а также

$$y''_{xx} = \frac{2(1+t^3)^4}{3(1-2t^3)^3}. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует, что $y'_x < 0$ при $t \in (-\infty; -1)$, т. е. $y(x)$ убывает при возрастании x от 0 до $+\infty$ (I часть кривой), а так как $y''_{xx} > 0$, то кривая выпукла вниз и, следовательно, подходит к асимптоте сверху. При $t \in (-1;\ 1/\sqrt[3]{2})$ функция

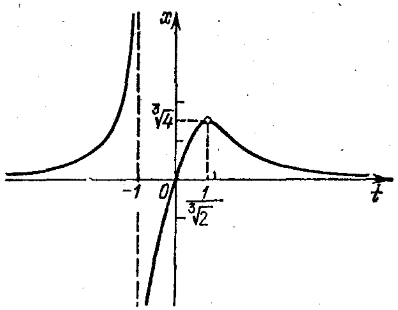

Рис. 98.

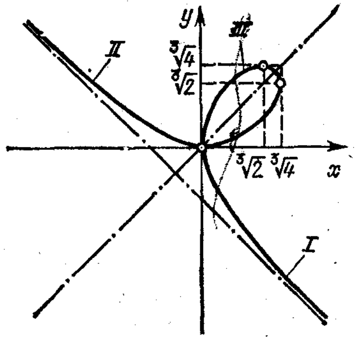

Рис. 99.

$y(x)$ имеет минимум при $t = 0$, т. е. $x = 0$; при возрастании x от $-\infty$ до $x|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$ значения $y(x)$ сначала убывают от $+\infty$ до 0 (при $x = 0$), а затем возрастают от 0 до $y|_{t=1/\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. При этом $y''_{xx} > 0$, кривая выпукла вниз и при $x \to -\infty$ подходит к асимптоте сверху. Поскольку $\lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 0} y'_x = +\infty$ и $\lim\limits_{t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + 0} y'_x = -\infty$, касательная к кривой в точке $x = \sqrt[3]{4}$, $y = \sqrt[3]{2}$ (соответствует $t = 1/\sqrt[3]{2}$) вертикальна.

На третьем интервале $t \in (1/\sqrt[3]{2};\ +\infty)$ функция $y(x)$ имеет максимум при $t = \sqrt[3]{2}$, а $x|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$. Этот максимум равен $y|_{t=\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$. Поскольку $y''_{xx} < 0$, кривая выпукла вверх. Если $x \to +0$, что соответствует тому, что $t \to +\infty$, то $y'_x \to +\infty$, т. е. в точку (0; 0) кривая «входит» с вертикальной касательной.

Таким образом, получено полное обоснование рис. 99 и найдены две дополнительные точки $(\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{4})$ с вертикальной и горизонтальной касательными. ▲

21.1. Привести пример такой дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in (0; +\infty)$, что:

1) Ее график имеет асимптоту при $x \to +\infty$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ не существует.

2) Ее график не имеет асимптоты при $x \to +\infty$, но $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ существует.

21.2. График функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$. Доказать, что если $f''(x) > 0$ при $x \geqslant x_0$, то график приближается к этой асимптоте сверху, а если $f''(x) < 0$, то график приближается к асимптоте снизу.

Построить график функции (21.3—21.20):

21.3. 1) $y = x^3 - 3x^2 + 4$. 2) $y = -x^3 + 4x - 3$.

3) $y = (x-1)^2(x+2)$. 4) $y = \dfrac{x^3}{4} - 3x + 4$.

5) $y = x(x-1)^3$. 6) $y = (x+2)^2(x-1)^2$.

7) $y = (x-1)^3(x+1)^2$. 8) $y = 32x^2(x^2-1)^3$.

21.4. 1) $y = \dfrac{x^2+x-1}{x^2-2x+1}$. 2) $y = \dfrac{4+x-2x^2}{(x-2)^2}$. 3) $y = \dfrac{20x^2}{(x-1)^3}$.

4) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. 5) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$. 6) $y = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x}$.

7) $y = \dfrac{1+x^2}{1+(x-2)^2}$. 8) $y = \dfrac{5x^2+42x+77}{x^2+7x+14}$.

21.5. 1) $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$. 2) $y = \dfrac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$. 3) $y = \dfrac{(x-5)^3}{(x-7)^2}$.

4) $y = \dfrac{x^3+2x^2}{(x-1)^2}$. 5) $y = x + \dfrac{7}{x} - \dfrac{3}{x^2}$. 6) $y = (x+1)\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$.

21.6. 1) $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$. 2) $y = \dfrac{x^4}{(x+1)^3}$. 3) $y = 3x + \dfrac{6}{x} - \dfrac{1}{x^3}$.

4) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4$. 5) $y = \dfrac{x^5}{(x^2-1)^2}$. 6) $y = \dfrac{(x-1)^5}{(x-2)^4}$.

7) $y = \dfrac{x^5-8}{x^4}$. 8) $y = \dfrac{x^5}{x^4-1}$.

21.7. 1) $y = x + \sqrt{x^2-1}$. 2) $y = x - \sqrt{x^2-2x}$.

3) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$. 4) $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

5) $y = \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x+1}$. 6) $y = \dfrac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + 4\sqrt{x}$.

21.8. 1) $y = \sqrt{2x^3+9x^2}$. 2) $y = \sqrt{x^2-x^3}$. 3) $y = \sqrt{x^3-3x}$.

4) $y = x^2\sqrt{x+1}$. 5) $y = x(x+1)^{3/2}$. 6) $y = \sqrt[4]{x^4-4x^3}$.

21.9. 1) $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$. 2) $y = \dfrac{x+8}{\sqrt{x^2+4x+16}}$. 3) $y = \dfrac{8x}{\sqrt{x^2-4}}$.

4) $y = \dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$. 5) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4x}}{2-x}$. 6) $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

7) $y=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-1}}$. 8) $y=\sqrt{\dfrac{(x+6)^2}{x^2-4}}$. 9) $y=4\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^3}}$.

10) $y=\sqrt{\dfrac{3x^2-4}{x^3}}$. 11) $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2}{3x}}$.

12) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$. 13) $y=\dfrac{4x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x}{2}$.

21.10. 1) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$. 2) $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$.

3) $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$. 4) $y=\sqrt[3]{x^3-4x}$.

5) $y=x\sqrt[3]{(x-5)^2}$. 6) $y=(x+1)^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$.

7) $y=(1+x)x^{2/3}$. 8) $y=x^3(x-1)^{2/3}$.

9) $y=(x^2-4)^{2/3}$. 10) $y=(x^2+8x+12)^{2/3}$.

11) $y=\sqrt[3]{x(3-x)^2}-x$. 12) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2-4}$.

21.11. 1) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. 2) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$. 3) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

4) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{1+x}}$. 5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(3x-2)^2}{x-1}}$. 6) $y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2}$.

7) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$. 8) $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$.

21.12. 1) $y=|x|\sqrt{1-x^2}$. 2) $y=x\sqrt{|x^2-1|}$.

3) $y=4\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x-2}$. 4) $y=\sqrt{|3x^2-x^3|}$.

5) $y=(x+1)\sqrt{|x^2-1|}$. 6) $y=\dfrac{\sqrt{1+|x-2|}}{1+|x|}$.

7) $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$. 8) $y=\dfrac{\sqrt{|x|-1}}{x-2}$.

9) $y=|x|\sqrt[3]{1+3x}$. 10) $y=\sqrt[3]{x^2|2-x|}$.

21.13. 1) $y=e^x-x$. 2) $y=xe^{-2x}$. 3) $y=x^2e^{-x}$.

4) $y=x^3e^{-x}$. 5) $y=(x^2-2)e^{-2x}$.

6) $y=(1-x)e^{3x+1}$. 7) $y=e^{1-x^2}$.

8) $y=e^{4x-x^2}$. 9) $y=xe^{-x^2/2}$.

10) $y=(x^2+2)e^{-x^2}$. 11) $y=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

21.14. 1) $y=e^{(1-x)/(1+x)}$. 2) $y=x^2e^{1/x}$.

3) $y=(x-2)e^{-1/x}$. 4) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x}e^{1/x}$. 5) $y=xe^{1/x^2}$.

21.15. 1) $y=\ln x-x+1$. 2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$. 3) $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

4) $y=x^2\ln x$. 5) $y=x\ln^2 x$. 6) $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$.

7) $y=\dfrac{x}{\ln x}$. 8) $y=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+\dfrac{6}{x+1}$. 9) $y=x^2-2\ln x$.

21.16. 1) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$. 2) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$.

3) $y=\sin x-\sin^2 x$. 4) $y=\cos x-\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

5) $y=\cos 3x+3\cos x$.

21.17. 1) $y=\sin x\sin 3x$. 2) $y=\cos x\cos 2x$.

3) $y=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$.

21.18. 1) $y=\dfrac{\cos 2x}{\cos x}$. 2) $y=\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$. 3) $y=2x-\operatorname{tg} x$.

21.19. 1) $y=\dfrac{x}{2}-\operatorname{arctg} x$. 2) $y=\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

3) $y=x\operatorname{arctg} x$. 4) $y=\dfrac{x}{2}+2\operatorname{arcctg} x$.

5) $y=\dfrac{3}{2}x-\arccos\dfrac{1}{x}$. 6) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

7) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. 8) $y=\dfrac{x}{2}-\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

~~**21.20.** 1) $y=e^{\cos x}$. 2) $y=e^{-\operatorname{arctg} x}$. 3) $y=\sin x-$~~ $\ln\sin x$.

4) $y=x^x$. 5) $y=(1+x)^{1/x}$. 6) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

21.21. Построить графики функций без исследования выпуклости:

1) $y=x^{1/x}$. 2) $y=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $x>0$. 3) $y=\cos^3 x+\sin^3 x$.

4) $y=\sin 5x-5\sin x$. 5) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2-\sin x}$.

6) $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{3}\cos 3x$. 7) $y=2\ln x-5\operatorname{arctg} x$.

8) $y=\dfrac{1}{1+x^2}e^{1/(1-x^2)}$. 9) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}e^{1/x}$.

21.22. Построить графики функций $y=f(x)$, заданных параметрически уравнениями:

1) $x=t^3+3t+1$, $y=t^3-3t+1$.

2) $x=t^3-3\pi$, $y=t^3-6\operatorname{arctg} t$.

3) $x=\dfrac{t^3}{1+t^2}$, $y=\dfrac{t^3-2t^2}{1+t^2}$.

4) $x=\ln\sin(t/2)$, $y=\ln\sin t$.