Унгарски метод за решаване на задачата за назначения

В. Черногоров

18 декември 2008 г.

1. Формулировка

Да се намери

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij},$$

при ограничения

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, && i = 1, \dots, m,\\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, && j = 1, \dots, m,\\
&x_{ij} \in \{0, 1\}, && i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

2. Алгоритъм на унгарския метод

Стъпка 1 Намираме минималния елемент във всеки ред на $m \times m$ матрицата на цените. Конструираме нова втора матрица, като изваждаме от всеки елемент на матрицата минималния елемент за съответния ред. За тази нова матрица намираме минималния елемент във всеки стълб. Конструираме нова трета матрица (наречена *матрица с редуцираните цени*), като изваждаме от всеки елемент на втората матрица минималния елемент за съответния стълб. Продължаваме със Стъпка 2.

За написването на този материал е използана книгата на W. Winston *Operations Research: Applications and Algorithms*, 4th ed. Duxbury Brooks/Cole Thomson—Learning, 2004. ISBN 0-534-38058-1, 0-534-42358-2, 0-534-42362-0.

Стъпка 2 Зачертаваме с минималния възможен брой линии (хоризонтални, вертикални или и двете) всички нули в матрицата с редуцираните цени. Ако броят на тези линии е m, намерено е оптимално решение, чийто единици се намират точно там, където са нулите в матрицата с редуцираните цени. КРАЙ. Ако броят на линиите е по-малък от m, преминаваме към Стъпка 3.

Стъпка 3 Намираме най-малкия ненулев елемент (нека стойността му е k) в матрицата с редуцираните цени, който не е зачертан от линиите в Стъпка 2. Сега изваждаме k от всеки незачертан елемент на матрицата с редуцираните цени и прибавяме k към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан от две линии. Връщаме се към Стъпка 2 с така модифицираната матрица с редуцираните цени.

Забележки.

1. За решаване на задача за назначения при критерий максимум постъпваме по обичайния начин, като умножаваме целевата функция с -1 и решаваме новополучената задача при критерий минимум.

2. Ако броят на редовете и стълбовете на матрицата с цените е различен, задачата за назначения е небалансирана. Тогава прилагането на унгарския метод може да доведе до грешно решение. Затова първо трябва да сведем небалансираната задача за назначения до балансирана чрез добавяне на фиктивен(ни) ред(ове) или стълб(ове), след което прилагаме унгарския метод.

3. В задача с големи размери е възможно намирането на минималния брой линии, с които да зачертаем всички нулеви елементи на матрицата с редуцираните цени, да не бъде лесна задача. Едно обсъждане на този въпрос може да бъде намерено в книгата на B. Gillett *Introduction to Operations Research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach*. New York: McGraw-Hill, 1976. За съжаление не разполагаме с този източник и не знаем какво е написано там.

3. Пример

Нека е дадена задача за назначения със следната матрица на цените

$$\begin{bmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Стъпка 1 Определяме минималния елемент във всеки ред и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния ред

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 14 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 12 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Определяме минималния елемент във всеки стълб и го изваждаме от всички елементи на матрицата, които се намират в съответния стълб

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix} \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Стъпка 2 Виждаме, че в матрицата с редуцираните цени първият ред и първият стълб съдържат по две нули. Като зачертаем първия ред и първия стълб с две линии, остава незачертана само нулата в третия ред и третия стълб. За нея ни трябва още една линия (която зачертава или третия ред, или третия стълб). Тук избираме линията, зачертаваща третия ред (а вие се опитайте да пререшите задачата, като зачертаете третия стълб).

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Стъпка 3 Най-малкият незачертан елемент е равен на 1. Изваждаме 1 от всеки незачертан елемент и прибавяме 1 към всеки елемент на матрицата с редуцираните цени, който е зачертан два пъти. Така получаваме следната матрица

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 9 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

в която вече са необходими 4 линии за зачертаване на всички нулеви елементи. Следователно налице е оптимално решение. Как да определим от тази матрица назначенията? Като огледаме матрицата, забелязваме, че във втория и третия стълб има само по едно нула. Това ни дава $x_{12} = 1$ и $x_{33} = 1$. Така втората нула в първия ред (и четвъртия стълб) не може да се използва. Сега вече остава $x_{24} = 1$, което прави нулата във втория ред и първия стълб неизползваема. Остава $x_{41} = 1$ (а и това е единствената нула в четвъртия ред). Окончателно $x_{12} = x_{24} = x_{33} = x_{41} = 1$.