Транспортна задача

В. Черногоров

19 ноември 2009 г.

1. Формулировка на задачата

Автомобилната компания *Ауто ООД* има три завода в ЛА, Детройт и Ню Орлийнз и два склада в Денвър и Маями. Количеството произведени автомобили през следващото тримесечие ще бъде съответно 1000, 1500 и 1200 автомобила. Заявката на складовете е съответно 2300 и 1400 автомобила на тримесечие. Разстоянията (в мили) между заводите и складовете са дадени в таблица 1.

Таблица 1. Разстояния (в мили)

	Денвър	Маями
ЛА	1000	2690
Детройт	1250	1350
Ню Орлийнз	1275	850

Транспортната компания *Возим товари всякакви ООД* оценява своите услуги на 8 цента за превоз на един автомобил на разстояние една миля. В резултат получаваме таблица 2 за цените на превозите (закръглени до долар) по всеки от маршрутите.

Таблица 2. Цени на превозите

	Денвър (1)	Маями (2)
ЛА (1)	80	215
Детройт (2)	100	108
Ню Орлийнз (3)	102	68

Да се намери такъв план на превозите, че заявките на складовете да бъдат изцяло задоволени и общите транспортни разходи да бъдат минимални.

2. Математически модел

Нека x_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, е количеството автомобили, които транспортната компания ще превози от завода i ($i = 1, 2, 3$) до склада j ($j = 1, 2$). Целевата функция е

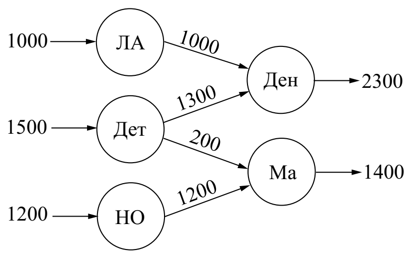
$$\min z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}.$$

Ограниченията на задачата трябва да осигурят както пълно задоволяване на складовете, така и транспортиране на всички произведени автомобили, тъй като общото количество на произведените автомобили $1000 + 1500 + 1200 = 3700$ е равно на сумарното търсене на складовете $2300 + 1400 = 3700$. Тогава в ограниченията можем да използваме равенства

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} = 1000,\\
&x_{21} + x_{22} = 1500,\\
&x_{31} + x_{32} = 1200,\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400,\\
&x_{ij} \geq 0,\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Този пример е частен случай на така наречената *класическа транспортна задача* (известна още като *задача на Хичкок*), при която има *баланс* между производство и потребление. Веднага се вижда, че тя е *канонична задача* на линейното оптимиране (всички ограничения са равенства и всички променливи са неотрицателни).

Схемата на оптималните превози е показана на фиг. 1.



Фигура 1. Схема на оптималното решение на транспортната задача

3. Обща формулировка на задачата

Даден продукт е наличен в m изходни пункта (заводи, складове и др.) съответно в количества a_i, $i = 1, \ldots, m$, а n крайни пункта (магазини и др.) имат нужда от същия продукт съответно в количества b_j, $j = 1, \ldots, n$. Известни са цените c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, за превоз на единица от продукта между изходния пункт i и крайния пункт j. Да се определи такъв план на превозите, че исканията на крайните пунктове да бъдат изцяло задоволени и сумарните транспортни разходи да бъдат минимални.

Ако е налице условието за баланс между производство и потребление

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

и променливите на задачата са x_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, получаваме следния математически модел на класическата транспортна задача

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

4. Транспортни задачи от отворен тип

При тези транспортни задачи условието за баланс е нарушено. Възможен е един от следните два случая.

4.1. Сумарното производство превишава сумарното потребление

Тогава $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i > \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. В този случай се въвежда фиктивен краен пункт с номер $n + 1$, който поема излишъка от производството $b_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$. Транспортните разходи c_{in+1}, $i = 1, \ldots, m$, от кой да е изходен пункт до този фиктивен краен пункт са равни на нула, защото не се осъществява никакъв превоз (просто част от производството не се превозва и остава в началния пункт).

Математическият модел в този случай е

$$
\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
&x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Свеждането на задача (1) към канонична задача на линейното оптимиране е еквивалентно на добавянето на фиктивен краен пункт.

4.2. Сумарното потребление превишава сумарното производство

Тогава $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$. В този случай потреблението не може да бъде задоволено. Въвежда се фиктивен начален пункт с номер $m+1$ и количество $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а транспортните разходи до кой да е краен пункт са $c_{m+1\,j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. Всеки пункт, който ще бъде снабден от този начален пункт, просто не получава съответното количество.

Математическият модел в този случай е

$$
\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij},
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, m, \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \quad j = 1, \dots, n, \\
&x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, \dots, m, \ j = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Свеждането на задача (2) към канонична задача на линейното оптимиране е еквивалентно на добавянето на фиктивен начален пункт.

ЗАДАЧИ ЗА УПРАЖНЕНИЯ

1. Да се направи математически модел и да се реши разгледаната задача, ако:

а) производството на завода в Детройт е 1300 автомобила;

б) заявката на склада в Денвър е 2000 автомобила.

2. Фармацевтична компания произвежда даден препарат в три завода, разположени в ЛА (1), Атланта (2) и Ню Йорк (3), чиито месечен производствен капацитет не надхвърля съответно 10 000, 12 000 и 14 000 kg. Всеки месец компанията трябва да изпраща продукцията си в четири района на САЩ — Източен (1), Среден запад (2), Южен (3) и Западен (4) в количества съответно 9000, 6000, 6000 и 13 000 kg. Разходите за производство и транспорт на 1 kg препарат (в долари) от заводите до районите са дадени в таблица 3.

Таблица 3. Разходи за производство и транспорт на 1 kg препарат (в долари)

	Източен	Среден Запад	Южен	Западен
ЛА	5,00	3,50	4,20	2,20
Атланта	3,20	2,60	1,80	4,80
Ню Йорк	2,50	3,10	3,30	5,40

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ произведената продукция да бъде транспортирана при минимални сумарни разходи и нуждите на отделните райони да бъдат задоволени.

3. В таблица 4 са посочени разстоянията между Бостон, Чикаго, Далас, ЛА и Маями. Всеки от тези градове се нуждае от 40 000 kWh електроенергия. Чикаго, Далас и Маями могат да произвеждат по 70 000 kWh. Преносът на 1000 kWh на разстояние 100 мили струва 4 долара.

Таблица 4. Разстояния между градовете (в мили)

	Бостон	Чикаго	Далас	ЛА	Маями
Чикаго	983	0	1205	2112	1390
Далас	1815	1205	0	801	1332
Маями	1539	1390	1332	2757	0

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ произведената електроенергия да бъде транспортирана при минимални сумарни разходи и нуждите на отделните градове да бъдат задоволени.

4. Всеки ден северна, централна и южна Калифорния използват по 100 милиона галона вода. Северна и централна Калифорния са осигурени със 120 милиона галона вода всяка, докато южна Калифорния е осигурена само с 40 милиона галона. Разходите за транспорт на един милион галона вода между отделните райони са дадени в таблица 5.

Таблица 5. Разходи за транспорт на 1 милион галона вода (в долари)

	Северна	Централна	Южна
Северна	5000	7000	10 000
Централна	7000	5000	6000
Южна	10 000	6000	5000

Търсенето на вода не може да бъде задоволено напълно. Затова всеки недоставен милион галона вода влече след себе си разходите, показани в таблица 6.

Таблица 6. Разходи за недоставяне на 1 милион галона вода (в долари)

Северна	Централна	Южна
6000	5500	9000

Да се формулира и реши линейна оптимизационна задача, с чиято помощ да бъде разпределена водата в Калифорния, като сумарните разходи за транспорт и недоставяне на вода да бъдат минимални.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1. а) В този случай сумарното производство е по-малко от сумарното потребление и ще останат незадоволени потребители. ЛА — Денвър 1000, Детройт — Денвър 1300, Ню Орлийнз — Маями 1200. Маями не получава 200 автомобила. Общите транспортни разходи са $291 600.

б) В този случай сумарното производство е по-голямо от сумарното потребление и ще останат нереализирани автомобили. ЛА — Денвър 1000, Детройт — Денвър 1000, Детройт — Маями 200, Ню Орлийнз — Маями 1200. Общите транспортни разходи са $283 200.

2. Транспортни разходи $86 800 и

	Източен	Среден Запад	Южен	Западен
ЛА	0	0	0	10000
Атланта	0	3 000	6000	3000
Ню Йорк	9000	3 000	0	0

3. Транспортни разходи $3609,60 и

	Бостон	Чикаго	Далас	ЛА	Маями
Чикаго	30	40	0	0	0
Далас	0	0	30	40	0
Маями	10	0	10	0	40

4. СК — СК 100 млн, ЦК — ЦК 60 млн, ЦК — ЮК 60 млн, ЮК — ЮК 40 млн, недоставени в ЦК 40 млн. Целева функция $1 580 000.