathbb{N}^{n+1} \setminus G_{\kappa_{n,n-1}}$ в $\mathbb{N}$.

Вече сме готови да дефинираме номерацията f_0 на $\mathfrak{M}$. Нека $f_0(2x) = h(x)$. Тогава $f_0^{-1}(R_n) = \{2x \mid x \in h^{-1}(R_n)\}$.

Нека фиксираме множествата $Z_{n,i}$, $n < \omega, i \leq n$, от нечетни числа, така че $Z_{n,i}$ да бъдат безкрайни, непресичащи се, изчислими равномерно по n и i и $\bigcup_{n,i \leq n} Z_{n,i}$ е цялото множество на нечетните числа. Можем да трансформираме всяка система $\kappa_{n,0}, \dots, \kappa_{n,n}$ в система $\kappa^*_{n,0}, \dots, \kappa^*_{n,n}$, така че графиките на функциите $\kappa^*_{n,n}$ да са изчислими в X равномерно по n и

$\kappa^*_{n,0}$ е биекция от $f_0^{-1}(R_n)$ в $Z_{n,0}$;
$\kappa^*_{n,1}$ е биекция от $((2\mathbb{N}) \times Z_{n,0}) \setminus G_{\kappa^*_{n,0}}$ в $Z_{n,1}$;
...
$\kappa^*_{n,n}$ е биекция от $((2\mathbb{N}) \times Z_{n,0} \times \dots \times Z_{n,n-1}) \setminus G_{\kappa^*_{n,n-1}}$ в $Z_{n,n}$.

За да довършим дефиницията на f_0 трябва да я дефинираме върху множествата $Z_{n,i}, i \leq n$. Фиксираме n и дефинираме f_0 върху $Z_{n,i}$ с индукция по i. Нека $z \in Z_{n,0}$ намираме единственото $x \in f_0^{-1}(R_n)$, такова че $\kappa^*_{n,0}(x) \simeq z$ и полагаме $f_0(z) \simeq h_0^{R_n}(f_0(x))$. Нека

$i < n$ и f_0 е вече дефинирана върху множествата$Z_{n,0}, \dots, Z_{n,i}$. Нека $z \in Z_{n,i+1}$. Тогава съществува единствен елемент $(x, z_0, \dots, z_i)$ на $(2\mathbb{N}) \times Z_{n_0} \times \cdots \times Z_{n,i}$, такъв че $\kappa^*_{n,i+1}(x, z_0, \dots, z_i) \simeq z$. Полагаме $f_0(z) \simeq h^{R_n}_{i+1}(f_0(x), f_0(z_0), \dots, f_0(z_i))$.

Очевидно за всяко n и $i \leq n$, $f_0^{-1}(X_i^{R_n}) = Z_{n,i}$ и

$$(x, z_0, \dots, z_i) \in G_{\kappa^*_{n,i}} \iff (f_0(x), f_0(z_0), \dots, f_0(z_i)) \in G_{h_i^{R_n}}.$$

Следователно $f_0^{-1}(\mathfrak{M}) \equiv_T \bigoplus_n f_0^{-1}(M_n^{R_n}) \equiv_T \bigoplus_n G_{\kappa^*_{n,n}} \leq_T X$.

Очевидно е от построението на f_0, че $E^{g,f_0}_{A_0} = \{\langle x, 2\langle 0, x\rangle\rangle \mid x \in \mathbb{N}\}$.

□

Библиография

[1] Soskova, A. A., Soskov, I. N. : A Jump Inversion Theorem for the Degree Spectra, Journal of Logic and Computation no. 19 (2009), 199-215.

[2] Soskov, I. N. : Effective properties of Marker's extensions, J Logic Computation 23 (2013), no. 6, 1335 - 1367.

[3] Stefan Vatev : Conservative Extensions of Abstract Structures, Models of Computation in Context (Benedikt Löwe, Dag Normann, Ivan Soskov, and Alexandra Soskova, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6735, Computability in Europe, Springer-Verlag, 2011, pp. 300 - 309.

[4] Cooper, B. S. : Partial degrees and the density problem. Part 2: The enumeration degrees of the Σ_2 sets are dense. J. Symbolic Logic, 49:503-513, 1984.

[5] Moschovakis, Y. N. : Elementary induction on abstract structures, North-Holland, 1974.

[6] Ash, C. J. : Stability of recursive structures in arithmetical degrees, Annals of Pure and Applied Logic 32 (1986), 113 - 135.

[7] Chris Ash, Julia Knight, Mark Manasse, and Theodore Slaman: Generic copies of countable structures, Annals of Pure and Applied Logic 42 (1989), 195 - 205.

[8] John Chisholm : Effective model theory vs. recursive model theory, The Journal of Symbolic Logic 55 (1990), no. 3, 1168 - 1191.