С О Ф И Й С К И У Н И В Е Р С И Т Е Т
“СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ”

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАДЯ ПЕЙЧЕВА ЗЛАТЕВА

СУБДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ И ВАРИАЦИОННИ МЕТОДИ В НЕГЛАДКИЯ АНАЛИЗ

ДИСЕРТАЦИЯ
за получаване на научната степен
“Кандидат на математическите науки”

Научен ръководител: доц. кмн Пандо Георгиев

СОФИЯ, 1997

QUID POTUII, FECI;

FACIANT MELLIORA POTENTES.

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод

Значима част от достиженията на човечеството в различни области се основават на осъществения стремеж към постигане на оптималност. Той поражда и симбиозата между математическата теория на оптимизацията и приложенията на математиката за решаване на широк клас задачи.

Аналитичната теория на оптимизацията се заражда на определен етап от развитието на математическия анализ. Поради това, в началото на нейното самостоятелно развитие е било естествено да се предполага гладкост (диференцируемост) на разглежданите функции. Но в математиката и в частност в теория на оптимизацията често се налага да се работи с негладки задачи, т.е. задачи, в които не е естествено да се предполага диференцируемост на функциите. Това обуславя теоретичното развитие на негладкия анализ. То започва в началото на века с разработването на общата теория на изпъкналите множества и функции в крайномерни пространства от Минковски и Фенхел. Изпъкналият анализ в безкрайномерни пространства се построява в работите на Моро, Бронщед, Дубовицки и Милютин и др. На тази база възниква и революционната идея на Рокафелар да обобщи класическото понятие за производна, като дефинира производната на функция в точка като множество – субдиференциал. С това се полагат основите на теорията на субдиференциалното смятане, която намира широко приложение във вариационното смятане, оптималното управление, математическото оптимиране и други области.

Последвалото развитие на негладкия анализ разширява и задълбочава интереса към използваните в това направление идеи и методи и извън теорията на оптимизацията. Като пример може да се посочи теорията на нелинейните частни диференциални уравнения (уравнения на Хамилтон–Якоби по терминологията на Лионс), в която, поради нелинейния характер на задачите, теорията на обобщените функции на Шварц има твърде ограничено приложение. От друга страна, съществуването на "класически", т.е. диференцируеми решения е по–скоро изключение. За някои частни случаи от общи съображения, предимно от теорията на диференциалните игри, решенията се дефинират с явна формула – формула на Лакс–Олейник. За други се доказва сходимост на специални диференчни схеми. Остава обаче необходимостта да се обоснове връзката на получените решения с първоначалното уравнение. Това е направено от Крандал и Лионс в [26], които използват някои работи на Крючков и най–вече идеята на

Рокафелар, за която стана дума. Дефинираният от тях субдиференциал е разглеждан независимо от Йофе в задачи от оптимизацията, а възможността той да се използва за решаване на уравнения, каквото е едно от предназначенията на производната (вж. Нютон, Лайбниц и много други), засилва интереса към него.

Ишии в [46] успява да адаптира метода на Поанкаре–Перон, за да докаже съществуване и единственост на решението на широк клас задачи. По този път естествено се налага разглеждането на полунепрекъснати функции и съответно на техни субдиференциали. Освен като стимул за развитието на субдиференциалното смятане теорията на уравненията на Хамилтон–Якоби поражда необходимостта да се обединят в полезни леми сходните техники, разхвърляни в отделните доказателства.

Друга естествена посока е търсенето на негладки аналози на класически твърдения от анализа. Като пробен камък се явяват теоремата за средните стойности и теоремата за сумата, като за разлика от класическия анализ първата обикновено е по–лесна.

Интересно е да се проследи развитието на теорията на субдиференциалното смятане в банахови пространства. Тя е построена сравнително неотдавна. Нека символът $(X, \|\cdot\|)$ означава реално банахово пространство, чиито елементи наричаме точки или вектори. X^* означава неговото спрегнато. Слабата* топология в X^* е означена с w^*, а със $\langle .,. \rangle$ се изразява действието на елементите на X^* върху тези на X.

През шестдесетте години на века Моро и Рокафелар въвеждат понятието *субдиференциал на изпъкнала функция* $f : X \to I\!R$ в точка x като множеството

$$\partial^c f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \quad \forall y \in X\}.$$

Те доказват и основните му свойства, като например, че за непрекъсната функция е непразно, изпъкнало и w^* компактно множество в X^*, а изображението $\partial^c f : (X, \|.\|) \to (X, w^*)$ е полунепрекъснато отгоре и локално ограничено и други. Ако изпъкналата функция е диференцируема по Гато в точката x, то нейният субдиференциал съвпада с производната ѝ по Гато, което показва връзката на субдиференциала с диференциалните свойства на функцията.

Решаването на задачи от вариационното смятане, оптималното управление и математическото оптимиране води до необходимостта от изследване на диференциалните свойства и на неизпъкнали функции. През седемдесетте години Кларк въвежда понятие за субдиференциал на произволна локално липшицова функция $f : X \to I\!R$ в точка x. *Субдиференциал на Кларк* за функцията f в точката x е следното множество

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ f^0(x; h) \geq \langle x^*, h \rangle, \quad \forall h \in X\},$$

където

$$f^0(x; h) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + th) - f(y)}{t}$$

е обобщената производна по посока h на функцията f в точката x. Тази дефиниция разширява класа на разглежданите функции и е естествено продължение на разглежданията в изпъкналия анализ, тъй като в случая на изпъкнала функция субдиференциалът на Кларк съвпада с изпъкналия субдиференциал. В течение на две десетилетия се изгражда стройна теория на субдиференциалното смятане с локално липшицови функции.

В последствие, в отговор на естествения стремеж към по-нататъшно разширяване на класа от субдиференцируеми функции, Рокафелар разширява дефиницията на субдиференциал за собствена полунепрекъсната отдолу функция. Функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ се нарича собствена, ако *областта ѝ* $\mathrm{dom} f = \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ е непразно множество. *Субдиференциалът на Кларк–Рокафелар* на полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ в точката $x \in \mathrm{dom} f$ е множеството

$$\partial^{CR} f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ f^\circ(x; v) \geq \langle x^*, v\rangle, \quad \forall v \in X\},$$

където

$$f^\circ(x; v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{\substack{y \to_f x \\ t \downarrow 0}} \inf_{w \in v + \varepsilon B} \frac{f(y + tw) - f(y)}{t},$$

където с B е означено затвореното единично кълбо в X,а $y \to_f x$ означава, че $y \to x$ и $f(y) \to f(x)$. Ако $x \notin \mathrm{dom} f$, то $\partial^{CR} f(x) = \emptyset$. Да отбележим, че в случая на локално липшицова функция f субдиференциалът ѝ на Кларк–Рокафелар съвпада с този на Кларк и обобщените ѝ производни по посока също съвпадат, т.е. $f^\circ(x; h) = f^0(x; h)$.

В средата на осемдесетте години в [16] Борвейн и Прайс дефинират ∂^β *субдиференциалите* на полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, дефинирана в банахово пространство X с норма, която извън началото е β–диференцируема относно борнология β в X. Да припомним, че *борнология* β в X е фамилия от ограничени множества $S \subset X$, чието обединение е цялото пространство и такава че, ако $S \in \beta$, то $\lambda S \in \beta$ за всяко реално число λ и обединението на два члена от β се съдържа в някой член на β. Функция $f : X \to I\!R$ се нарича *β–диференцируема в точка* $x \in X$, ако съществува елемент $Df(x) \in X^*$ (който понякога означаваме и със символа $f'(x)$), такъв че

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \langle Df(x), h\rangle,$$

равномерно по h от елементите на борнологията β и съответно се нарича *β–диференцируема*, ако е β–диференцируема във всяко $x \in \mathrm{dom} f$.

По дефиниция ∂^β *субдиференциалът* на собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ в точка $x \in \mathrm{dom}\, f$ е множеството

$$\partial^\beta f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \forall \varepsilon > 0, \ \forall S \in \beta \ \exists \delta > 0 \ :$$

$$\frac{f(x+th)-f(x)}{t} - \langle x^*, h\rangle \geq -\varepsilon, \quad \forall h \in S,\ \forall t \in (0,\delta)\}.$$

Ако $\partial^\beta f(x) \neq \emptyset$, то функцията f се нарича *β–субдиференцируема* в точката x. Поради условието за гладкост на нормата ∂^β субдиференциалите се наричат още гладки субдиференциали. Това условие гарантира и това, че субдиференциалът $\partial^\beta f$ е непразен в гъсто подмножество на $\mathrm{dom} f$. Частни случаи на ∂^β субдиференциалите са *субдиференциалът на Гато*:

$$\partial^G f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \langle x^*, h\rangle \leq \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}, \quad \forall h \in X\},$$

в дефиницията на който $\beta = G$ е борнологията на Гато, която се състои от всички подмножества на X с краен брой елементи и *субдиференциалът на Фреше*:

$$\partial^F f(x) = \{x^* \in X^* \ : \ \liminf_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-\langle x^*, h\rangle}{\|h\|} \geq 0\},$$

в дефиницията на който $\beta = F$ е борнологията на Фреше, която се състои от всички ограничени по норма подмножества на X.

По–късно вниманието се насочва към гладките субдиференциали на полунепрекъсната отдолу функция, дефинирана в *β–гладко банахово пространство* X, т.е. пространство с липшицова камбановидна функция $b : X \to I\!R$, такава че $b \in C^1_\beta(X)$. Да напомним, че функция $b : X \to I\!R$ се нарича *камбановидна функция*, ако е ограничена и *носителят ѝ supp* $b = \{x \in X \ : \ b(x) \neq 0\}$ е ограничено непразно множество (вж. [27], [61]). Символът $b \in C^1_\beta(U)$ означава, че функцията b е β–диференцируема в множество $U \subset X$ и производната ѝ е непрекъснато изображение от множеството U, разглеждано с нормираната топология в спрегнатото пространство X^*, снабдено с топологията τ_β на равномерната относно елементите на борнологията β сходимост. Когато β се състои от всички симетрични ограничени подмножества (респ. всички едноточкови множества в X) β–диференцируемостта съвпада с обичайната диференцируемост по Фреше (респ. по Гато), τ_β съвпада с нормираната (респ. w^*) топология в X^*, а β–гладкото пространство X наричаме гладко по Фреше (респ. по Гато).

Да отбележим, че всички банахови пространства с β–диференцируема норма са β–гладки. Обратното не е вярно. Съществува банахово пространство, което има липшицова камбановидна функция с непрекъсната производна по Фреше, но няма дори диференцируема по Гато норма (вж. [27], Глава VII).

β–гладкият субдиференциал на полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, дефинирана в β–гладко пространство X в точка x е множеството

$$D^-_\beta f(x) = \{u'(x) \in X^* \ : \ u \in C^1_\beta(X) \text{ и } f - u \text{ има локален минимум в } x\},$$

ако $x \in \mathrm{dom} f$ и $D^-_\beta f(x) = \emptyset$, ако $x \notin \mathrm{dom} f$.

В β–гладко пространство X е в сила включването $D^-_\beta f(x) \subset \partial^\beta f(x)$, $\forall x \in X$, а ако пространството е гладко по Фреше, то $D^-_F f \equiv \partial^F f$ за произволна собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ (вж. [27], Глава VIII).

Развитите посредством гладкото субдиференциално смятане методи позволяват еднаквото третиране на локално липшицовите и на полунепрекъснатите отдолу функции и успешно доразвиват теорията на субдиференциалното смятане на Кларк–Рокафелар. Съществена тяхна характеристика е, че при тези методи не може да се използува главното удобство на субдиференциала на Кларк, а именно, че $\partial f(x) \neq \emptyset$, за всяко x.

Поради голямото разнообразие от дефиниции на субдиференциали, възникнали в съответствие със спецификата на разглежданите задачи, на даден етап става полезен опитът да се намерят оптимално общи критерии, на които да отговаря даден субдиференциал, за да може да се развие съответно субдиференциално смятане, т.е. възниква необходимостта да се разглеждат абстрактни субдиференциали.

Редица съвременни математици в свои работи, като например Тибо в [71], Осел, Корвелек и Ласонд в [10], Пено в [60] и други насочват вниманието си в тази посока.

Тибо и Загродни в [73] дефинират абстрактен *субдиференциал*, като многозначен оператор $\partial : X \to 2^{X^*}$, който на функция $f : X \to I\!R$ и точка $x \in X$ съпоставя множество $\partial f(x)$ в X^* със следните свойства

1. $\partial f(x) \subset X^*$ и $\partial f(x) = \emptyset$, ако $x \notin \mathrm{dom} f$.
2. $\partial f(x) = \partial g(x)$, когато f и g съвпадат в околност на точката x.
3. $\partial f(x) = \partial^c f(x)$, ако f е изпъкнала и полунепрекъсната отдолу функция.
4. $0 \in \partial f(x)$ ако x е точка на локален минимум за функцията f.
5. За f полунепрекъсната отдолу в околност на точката X и g изпъкнала и непрекъсната е в сила: $\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$.

Ако операторът удовлетворява горните свойства от 1 до 4 и свойството

$5'$. $\partial(f+g)(x) \subset \limsup\limits_{y \to_f x} \partial f(y) + \partial g(x)$,

където f е полунепрекъсната отдолу в околност на точката X, g е изпъкнала и непрекъсната, а с $\limsup$ е означена секвенциалната горна граница в w^* топологията, той се нарича *пресубдиференциал*.

Както е отбелязано в [73] субдиференциалите на Кларк, на Мишел–Пено ([55]), b–субдиференциалът ([48], [74]), субдиференциалът на Мордухович ([57]), A–субдиференциалът на Йофе ([45]) и други са субдиференциали в смисъла на тази дефиниция. За съжаление ∂^β субдиференциалите на Борвейн и Прайс не удовлетворяват тази дефиниция за субдиференциал, тъй като за тях няма доказана формула за субдиференциала на сума на функции, която да гарантира изпълнението на свойството 5. Това подтиква Осел, Корвелек и Ласонд да дефинират в [10] абстрактно понятие за *субдиференциал*, като оператор ∂, който на всяка собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, (т.е. такава че $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$) и всяко $x \in X$ съпоставя множество $\partial f(x)$ в X^*, което удовлетворява свойствата

$(P1)$ $\partial f(x) = \partial^c f(x)$, ако f е изпъкнала функция.
$(P2)$ $0 \in \partial f(x)$, ако $x \in \mathrm{dom} f$ е точка на локален минимум за функцията f.
$(P3)$ $\partial(f+g)(x) \subset \partial f(x) + \partial g(x)$, ако g е изпъкнала непрекъсната функция, която е ∂–диференцируема в x, което означава, че $\partial g(x)$ и $\partial(-g)(x)$ са непразни.

Тази дефиниция се удовлетворява, както от субдиференциалите, разглеждани от Тибо и Загродни, така и от ∂^β субдиференциалите, ако нормата на пространството е β–гладка.

В цитираните случаи абстрактните обобщения на понятието субдиференциал се постигат като вариант на формула за субдиференциала на сума на функции се приема за дефиниция.

Настоящата дисертация е посветена на разглеждането на различни аспекти на субдиференциалното смятане в банахови пространства, при което като основно средство се използуват идеите на вариационните методи.

В Глава 1 разглеждаме въпроси на абстрактното субдиференциално смятане със собствени полунепрекъснати отдолу функции.

Основен технически проблем при работа с нелипшицови функции е неограничеността на субдиференциала. По тази причина например естественият въпрос дали от монотонност на субдиференциала на Кларк–Рокафелар следва изпъкналост на съответната функция, дълго време не беше решен, въпреки че връзката му с теоремата за средните стойности е ясна. Развитието на този проблем, решен от Поликен за крайномерно пространство в [62] и от Кореа, Джофре и Тибо в [24] за рефлексивно и в [25] за произволно банахово пространство показва в частност, че опитът да се премине към липшицови апроксимации на Моро–Йосида, освен че налага силни ограничения върху пространството, е донякъде неестествен и директните методи са за предпочитане. Решението се основава на теоремата за средните стойности на Загродни [79], която въпреки необичайно изглеждащата си формулировка е крачка напред в изучаването на полунепрекъснатите функции.

Оказва се полезно, строейки редица от елементи на субдиференциала, които апроксимират наклона на функцията между две точки, предварително да ограничим ръста на нормата на тези елементи. Това е същността на дефинираното в Параграф 1.1 свойство Υ.

В същия параграф показваме, че много от известните субдиференциали, както и абстрактните им обобщения имат свойството Υ и продължаваме теоремата на Загродни за β–гладки субдиференциали.

За разлика от абстрактните обобщения на субдиференциала, за които стана дума и които включват в аксиомите си някоя по–силна или по–слаба теорема за сумата, свойството Υ е тясно свързано с теоремите за средните стойности, особено с тази на Загродни. Тъй като последните са "по–прости" от теоремите за сумата и се получават като тяхно следствие (а не обратното), това дава основание да считаме, че свойството Υ има първичен характер. То има донякъде тромава формулировка, която се дължи на техническият му характер, но с него се борави с лекота.

Свойството Υ е отношение между конкретна функция и многозначен оператор, който разглеждаме като (абстрактен) субдиференциал на функцията. Следователно то не зависи от никакви други функции, което не налага да считаме, че субдиференциалът е дефиниран и за други функции. Този факт ни позволява да разглеждаме заедно с конкретната функция или клас от функции конкретни субдиференциали, които отразяват по–адекватно свойствата на тази (тези) функции, като например изпъкналия субдиференциал за изпъкнали функции. Това води до дефинирането в Параграф 1.1 на абстрактен субдиференциал, наречен накратко абсубдиференциал, с аксиоми, които малко се отличават от първоначалните абстрактни понятия за субдиференциал ([73], [10]), освен че позволяват да не се разглеждат всички полунепрекъснати отдолу функции. Тези аксиоми са по–близки до теорията на субдиференциала на Кларк–Рокафелар, отколкото до гладките субдиференциали. Абсубдиференциалът освен, че лесно се проверява за изпълнението на свойството Υ е много удобен, когато може да се опише експлицитно в термините на малък брой "подпиращи" функции (а не например всички гладки, както при D^-_β).

Изложените общи идеи са илюстрирани с разглеждането в Параграф 1.2 на функции, които по някакъв начин са подобни на изпъкналите функции. Наричаме тези функции псевдо изпъкнали. Различни автори са разглеждали различни нееквивалентни концепции за квазиизпъкналост, полуизпъкналост, псевдоизпъкналост и пр., поради което няма ясно обособен клас от псевдо изпъкнали функции. Настоящата работа няма претенциите да е максимално обобщение в тази посока. Целта по–скоро е да се провери границата на приложимост на идеите от изпъкналия анализ. Представената дефиниция за псевдо изпъкналост е повлияна от резултата на Кореа, Джофре и Тибо (вж. [25]), като функция f е наречена псевдо изпъкнала, ако субдиференциалът ѝ на Кларк–Рокафелар е φ–монотонен. Показваме, че тези функции притежават някои свойства, подобни на тези на изпъкналите функции. Основен инструмент, освен свойството Υ, е специален абсубдиференциал, който е подходящо обобщение на субдиференциала от изпъкналия анализ.

В Параграф 1.3 доказваме, че ако субдиференциалът на Кларк–Рокафелар на собствена, полунепрекъсната отдолу функция е φ–монотонен, тогава той е максимално φ–монотонен, с което обобщаваме добре известната теорема на Рокафелар. Използваният метод е сходен с този на Саймънс, изложен в [61].

Добре известна теорема от реалния анализ гласи, че функции, които имат равни производни се различават с константа. Да отбележим, че съществуват функции, които имат еднакви субдиференциали на Кларк–Рокафелар във всяка точка от дефиниционната си област, но не се различават с константа. Например функциите (вж. [63]) f_k, $k = 1, 2$, дефинирани като $f_k(x) = 0$, ако $x \leq 0$ и $f_k(x) = k$, ако $x > 0$ са такива, че $\partial^{CR} f_1(x) \equiv \partial^{CR} f_2(x)$ за всяко реално x, но очевидно не се различават с константа. Тази ситуация може да се получи и при субдиференциала на Кларк на локално липшицова функция. В [67] е даден пример на липшицова функция f, такава че съществуват много други локално липшицови функции g, които не се различават от f с константа, но удовлетворяват $\partial f(x) \equiv \partial g(x)$ за всяко x. Това означава, че субдиференциалът на Кларк също е в невъзможност да различи функциите, въпреки че, както е доказано в [67], [22] и [23] тази ситуация не възниква за някои важни класове локално липшицови функции. Интегруемостта на субдиференциали на локално липшицови функции е предмет и на разглежданията на Ки в [66] и Борвейн и Мурс в [15].

Първата работа в тази насока извън класа на локално липшицовите функции е тази на Поликен [63]. Той дефинира в случая на крайномерно пространство един клас от полунепрекъснати отдолу функции, който включва в себе си всички изпъкнали полунепрекъснати отдолу функции и показва, че ако две функции от този клас имат еднакви субдиференциали на Кларк–Рокафелар в околност на точка x те различават в тази околност с константа. Това може да се разглежда като обобщение в крайномерния случай на резултата на Рокафелар, публикуван в [67], че две полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции в банахово пространство, имащи еднакви субдиференциали се различават с константа. По–късно Тибо и Загродни в [73] въвеждат понятието *изпъкнало субдиференциално подобие* и доказват, че две функции се различават с константа в отворено изпъкнало подмножество на банахово пространство, тогава и само тогава, когато се са изпъкнало субдиференциално подобни.

В Параграф 1.4 разглеждаме въпроса за интегруемост на субдиференциала на Кларк–Рокафелар. Работата на Борвейн и Мурс [15] показва, че дори за локално липшицови функции пълно описание на всички интегруеми функции е трудно постижимо. Поради това е важно да се отделят класове от интегруеми функции и да се намерят операции, с които тези класове могат да бъдат различени. Един широк клас от полунепрекъснати отдолу интегруеми функции е намерен в този параграф. Основно средство отново е използването на свойството Υ, което, както показваме в Параграф 1.1, се притежава от субдиференциала на Кларк–Рокафелар. Използуваме и свързаното с него преминаване към едномерния случай, както и специалните свойства на псевдо изпъкналите функции. Доказваме, че смущението на псевдо изпъкнала функция с локално липшицова регулярна функция е интегруемо. Като следствия разширяваме резултатите на Поликен, [63] и Тибо и Загродни, [73], за които вече стана дума.

Резултатите, изложени в Глава 1 са публикувани в [47].

За разлика от добре развитата теория на субдиференциалното смятане от първи ред за недиференцируеми функции, въпросът с изследването на диференциалните свойства от втори ред на функции, които нямат втора производна все още е в процес на развитие. Последните постижения в областта на субдиференциалите от по–висок ред и приложението им в негладкия анализ могат да се намерят в работите на Обен и Франковска [8], на Йофе [43] [44], на Мишел и Пено [54], на Рокафелар [68] [69], на Янг [75] и други.

Те са тясно свързани с характеризирането на оптималните решения чрез условия от втори ред, което е обект на несекващ интерес в теорията на математическото оптимиране. Повечето изследвания в тази област се отнасят до нелинейни задачи с ограничения, чиито данни са двукратно непрекъснато диференцируеми функции, като се правят опити за отслабване на предположенията за гладкост. Наистина, за да се получат по–дълбоки резултати за задачи с недиференцируеми данни, е необходимо да се подобрят условията от първи ред и начинът да се постигне това е като се използува информация от втори ред. Много работи в тази насока се състоят в обобщаване на класическата втора производна по посока за различни класове недиференцируеми функции, като например тези на Ослендер [9], Бен-Тал и Цове [13] и цитираните там статии. По–късно у Ириа-Урути, Стродио и Нгуен възниква идеята да се замени хесиановата матрица с множество от матрици и в работата си [40] те дефинират така наречената *обобщена хесианова матрица* за функция от класа $C^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, изследват нейните свойства и доказват необходими условия от втори ред за оптималност на решението на минимизационни задачи в $\mathbb{R}^n$ с $C^{1,1}$ данни.

В Глава 2 продължаваме техните идеи в пространства с безкрайна размерност.

В Параграф 2.1 вместо теоремата на Радемахер, която играе съществена роля в дефинирането и доказването на свойствата на обобщената хесианова матрица в цитирания крайномерен случай, използуваме едно нейно обобщение. То е направено за локално липшицово изображение от Кристенсен в [19], Теорема 7.5. Различаваме в пространство със сепарабелно дуално дефиницията на споменатото по–горе понятие, което тук наричаме субдиференциал от втори ред. Показваме, че много от неговите свойства са в сила и в този случай. Да отбележим, че гореспоменатият резултат на Кристенсен е използуван от Тибо в [72], където той разширява понятието за субдиференциал на Кларк за изображения, действащи от сепарабелни банахови пространства в рефлексивни сепарабелни банахови пространства.

В Параграф 2.2 доказваме необходимо условие и достатъчни условия за оптималност на решението на минимизационна задача с ограничения и $C^{1,1}(E)$ данни. Представеното необходимо условие не може да се докаже с метода, използуван в [40], който е неприложим в банахови пространства с безкрайна размерност. Разглежданията ни се базират на метода на Ливитин, Милютин и Осмоловски, изложен от Алексеев, Тихомиров и Фомин в [1] за получаване на необходими и достатъчни условия за разрешимост на минимизационни задачи с ограничения, чиито данни са двукратно непрекъснато диференцируеми по Фреше функции.

Резултатите, изложени в Глава 2 са анонсирани в [36] и публикувани в [37].

Често използван прийом в математиката е замяната на даден обект с друг, който е близък (в някакъв смисъл) до изходния, но за разлика от него притежава по–добри свойства или удовлетворява предварително зададени условия. Този подход е залегнал в основата на вариационните методи, при които дадена функция се приближава с друга, която достига екстремна стойност и в различните методи за апроксимиране на функция с по–гладка (по–регулярна) от нея.

В Глава 3 излагаме резултати, получени, най–общо казано при варирането на разглежданите функции, чрез прилагане на идеи, заимствани от вариационните принципи или чрез използване на апроксимиращи функции.

Апроксимационните методи играят важна роля в негладкия анализ. Редица задачи от вариационното смятане и теорията на оптимизацията водят до разглеждане на негладки функции, които приемат и стойност безкрайност, дефинирани върху крайно или безкрайномерни пространства. Чрез използване на регуляризиращи процедури, базирани на инфималната конволюция (сумиране по епиграфика) с подходящи функции (вж. [7]) тези задачи могат да се атакуват с помощта на средства от класическия анализ. Основополагащи в тази област са работите на Йосида [76], Брезис [18], Моро [58] и други. Тези автори работят с изпъкнали полунепрекъснати отдолу функции, дефинирани в хилбертово пространство (което ще означаваме със символа H) и със съответните им изпъкнали субдиференциали, които са максимално монотонни многозначни оператори от H в H. Апроксимиращите функции, използвани от тях са от класа $C^{1,1}(H)$ (непрекъснато диференцируеми с липшицова производна).

При преминаването към неизпъкналия случай възникват редица трудности. Един начин за тяхното преодоляване е представен от Ласри и Лионс в [51]. Там авторите, мотивирани от изучаването на уравненията на Хамилтон–Якоби, дефинират апроксимиращи функции от класа $C^{1,1}(H)$ за равномерно приближаване на равномерно непрекъснати ограничени функции, дефинирани в хилбертово пространство. В последствие, като се опират на някои идеи, залегнали в [5], в статията си [6] Атуш и Азе доказват, че апроксимациите на Ласри и Лионс поточково апроксимират и полунепрекъснати отдолу функции с подходящ ръст, дефинирани в хилбертово пространство.

Добре известно е, че субдиференциалът на изпъкнала функция $f : H \to I\!R$ е граница по Куратовски на субдиференциалите на апроксимациите ѝ на Моро–Йосида (вж. [5] за случая на рефлексивно пространство). Този факт провокира възникването на естествения въпрос: каква е връзката между производните на апроксимациите (на Ласри и Лионс и Моро–Йосида) и субдиференциалите на апроксимираните функции? В Параграф 3.3 даваме отговор на този въпрос като разглеждаме субдиференциала на Кларк на локално липшицова функция.

В Параграф 3.1 даваме някои предварителни сведения, дефиниции и теореми за апроксимациите на Ласри и Лионс.

В Параграф 3.2 доказваме, че апроксимациите на Моро–Йосида на полунепрекъснати отдолу функции с подходящо условие за ръста са диференцируеми по Фреше почти навсякъде (в множество от втора категория на Бер) и имат някои остатъчни свойства (в сравнение с изпъкналия случай) по отношение на субдиференциалите на приближаваните функции.

Да напомним, че едно подмножество V на топологично пространство Y е от *първа категория на Бер* в Y, ако то може да се представи като изброимо обединение на никъде гъсти подмножества на Y, т.е. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, където $\operatorname{int} \overline{V_n} = \emptyset$. Подмножество V на топологичното пространство Y се нарича *резидуално* в Y, ако неговото допълнение $Y \setminus V$ е от първа категория на Бер в Y. Ако V не е от първа категория на Бер в Y, то V се нарича множество от *втора категория на Бер*.

Пространството Y се нарича *берово*, ако решението на произволна изброима фамилия от отворени и гъсти множества в Y, е гъсто в Y. Следователно във всяко берово пространство Y сечението на изброима фамилия от отворени и гъсти подмножества на Y ще бъде гъсто подмножество на Y и от тип G_δ в Y, а значи и резидуално. В берови пространства резидуалните подмножества съдържат гъсто и G_δ подмножество на пространството и са винаги от втора категория на Бер и от тази гледна точка се разглеждат като "големи", а техните допълнения като "малки" или "тънки" (вж. [4]). Всички пълни метрични пространства и в частност банаховите пространства са берови. Накрая, всяко отворено подмножество, както и всяко гъсто и G_δ подмножество на берово пространство са отново берови пространства, когато се разглеждат с индуцираната топология.

Ако едно свойство е изпълнено в точките на резидуално подмножество на берово пространство Y, то свойството се нарича *генерично* в Y.

В Параграф 3.4 доказваме, че диференцируемостта по Гато е генерично свойство за всяка непрекъсната функция, която е диференцируема по посока в гъсто и G_δ подмножество на банахово пространство с равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция.

В доказателството на този резултат използуваме идеята, залегнала в основата на вариационните принципи. Накратко тази идея се заключава в следното: ако разглеждаме точка, в която "почти се достига" минимума на полунепрекъснатата отдолу функция, дефинирана в пълно метрично пространство да се намери точка, "близка" до разглежданата, в която смутената по някакъв начин функция си достига минимума. Вариационният принцип, доказан от Екеланд има пряко отношение към негладкия анализ, тъй като смущаващата функция е недиференцируема. По–късно Борвейн и Прайс (вж. [16]) и Дьовил, Годфроа и Зизлер (вж. [27]) показват, че в подходящи банахови пространства може да се намери гладка смущаваща функция, със същите свойства.

Тъй като основно средство в някои от изложените в настоящата работа доказателства са вариационните методи, считаме, че е уместно да дадем техните формулировки в банахово пространство.

Вариационен принцип на Екеланд: ([31]) *Нека* $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *е собствена полунепрекъсната и ограничена отдолу функция и за* $\varepsilon > 0$ *точката* x_0 *е такава, че* $f(x_0) \le \inf\limits_{x \in X} f(x) + \varepsilon$*. Тогава за всяко* $\lambda > 0$ *съществува точка* $z \in \mathrm{dom} f$*, такава че*
(i) $\lambda\|z - x_0\| \le f(x_0) - f(z)$;
(ii) $\|z - x_0\| \le \dfrac{\varepsilon}{\lambda}$;
(iii) $\lambda\|x - z\| + f(x) > f(z)$, *ако* $x \ne z$.

Вариационен принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер: ([27]) *Нека* X *е* β*–гладко банахово пространство. Тогава за всяка собствена полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция* $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *и всяко* $\varepsilon > 0$ *съществува функция* $g \in C^1_\beta(X)$*, такава че функцията* $f + g$ *достига минимума си в* X, $||g||_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in X\} < \varepsilon$ *и* $||g'||_\infty < \varepsilon$*.*

Различните вариационни принципи често се използват за получаване на резултати за диференцируемост на реалнозначни функции. Например в [16] гладкият вариационен принцип на Борвейн и Прайс е използван в доказателството на диференцируемост по Гато в гъсто множество на изпъкнала функция. Приложение на вариационния принцип на Екеланд за генерична диференцируемост по Фреше има в доказателството на известната теорема на Екеланд и Лебург (вж. [32]). В [35] Георгиев прилага гладкия вариационен принцип на Борвейн и Прайс за получаване на генерична диференцируемост по Гато.

За доказване на основния резултат в Параграф 3.4 се използва Твърдение 3.4.1, в което прецизно се локализира точка на δ–минимум за смутената функция. Оценката на тази локализация е на принципа, използван във вариационния принцип на Екеланд. По аналогичен начин в Твърдение 3.4.1 bis се показва и локализация на точката на минимум на смутената функция в гладкия вариационен принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер. Дадени са някои приложения на получения основен резултат за диференцируемост на функцията разстояние и за изследване на свойствата на метрическата проекция.

Резултатите, изложени в Параграфи 3.2 и 3.3 са анонсирани в [39], а тези, изложени в Параграф 3.4 са публикувани в [38].

Глава 1

Субдиференциално смятане от първи ред

В тази глава разглеждаме въпроси на субдиференциалното смятане от първи ред с полунепрекъснати отдолу функции, дефинирани в банахово пространство.

1.1 Свойството Υ. Примери

Да въведем в началото някои предварителни означения. Както вече споменахме, символът X означава реално банахово пространство. S_X, B_X, (B_X^0) са съответно означенията на единичната сфера и на затвореното (отвореното) единично кълбо в X. Със $B[x,r]$ (респективно $B(x,r)$) означаваме затворено (респективно отворено) кълбо в X с център x и радиус r. Началото в X означаваме с 0. Спрегнатото пространство на X е X^*, а действието на елементите на X^* върху тези на X означаваме с $\langle\cdot,\cdot\rangle$. $\overline{I\!\!R}$ обозначава разширената реална права, т.е. $\overline{I\!\!R} = I\!\!R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. С $I\!\!R^+$ бележим неотрицателните реални числа, т.е. $I\!\!R^+ = \{r \in I\!\!R : r \geq 0\}$. Казваме, че функцията $f : X \to \overline{I\!\!R}$ е *собствена*, ако *дефиниционната ѝ област* $\operatorname{dom} f = \{x \in X : \ f(x) \in I\!\!R\}$ е непразно множество. Ако $T : X \to 2^{X^*}$ е многозначен оператор, то под негова *дефиниционна област* разбираме множеството $\mathrm{Dom}T = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$, а под негова *графика* – множеството $\mathrm{Gr}T = \{(x,x^*) \in X \times X^* : x \in \mathrm{Dom}T,\ x^* \in T(x)\}$.

В този параграф даваме дефиниция на свойството Υ и примери на многозначни оператори, които го притежават.

За да пристъпим към дефинирането на това понятие се нуждаем от някои предварителни разглеждания.

Нека $f : X \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, $h \in S_X$ е единичен вектор и $\lambda \in I\!\!R$. Дефинираме множествата

$$\boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x) = \{p \in X^* : \ \exists \tau > 0 \ : \ \forall t : \mid t \mid < \tau,\ f(x+th) - f(x) \geq t\langle p,h\rangle + \lambda t^2\},$$

ако $x \in \mathrm{dom} f$ и $\boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x) = \emptyset$, ако $x \notin \mathrm{dom} f$.

Определение 1.1.1 *Субдиференциал по посока $h \in S_X$ за функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ в точката $x \in X$ наричаме множеството*

$$\boldsymbol{\delta}_h f(x) = \bigcup_{\lambda \in I\!R} \boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x).$$

Основно свойство на така дефинираният субдиференциал по посока $\boldsymbol{\delta}_h f$ е, че той е непразен в гъсто подмножество на $\operatorname{dom} f$. Ще получим този резултат като следствие от неравенството, доказано в лемата по–долу.

Лема 1.1.2 *Нека $f : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция. Нека $a \in \operatorname{dom} f$ и $f(b) \geq r \in I\!R$, $b > a$. Тогава съществува $c \in [a, b)$ и редици $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_f c$, $p_n \in \boldsymbol{\delta} f(x_n)$, такива че $p_n(b-a) \geq r - f(a)$, където с $\boldsymbol{\delta}$ означаваме $\boldsymbol{\delta}_1$.*

Доказателство: Нека положим $s = \dfrac{r - f(a)}{b - a}$ и да разгледаме собствената полунепрекъсната отдолу функция $g(x) = f(x) - sx$. Тя достига минимума си върху интервала $[a, b]$.

Ако a е точка на минимум за g в $[a, b]$, то за всяко $n \in I\!N$ съществува $\alpha_n > 0$, такова че, ако положим $y_n = a - \dfrac{1}{n}$, имаме, че

$$f(y_n) - sy_n + \frac{\alpha_n}{n^2} > f(a) - sa.$$

Тогава полунепрекъснатата отдолу функция $f_n(x) = g(x) + \alpha_n(x-a)^2$ достига минимума си върху интервала $\left[a - \dfrac{1}{n}, a\right]$ в точка $x_n \in \left(a - \dfrac{1}{n}, a\right]$. Тъй като a е точка на минимум за g в $[a, b]$, то лесно се проверява, че x_n е точка на локален минимум за функцията f_n и следователно за $t \in I\!R$, такива че $\mid t \mid \leq \min\{n^{-1}, b - a\}$ имаме, че

$$f_n(x_n + t) \geq f_n(x_n),$$

т.е.

$$f(x_n + t) - f(x_n) \geq [s - 2\alpha_n(x_n - a)]t - \alpha_n t^2,$$

откъдето $p_n := s - 2\alpha_n(x_n - a) \in \boldsymbol{\delta} f(x_n)$. Тъй като x_n е точка на минимум за функцията f_n, лесно се вижда, че $f(x_n) \leq f(a) + s(x_n - a)$. Като се вземе предвид полунепрекъснатостта отдолу на функцията f и това, че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ заключаваме, че $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$, следователно $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_f a$.

Остава да положим $c = a$ и да видим, че $p_n(b-a) = [s - 2\alpha_n(x_n - a)](b-a) \geq s(b-a) = r - f(a)$.

Ако b е точка на минимум за функцията g в $[a, b]$, чрез непосредствена проверка се установява, че a също е точка на минимум, а този случай вече разгледахме.

В последния случай – когато точката на минимум c на g е такава, че $c \in (a, b)$ е очевидно, че $s \in \boldsymbol{\delta} f(c)$, така че полагаме $x_n = c$ и $p_n = s$ и с това доказателството е завършено. ■

Да забележим, че от доказаната лема лесно следва, че ограничеността на субдиференциала по посока $\boldsymbol{\delta} f$ на собствената полунепрекъсната отдолу функция $f : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ върху интервала $[x, y]$ е еквивалентна на липшицовостта на функцията в този интервал.

Следствие 1.1.3 *Ако $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, то за всяко $h \in S_X$ е в сила, че $\mathrm{Dom}\, \boldsymbol{\delta}_h f$ е гъсто подмножество в $\mathrm{dom} f$. Нещо повече, за всяко $x \in \mathrm{dom} f$ съществува редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{Dom} \boldsymbol{\delta}_h f$, такава че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} x$.*

Доказателство: За $x \in \mathrm{dom}\, f$ прилагаме Лема 1.1.2 за рестрикцията на функцията f върху правата $x + I\!R h$ и продължаваме получения линеен функционал до елемент на X^*. ■

Освен от въведеното понятие за субдиференциал по посока, за дефиницията на свойството Υ ще се нуждаем и от следния клас от реалнозначни функции:

$$\mathrm{A} := \{\alpha : I\!R^+ \to I\!R^+ \cup \{+\infty\},\ \alpha(0) = 0,$$
$$\alpha \text{ строго растяща, непрекъсната в } 0\}.$$

За всяко $x \in X$, такова че $f(x) \geq 0$ дефинираме функцията $\omega_x f(t) = \sup\{0, -f(y) : \|y - x\| \leq t\}$ и за всяко компактно множество K, такова че $f\,|_K \geq 0$, дефинираме функцията $\omega_K f(t) = \sup\limits_{x\in K} \omega_x f(t)$.

Ще приведем доказателството и на едно работно

Твърдение 1.1.4 *Нека $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция. Ако $f\,|_K \geq 0$, където K е компактно множество, то съществува функция $\alpha \in \mathrm{A}$, такава че $\alpha(t) \geq \omega_K f(t)$ за достатъчно малки положителни t.*

Доказателство: Ще покажем, че функцията $\omega_K f(t)$ е непрекъсната в нулата. Тъй като $\omega_K f(0) = 0$ и $\omega_K f(t)$ е растяща функция, достатъчно е да покажем, че за произволно $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta > 0$, такова че $\omega_K f(\delta) \leq \varepsilon$. От полунепрекъснатостта отдолу на f е ясно, че за произволно $\varepsilon > 0$ и за всяко $x \in K$, съществува $\delta_x > 0$, такова че от $\|y - x\| < \delta_x$ следва, че $f(y) > -\varepsilon$. Дефинираме отвореното множество $U = \bigcup\limits_{x\in K} B^0_X(x, \delta_x) \supset K$ и полагаме $\delta = \dfrac{1}{2} dist(K, X \setminus U)$. Тогава $\delta > 0$, тъй като K е компакт. За всяко $x \in K$ и y, такова че $\|y - x\| \leq \delta$ имаме, че $y \in U$ и $f(y) > -\varepsilon$. Следователно $\omega_K f(\delta) \leq \varepsilon$, откъдето функцията $\omega_K f(t)$ е непрекъсната в 0. Тогава функцията $\alpha(t) = \omega_K f(t) + t$ има желаното свойство. ■

Ще дефинираме свойството Υ за собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ и многозначен оператор $T : X \to 2^{X^*}$, което, ако е изпълнено, позволява да се приближат елементите от графиката на субдиференциала по посока на функцията f чрез елементи от графиката на оператора T.

Определение 1.1.5 *Казваме, че многозначният оператор $T : X \to 2^{X^*}$ има свойството Υ за собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ и пишем $T \in \Upsilon(f)$, ако е в сила следното:*
Съществува изображение $\Phi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$, такова че, ако $p \in \boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x)$, $\alpha \in \mathrm{A}$ и за достатъчно малки $t \geq 0$

$$\alpha(t) \geq \omega_{[x-\delta h, x+\delta h]}(f(\cdot) - f(x) - \langle p, \cdot - x\rangle - \lambda\|P_h(\cdot - x)\|^2)(t), \qquad (1.1)$$

където $\delta > 0$ и P_h е проектор с норма единица върху $x + I\!Rh$, то съществуват редици $x_n \in X$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_f x$, $p_n + \xi_n \in T(x_n)$ такива, че за $\gamma = \Phi(\alpha)$ е изпълнено

(i) $\|\xi_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
(ii) $\langle p_n, h\rangle = \langle p, h\rangle, \quad \forall n \in I\!N$;
(iii) $d_h^x(x_n) := dist(x_n, x + I\!Rh) \leq \gamma\left(\frac{1}{n}\right)$ *за достатъчно големи $n \in I\!N$;*
(iv) $\|p_n\|\gamma\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Тук с $dist(\cdot, A)$ е означена обичайната функция разстояние до множеството A. Да отбележим, че предположението $p \in \boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x)$ и Твърдение 1.1.4 гарантират съществуването на функция $\alpha \in \mathrm{A}$, удовлетворяваща (1.1). Освен това (iii) и (iv) ни позволяват да твърдим, че $d_h^x(x_n)||p_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Въведеното по–горе определение е удобно за доказване на редица важни свойства. Като първо приложение ще приведем доказателство на една значима теорема на Загродни за средните стойности. Тя е доказана за локално липшицова функция от Загродни в [78] за субдиференциала ѝ на Кларк и за полунепрекъсната отдолу функция от Тибо в [71] за произволен пресубдиференциал и от Осел, Корвелек и Ласонд в [10] за разглеждания от тях абстрактен субдиференциал ∂, при предположението, че пространството има ∂–диференцируема норма.

Не е ясно дали гладките субдиференциали на Гато $\partial^G f$ и $D_G^- f$ на собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ са пресубдиференциали, за да се извлече от резултата на Тибо валидността на теоремата на Загродни за тях. От друга страна гладкото по Гато пространство X може да няма диференцируема по Гато норма и по тази причина не може да се приложи и доказаната от Осел, Корвелек и Ласонд теорема на Загродни. Както е показано в изложението по–нататък обаче, D_G^-, както и всички β–гладки субдиференциали, притежава свойството Υ за произволна полунепрекъсната отдолу функция (т.е. $D_G^- f \in \Upsilon(f)$). Затова, доказаната по–долу теорема може да се разглежда като продължение на теоремата на Загродни за β–гладки субдиференциали.

Теорема 1.1.6 *Нека $T \in \Upsilon(f)$, където функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу. Тогава за всяко $x \in \mathrm{dom} f$, $y \in X$, $y \neq x$ и всяко $r \in I\!R$, такова че $r \leq f(y)$ съществуват $c \in [x, y)$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_f c$ и $p_n \in T(x_n)$, такива че*

(i) $\dfrac{\|x - y\|}{\|y - c\|} \liminf\limits_{n\to\infty} \langle p_n, y - x_n\rangle \geq r - f(x)$;
(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} \langle p_n, y - x\rangle \geq r - f(x)$.

Доказателство: Нека означим $h = ||x-y||^{-1}(y-x)$. От Лема 1.1.2, приложена за рестрикцията на функцията f върху правата $x+\mathbb{R}h$ следва, че съществуват $c \in [x,y)$ и $y_n \in x+\mathbb{R}h$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} c$ и $q_n \in \boldsymbol{\delta}_h f(y_n)$, такива че $\langle q_n, y-x\rangle \geq r - f(x)$. Тъй като $q_n \in \boldsymbol{\delta}_h f(y_n)$ и $T \in \Upsilon(f)$, то от изпълнението на свойството Υ от оператора T за функцията f, за достатъчно големи n можем да намерим $x_n \in X$ и $r_n + \xi_n \in T(x_n)$, такива че
a) $||x_n - y_n|| < n^{-1},\ |f(x_n) - f(y_n)| < n^{-1}$;
b) $||\xi_n|| < n^{-1}$, $\langle r_n, h\rangle = \langle q_n, h\rangle$ и $d_h^x(x_n)||r_n|| < n^{-1}$.
Тъй като $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} c$ имаме, че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} c$. Ако $x_n' \in x+\mathbb{R}h$ е такова, че $||x_n - x_n'|| = d_h^x(x_n)$, то $x_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ и за $p_n = r_n + \xi_n$ можем да запишем, че

$$\begin{aligned}
\langle p_n, y-x_n\rangle &= \langle r_n, y-x_n'\rangle + \langle r_n, x_n' - x_n\rangle + \langle \xi_n, y - x_n\rangle \\
&\geq \langle q_n, y - x_n'\rangle - ||r_n||d(x_n) - ||\xi_n||\,||y-x_n|| \\
&\geq (r - f(x)).\frac{||y-x_n'||}{||y-x||} - ||r_n||d_h^x(x_n) - ||\xi_n||\,||y-x_n||.
\end{aligned}$$

Поради факта, че числовите редици $||r_n||d_h^x(x_n)$ и $||\xi_n||\,||y-x_n||$ клонят към нула получаваме, че

$$\liminf_{n\to\infty}\ \langle p_n, y-x_n\rangle \geq (r-f(x))\frac{||y-c||}{||y-x||},$$

което е (i). По аналогичен начин се показва, че $\langle p_n, y-x\rangle \geq \langle q_n, y-x\rangle - ||\xi_n||\,||y-x||$, откъдето непосредствено следва (ii). ■

Както вече отбелязахме, ще дадем няколко нетривиални примера за многозначни оператори, които притежават свойството Υ за широки класове от функции.

Ще започнем с доказването на факта, че в β–гладко банахово пространство $D_\beta^- f \in \Upsilon(f)$ за всяка собствена полунепрекъсната отдолу функция f.

Да напомним, че когато банаховото пространство X е β–гладко в него е дефинирана липшицова функция ψ, наречена *функция на Ледюк*, такава че $\psi \in C_\beta^1(X\setminus\{0\})$, $\psi(tx) = \mid t \mid \psi(x)$, $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$, за която съществува положителна константа a със свойството $\|x\| \leq \psi(x) \leq a\|x\|$ за $x \in X$ (вж. [27]). Стандартно е извеждането на факта, че $\psi^2 \in C_\beta^1(X)$, $D\psi^2(0) = 0$ и $\lim_{x\to 0}\|D\psi^2(x)\| = 0$. Да припомним, че с $Df(x)$ или $f'(x)$ означаваме производната по Гато на функцията f в точката $x \in X$.

За функция $\alpha \in \mathrm{A}$ с $\bar\alpha \in \mathrm{A}$ бележим обратната функция, като $\bar\alpha(\alpha(t)) = t$ и дефинираме изображението $\Phi : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ като $\Phi(\alpha)(t) = \bar\alpha\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

Следващата лема е вариант на гладкия вариационен принцип с ограничения (вж. [29]).

Лема 1.1.7 *Нека X е β–гладко банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, такава че $f(0) = 0$, приемаща* *неотрицателни стойности върху* $[-\delta h, \delta h]$ *и* $\alpha(t) \geq \omega_{[-\delta h,\delta h]} f(t)$ *за достатъчно малки неотрицателни* t*, където* $\delta > 0$ *и* $\alpha \in \mathrm{A}$. *Тогава съществуват* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_f 0$, $p_n + \xi_n \in D^-_\beta f(x_n)$*, такива че*

(i) $\|\xi_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$*;*

(ii) $\langle p_n, h\rangle = 0,\ \forall n \in I\!N$*;*

(iii) $d^0_h(x_n) \leq \gamma\big(\frac{1}{n}\big)$ *за достатъчно големи* $n \in I\!N$*;*

(iv) $\|p_n\|\gamma\big(\frac{1}{n}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

където $\gamma = \Phi(\alpha)$*, а* Φ *е дефинираното по–горе изображение.*

Доказателство: За всяко $n \in I\!N$ дефинираме затворените множества

$$F_n = \big\{x \in X : \|P_h x\| \leq \frac{1}{n},\ \|x - P_h x\| \leq \gamma\big(\frac{1}{n}\big)\big\},$$

полагаме $c_n = \dfrac{1}{n^2\gamma^2\big(\frac{1}{n}\big)}$ и разглеждаме полунепрекъснатите отдолу функции

$$e_n(x) = \begin{cases} f(x) + \psi^2(P_h x) + c_n\psi^2(x - P_h x), & x \in F_n \\ +\infty, & x \notin F_n. \end{cases}$$

За достатъчно големи $n \in I\!N$ и $x \in F_n$ имаме, че $P_h x \in [-\delta h, \delta h]$ и $\|x - P_h x\| \leq \gamma\big(\frac{1}{n}\big)$. Тогава $e_n(x) \geq f(x) \geq -\alpha(d^0_h(x))$ и $d^0_h(x) \leq ||x - P_h x|| \leq \gamma(\frac{1}{n})$. Следователно, като използуваме, че функцията α е растяща, от начина на дефиниране на функцията γ имаме, че

$$e_n(x) \geq f(x) \geq -\alpha\big(\gamma\big(\frac{1}{n}\big)\big) = -\alpha\big(\bar{\alpha}\big(\frac{1}{2n^2}\big)\big) = -\frac{1}{2n^2}.$$

Когато x е върху границата на F_n, която ще означим с ∂F_n, е възможно да се случи следното:

$\|P_h x\| = \dfrac{1}{n}$ и тогава $e_n(x) \geq -\dfrac{1}{2n^2} + \psi^2(P_h x) \geq -\dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2} \geq \dfrac{1}{2n^2}$, или

$\|x - P_h x\| = \gamma\big(\dfrac{1}{n}\big)$ и тогава $e_n(x) \geq -\dfrac{1}{2n^2} + c_n\psi^2(x - P_h x) \geq$

$-\dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2\gamma^2\big(\frac{1}{n}\big)}\gamma^2\big(\dfrac{1}{n}\big) \geq \dfrac{1}{2n^2}$.

Като приложим гладкия вариационен принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер, получаваме че съществуват функции $g_n \in C^1_\beta(X)$, такива че $\max\{\|g_n\|_\infty,\ \|g'_n\|_\infty\} < \dfrac{1}{4n^2}$, за които функциите $e_n + g_n$ достигат минимума си в точки x_n. Да обърнем внимание върху това, че

$$(e_n + g_n)\mid_{\partial F_n} > \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4n^2} > (e_n + g_n)(0),$$

което показва, че $x_n \in int F_n$. Очевидно е, че $d^0_h(x_n) \leq \|x_n - P_h x_n\| \leq \gamma\big(\frac{1}{n}\big)$, което е (iii), а $\|x_n\| \leq \dfrac{1}{n} + \gamma\big(\dfrac{1}{n}\big)$ и следователно $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тъй като $(e_n + g_n)(x_n) \leq$

$(e_n+g_n)(0)$, изпълнено е, че $f(x_n)-e_n(0)\le g_n(0)-g_n(x_n)$. Тогава $f(x_n)\le \dfrac{1}{2n^2}$ и, тъй като $f(0)=0$ и f е полунепрекъсната отдолу, $f(x_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, т.е. $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f}0$.

Полагаме $p_n=-c_nD\psi^2(\cdot-P_h\cdot)(x_n)$, $\xi_n=-g_n'(x_n)-D\psi^2(P_h\cdot)(x_n)$. Да отбележим, че производните съществуват според правилото за деференциране на съставна функция. От дефиницията имаме, че $p_n+\xi_n\in D_\beta^- f(x_n)$.

Нуждаем се от едно лесно следствие от правилото за диференциране на съставна функция, а именно от следния

ФАКТ: Ако $f\in C_\beta^1(X)$, $T:X\to X$ е ограничен линеен оператор, то за всеки $x,\ y\in X$ е в сила, че $\langle Df(T\cdot)(x),y\rangle=\langle Df(Tx),Ty\rangle$ и в частност $\|Df(T\cdot)(x)\|\le\|T\|.\|Df(Tx)\|$.

В нашия случай:

$$\Big\|D\psi^2(P_h\cdot)(x_n)\Big\|\le 2a\|x_n\|\Big\|D\psi(P_hx_n)\Big\|$$

и като използуваме, че $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ получаваме, че $\|\xi_n\|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, с което доказваме (i).

Също така имаме, че $\langle p_n,h\rangle=-c_n\langle D\psi^2(x_n-P_hx_n),h-P_hh\rangle=0$, което е (ii). Накрая от

$$\|p_n\|=c_n\Big\|D\psi^2(\cdot-P_h\cdot)(x_n)\Big\|\le 2c_n\psi(x_n-P_hx_n)\Big\|D\psi(\cdot-P_h\cdot)(x_n)\Big\|\le$$

$$2c_na\|x_n-P_hx_n\|\Big\|D\psi(\cdot-P_h\cdot)(x_n)\Big\|\le\frac{2a}{n^2\gamma^2\big(\frac1n\big)}\gamma\big(\frac1n\big)\Big\|D\psi(\cdot-P_h\cdot)(x_n)\Big\|$$

получаваме, че $\|p_n\|\gamma\big(\frac1n\big)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, което е (iv). ■

Теорема 1.1.8 *Ако X е β–гладко банахово пространство и $f:X\to I\!R\cup\{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, то $D_\beta^-f\in\Upsilon(f)$.*

Доказателство: Да вземем произволни $x\in X$, $h\in S_X$, $p\in\boldsymbol{\delta}_h^\lambda f(x)$ и нека $\delta>0$ е такова, че за $\mid t\mid<\delta$ имаме, че

$$f(x+th)-f(x)\ge t\langle p,h\rangle+\lambda t^2.$$

Разглеждаме функцията

$$g(y)=f(x+y)-f(x)-\langle p,y\rangle-\lambda\psi^2(P_hy).$$

Да отбележим, че ако $\alpha\in$ A удовлетворява (1.1), то $\alpha(t)\ge\omega_{[-\delta h,\delta h]}g(t)$ за достатъчно малки неотрицателни t и да приложим Лема 1.1.7 за функцията g. Получаваме редици $y_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow_g}0$, $p_n^1+\xi_n^1\in D_\beta^-g(y_n)$ с доказаните там свойства.

Полагаме $x_n = x + y_n$. Тъй като $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $g(y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ имаме, че $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} x$. Изпълнено е освен това, че

$$d_h^x(x_n) = dist(x_n, x + I\!\!Rh) = dist(y_n, I\!\!Rh) = d_h^0(y_n) \le \gamma\big(\frac{1}{n}\big).$$

Ако $p_n = p + p_n^1$, то, разбира се, $\langle p_n, h\rangle = \langle p, h\rangle$ и $\|p_n\|\gamma\big(\frac{1}{n}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тъй като $\gamma\big(\frac{1}{n}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Нека $\xi_n = \xi_n^1 - \xi_n^2$, където $\xi_n^2 = \lambda D\psi^2(P_h\cdot)(y_n)$ (отново да отбележим, че съществуването на производните следва от правилото за деференциране на съставна функция). Оттук получаваме, че $\|\xi_n^2\| \le 2 \mid \lambda \mid \|y_n\|\|D(P_h\cdot)(y_n)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, следователно $||\xi_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Да отбележим, че $p_n + \xi_n \in D_\beta^- f(x_n)$, с което приключваме доказателството. ■

Тъй като за произволна борнология β в β–гладко пространство X и произволна собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ е в сила, че $D_\beta^- f(x) \subset \partial^\beta f(x)$ за всяко $x \in X$ като следствие от Теорема 1.1.8 получаваме, че ∂^β субдиференциалите също притежават свойството Υ за произволна собствена полунепрекъсната функция.

Ще дефинираме понятие, от което ще се нуждаем в следващите разглеждания и което слабо се различава от понятието за субдиференциал, разглеждано от Тибо и Загродни в [73].

Класът $\mathcal{F}$ от полунепрекъснати отдолу собствени функции, дефинирани в банахово пространство X наричаме *допустим* (за нашите цели), ако той съдържа всички изпъкнали непрекъснати функции и за всяка функция $f \in \mathcal{F}$ и g изпъкнала и непрекъсната, е изпълнено, че функцията $f + g \in \mathcal{F}$.

Определение 1.1.9 *Изображението ∂, което на всяка функция f от допустим клас $\mathcal{F}$ съпоставя оператор $\partial f : X \to 2^{X^*}$, се нарича абсубдиференциал за класа $\mathcal{F}$, ако са в сила следните условия:*
1) $\forall f \in \mathcal{F}$ $\;\mathrm{Dom}\partial f \subset \mathrm{dom} f$.
2) $\forall f,\ h\ \in \mathcal{F}$ $\partial f(x) = \partial h(x)$, *когато f и h съвпадат в околност на $x \in X$.*
3) $0 \in \partial f(x)$, *когато x е локален минимум на $f \in \mathcal{F}$.*
4) $0 \in \partial f(x) + \partial^c g(x)$, *когато g е изпъкнала непрекъсната функция и за $f \in \mathcal{F}$ функцията $f + g$ има локален минимум в x.*

Като се вземат предвид свойствата на субдиференциала на Кларк–Рокафелар (вж. например [21], Теорема 2.9.8) лесно се доказва следното

Твърдение 1.1.10 *Изображението $\partial^{CR} f : X \to 2^{X^*}$ е абсубдиференциал за класа, състоящ се от всички собствени полунепрекъснати отдолу функции.*

Доказателствата на Лема 1.1.7 и Теорема 1.1.8 могат да се адаптират за произволно банахово пространство като квадратът на функцията на Ледюк се замени с квадрата на нормата, за да се получи по–долу формулираното твърдение, за което ще дадем само схема на доказателството.

Теорема 1.1.11 *Ако ∂ е абсубдиференциал за допустим клас $\mathcal{F}$ от реалнозначни функции, дефинирани върху произволно банахово пространство, то за всяка функция $f \in \mathcal{F}$ е изпълнено, че $\partial f \in \Upsilon(f)$.*

Доказателство: Полагаме $\psi(\cdot) = \|\cdot\|$ и използуваме вариационния принцип на Екеланд, вместо гладкия вариационен принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер. Следваме доказателството на Лема 1.1.7 и Теорема 1.1.8, като елементарното правило за сумата, използувано на някои стъпки в доказателствата, по–точно, че $0 \in D^-_\beta f(x) + D^-_\beta g(x)$, ако g е β–гладка и x е локален минимум за функцията $f+g$ се заменя с условие 4) от Определение 1.1.9. Последното е възможно, тъй като функциите, които се разглеждат са изпъкнали (тъй като са сума на квадрата на нормата и на смущението). ■

Да отбележим, че по напълно аналогичен на изложения по–горе начин може да се покаже, че пресубдиференциалите, разглеждани от Тибо (вж. [71]) също притежават свойството Υ за всяка собствена полунепрекъсната отдолу функция.

Както вече споменахме в Увода, Осел, Корвелек и Ласонд в работата си [10] наскоро дефинират много общо понятие за субдиференциал, включващо субдиференциала на Кларк–Рокафелар и гладките ∂^β субдиференциали. Ако банаховото пространство X притежава еквивалентна ∂–диференцируема норма, то за да покажем, че съответният $\partial f \in \Upsilon(f)$ за всяка собствена полунепрекъсната отдолу функция f е достатъчно да приложим гладкия вариационен принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер.

1.2 Псевдо изпъкнали функции

Различни класове функции, притежаващи някои от свойствата на изпъкналите функции са били разглеждани от различни автори и наричани квазиизпъкнали, полуизпъкнали, псевдо изпъкнали и т.н., което води до факта, че понятието псевдо изпъкнала функция няма фиксирано значение. Тук ние използуваме като основа следната характеризация на изпъкналите функции, дефинирани в банахово пространство, доказана от Кореа, Джофре и Тибо:

Теорема 1.2.1 ([25], Теорема 2.4) *Собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е изпъкнала тогава и само тогава, когато нейният субдиференциал на Кларк–Рокафелар е монотонен оператор.*

Да припомним, че многозначен оператор $T : X \to 2^{X^*}$ се нарича *монотонен*, ако за всяко $x,\ y \in X$

$$\langle x^* - y^*, x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x^* \in Tx,\ \forall y^* \in Ty.$$

Възможността да се характеризират полунепрекъснатите отдолу изпъкнали функции посредством свойството монотонност на субдиференциала им на Кларк–Рокафелар ни мотивира за изучаването на функции, чиито субдиференциал на Кларк–Рокафелар има по–общо свойство, което наричаме φ–монотонност. Да отбележим, че подобно свойство е разглеждано от Оетли и Тера в [59] като обобщение на свойството монотонност на оператор.

Определение 1.2.2 *Нека $\varphi : X \to I\!R$ е четна, изпъкнала, непрекъсната и диференцируема по Гато в началото функция, такава че $\varphi(0) = 0$ и $\varphi'(0) = 0$.*

Многозначният оператор $T : X \to 2^{X^*}$ се нарича φ–монотонен, ако за всеки $x,\ y \in X$

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq -\varphi(x - y), \quad \forall x^* \in Tx,\ \forall y^* \in Ty.$$

Ще считаме, че неравенството тривиално е изпълнено, ако Tx или Ty са празни множества. Всички неравенства, включващи множества, които се срещат по–долу имат същото значение. За простота от тук нататък предполагаме, че е дадена фиксирана функция φ, притежаваща горните свойства.

Определение 1.2.3 *Казваме, че собствената полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_\varphi$ и пишем $f \in \mathcal{C}_\varphi$, ако $\partial^{CR} f$ е φ–монотонен.*

Да отбележим, че ако разгледаме функцията $\varphi \equiv 0$, то изпъкналите полунепрекъснати отдолу функции принадлежат на класа $\mathcal{C}_0$.

За всяка функция $f \in \mathcal{C}_\varphi$ дефинираме многозначния оператор $\partial^\varphi f : X \to 2^{X^*}$, който на всяко $x \in X$ съпоставя множеството

$$\partial^\varphi f(x) = \{p \in X^* : f(y) \geq f(x) + \langle p, y - x\rangle - \varphi(y - x),\ \forall y \in X\}. \tag{1.2}$$

Ако $T,\ S : X \to 2^{X^*}$ са многозначни оператори, то със символа $T \subset S$ означаваме включването на множествата $\mathrm{Gr}T \subset \mathrm{Gr}S$, а със символа $T \equiv S$ означаваме съвпадането на множествата $\mathrm{Gr}T \equiv \mathrm{Gr}S$.

Ще покажем, че ако $f \in \mathcal{C}_\varphi$, то $\partial^{CR} f \equiv \partial^\varphi f$, което до голяма степен ще улесни разглежданията, поради по–удобния за пресмятания вид на последния. За целта ще докажем лема, вариант на която се съдържа в работата на Кореа, Джофре и Тибо ([25], Теорема 2.2).

Лема 1.2.4 *Ако $T \in \Upsilon(f)$, където $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, е φ–монотонен, то $T \subset \partial^\varphi f$.*

Доказателство: Разглеждаме произволен елемент $p \in T(x)$. Тъй като $T \in \Upsilon(f)$ от Теорема 1.1.6 следва, че за всяко $y \in \mathrm{dom} f$, $y \neq x$ (ако такова y не съществува няма какво да се доказва) съществуват редици $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} c \in (x, y]$ и $p_n \in T(x_n)$, такива че

$$f(x) - f(y) \leq \frac{\|x - y\|}{\|x - c\|} \liminf_{n\to\infty} \langle p_n, x - x_n\rangle.$$

От φ–монотонността на оператора T имаме, че

$$\langle p_n, x - x_n\rangle - \langle p, x - x_n\rangle \leq \varphi(x - x_n)$$

и следователно

$$\begin{aligned} f(x)-f(y) &\leq \frac{\|x-y\|}{\|x-c\|}\lim_{n\to\infty}\langle p, x-x_n\rangle + \frac{\|x-y\|}{\|x-c\|}\lim_{n\to\infty}\varphi(x-x_n) \\ &= \frac{\|x-y\|}{\|x-c\|}\langle p, x-c\rangle + \frac{\|x-y\|}{\|x-c\|}\varphi(x-c) \\ &\leq \langle p, x-y\rangle + \varphi(x-y), \end{aligned}$$

където за последното неравенство използуваме, че функцията φ е изпъкнала и $\varphi(0)=0$. Окончателно получаваме, че $f(y)-f(x) \geq \langle p, y-x\rangle - \varphi(y-x)$, което означава, че $p \in \partial^{\varphi} f(x)$. ■

Както вече показахме $\partial^{CR} f \in \Upsilon(f)$ (вж. Теорема 1.1.11). Освен това от дефинициите е ясно, че $\partial^{\varphi} f \subset \partial^{CR} f$, откъдето получаваме следното

Следствие 1.2.5 *Ако $f \in \mathcal{C}_{\varphi}$, то $\partial^{CR} f \equiv \partial^{\varphi} f$.*

За да установим, че псевдо изпъкналите функции от класа $\mathcal{C}_{\varphi}$ притежават някои свойства, аналогични на тези на изпъкналите функции, първо ще докажем една полезна лема за функции, дефинирани върху реалната права, които имат φ–монотонен субдиференциал по посока.

Лема 1.2.6 *Ако $f : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция и $\boldsymbol{\delta} f$ е φ–монотонен, то*
a) dom$f$ *е интервал, във вътрешността на който функцията f е локално липшицова.*
b) *за всеки $a,\ b \in I\!R$ и всяко $\lambda \in (0,1)$*

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)+2\lambda(1-\lambda)\varphi(a-b). \tag{1.3}$$

c) *Производната по посока $f'(x;\pm 1)$ съществува за всяко $x \in$ dom$f$ и принадлежи на $\overline{I\!R}$.*
Нещо повече, ако дефинираме многозначният оператор $Df : I\!R \to 2^{I\!R}$, такъв че Dom$Df \subset$ dom$f$ *като*

$$Df(x) = \{p \in I\!R :\ p \leq f'(x;1),\ p \geq -f'(x;-1)\},$$

то Df е φ–монотонен.

Доказателство: Ако dom$f$ е едноточково множество няма какво да се доказва, така че предполагаме, че случаят не е такъв.
a) Нека $\varepsilon > 0$ е такова, че $\{x-2\varepsilon, y+2\varepsilon\} \subset$ dom$f$ за някое $x < y$. Ще покажем, че f е липшицова върху $[x,y]$, като в частност ще покажем, че $[x,y] \subset$ dom$f$. Да допуснем противното. Тогава от направената след доказателството на Лема 1.1.2 забележка следва, че съществуват $p_n \in \boldsymbol{\delta} f(x_n),\ x_n \in [x-\varepsilon, y+\varepsilon]$, такива, че

$| p_n | \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Но тогава, тъй като е очевидно, че $\boldsymbol{\delta} f \in \Upsilon(f)$, от Лема 1.2.4 следва, че

$$\begin{aligned} f(y+2\varepsilon) &\geq f(x_n) + p_n(y - x_n + 2\varepsilon) - \varphi(y - x_n + 2\varepsilon) \\ &\geq f(x_n) + p_n\varepsilon - \varphi(y - x + 4\varepsilon), \end{aligned}$$

откъдето $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Но полунепрекъснатата отдолу функция f е ограничена отдолу върху компактното множество $[x-2\varepsilon, y+2\varepsilon]$, което води до противоречие.

b) Ако a или b не принадлежат на $\mathrm{dom} f$, то (1.3) е тривиално, така че нека $\{a, b\} \subset \mathrm{dom} f$. Тъй като $[a, b] \subset \mathrm{dom} f$ и $\mathrm{Dom}\boldsymbol{\delta} f$ е гъсто в $\mathrm{dom} f$ множество, достатъчно е да се докаже неравенството за случая, когато $c = \lambda a + (1-\lambda)b \in \mathrm{Dom}\boldsymbol{\delta} f$. Нека $p \in \boldsymbol{\delta} f(c) \subset \partial^{\varphi} f(c)$, което означава, че

$$\begin{aligned} f(a) &\geq f(c) + p(a-c) - \varphi(a-c) \\ &\geq f(c) + (1-\lambda)(a-b)p - (1-\lambda)\varphi(a-b) \end{aligned}$$

(да отбележим, че тъй като φ е изпъкнала и $\varphi(0) = 0$, $\varphi((1-\lambda)(a-b)) \leq (1-\lambda)\varphi(a-b)$) и по подобен начин имаме, че

$$f(b) \geq f(c) + \lambda(b-a)p - \lambda\varphi(b-a).$$

Умножаваме първото неравенство с λ, второто с $(1-\lambda)$ и ги събираме, като използуваме, че $\varphi(a-b) = \varphi(b-a)$, за да получим, че

$$\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) \geq f(c) - 2\lambda(1-\lambda)\varphi(a-b),$$

което е (1.3).

c) Вземаме произволно $x \in \mathrm{dom} f$ и нека редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ намалява към x по такъв начин, че

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}.$$

Прилагаме (1.3), за да получим за $\lambda \in (0, 1)$, че

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_n) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_n) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x_n - x)$$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_n) - f(x) \leq (1-\lambda)(f(x_n) - f(x)) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x_n - x).$$

Умножаваме последното неравенство с $[\lambda x + (1-\lambda)x_n - x]^{-1} = (1-\lambda)^{-1}(x_n - x)^{-1} > 0$ и като вземем супремум по $\lambda \in (0, 1)$, получаваме

$$\sup_{t \leq x_n - x} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \leq \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} + 2\frac{\varphi(x_n - x)}{x_n - x}.$$

Да вземем сега границата при $n \to \infty$ и да използуваме, че $\varphi'(0) = 0$:

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \leq \liminf_{t\downarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t},$$

което дава съществуването на $f'(x;1)$. Съществуването на $f'(x;-1)$ може да се докаже по подобен начин.

За да завършим, да вземем произволни $x, y \in \operatorname{dom} f$, такива че $x < y$ и произволни $p \in Df(x),\ q \in Df(y)$. Да фиксираме $\varepsilon \in (0, \dfrac{y-x}{2})$. От дефиницията $p \leq f'(x;1)$, така че можем да намерим $z > x$, такова че $z - x < \varepsilon$ и $f(z) - f(x) > (p-\varepsilon)(z-x)$. Като приложим Лема 1.1.2 можем да намерим x_1, такова че $\mid x_1 - x \mid < \varepsilon$ и $p_1 \in \boldsymbol{\delta} f(x_1)$, такова че $p_1 > p - \varepsilon$.

По същия начин, като използуваме, че $q \geq -f'(y;-1)$ намираме y_1 такова, че $\mid y_1 - y \mid < \varepsilon,\ q_1 \in \boldsymbol{\delta} f(y_1),\ q_1 < q + \varepsilon$. Прилагайки φ–монотонността на $\boldsymbol{\delta} f$ получаваме

$$-\varphi(y_1 - x_1) \leq (q_1 - p_1)(y_1 - x_1) < (q - p + 2\varepsilon)(y_1 - x_1) \leq$$

$$(q-p)(y-x) + 2\varepsilon \mid y_1 - x_1 \mid + 2\varepsilon \mid q - p \mid .$$

Лявата страна на неравенството клони към $-\varphi(y-x)$ при ε, клонящо към нула от непрекъснатостта на φ, докато дясната страна очевидно клони към $(q-p)(y-x)$. С това φ–монотонността на Df е доказана. ■

Ще покажем, че ако съществува оператор T, който е φ–монотонен и притежава свойството Υ за собствена полунепрекъсната отдолу функция, то субдиференциалът ѝ по посока също е φ–монотонен оператор.

Твърдение 1.2.7 *Ако операторът $T \in \Upsilon(f)$ и T е φ–монотонен, където функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена и полунепрекъсната отдолу, то за всеки $x \in X,\ h \in S_X$ и $t \in I\!R$ е в сила, че*

$$\langle \boldsymbol{\delta}_h f(x+th) - \boldsymbol{\delta}_h f(x), th \rangle \geq -\varphi(th). \tag{1.4}$$

Доказателство: Да означим $y = x + th$. Разглеждаме произволни $p \in \boldsymbol{\delta}_h f(x)$, $q \in \boldsymbol{\delta}_h f(y)$. От Твърдение 1.1.4 можем да намерим функции $\alpha_x(t),\ \alpha_y(t) \in \mathrm{A}$, които за достатъчно малки неотрицателни t удовлетворяват условието (1.1) съответно за точките x и y. Ако означим $\alpha(t) = \max\{\alpha_x(t),\ \alpha_y(t)\}$, то $\alpha \in \mathrm{A}$ и удовлетворява условието (1.1) за точките x и y едновременно. Тъй като $T \in \Upsilon(f)$, то от дефиницията на свойството Υ имаме, че за $\gamma(t) = \Phi(\alpha(t))$ съществуват $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} x,\ p_n + \xi_n \in T(x_n)$, такива че

$(*)$ (i) $\|\xi_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (ii) $\langle p_n, h\rangle = \langle p, h\rangle$, (iii) $d(x_n) \leq \gamma(\frac{1}{n})$, (iv) $\|p_n\|\gamma(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

и съществуват $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow_f} y,\ q_n + \eta_n \in T(y_n)$, такива че

$(**)$ (i) $\|\eta_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (ii) $\langle q_n, h\rangle = \langle q, h\rangle$, (iii) $d(y_n) \leq \gamma(\frac{1}{n})$, (iv) $\|q_n\|\gamma(\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

От φ–монотонността на T следва, че

$$\langle x_n - y_n, p_n + \xi_n - q_n - \eta_n \rangle \geq -\varphi(x_n - y_n), \tag{1.5}$$

т.е. $\langle x_n - y_n, \xi_n - \eta_n\rangle + \langle x_n - y_n, p_n - q_n\rangle \geq -\varphi(x_n - y_n)$, и като използуваме (i) имаме, че първото събираемо в ляво клони към нула. Да вземем $x'_n,\ y'_n \in x + I\!R h$, такива че $||x'_n - x_n|| = d_h^x(x_n)$, $||y'_n - y_n|| = d_h^x(y_n)$ и да отбележим, че $x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Тогава

$$\langle x_n - y_n, p_n - q_n\rangle = \langle x_n - x, p_n - q_n\rangle + \langle y - y_n, p_n - q_n\rangle + \langle x - y, p_n - q_n\rangle.$$

Да забележим, че последното събираемо в дясно е равно на $\langle x - y, p - q\rangle$ от (ii), докато

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x, p_n - q_n\rangle| &\leq ||x_n - x'_n||\,||p_n - q_n|| + ||x - x'_n||\,|\langle h, p - q\rangle| \\ &\leq d_h^x(x_n)(||p_n|| + ||q_n||) + ||x - x'_n||\,|\langle h, p - q\rangle|. \end{aligned}$$

Тогава $||x - x'_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и условията (iii) и (iv) от $(*)$ и $(**)$ дават, че $\langle x_n - x, p_n - q_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Аналогично имаме, че $\langle y - y_n, p_n - q_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Окончателно, като направим граничен преход при $n \to \infty$ в двете страни на (1.5) и като използваме непрекъснатостта на функцията φ получаваме, че $\langle x - y, p - q\rangle \geq -\varphi(x - y)$. ■

Тъй като, ако f е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_\varphi$, то по дефиниция $\partial^{CR} f$ е φ–монотонен оператор и от Твърдение 1.2.7 следва, че за субдиференциалът ѝ по посока е в сила неравенство (1.4). Сега ще докажем твърдение, обратно на вече доказаното, а именно, че ако собствената полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е такава, че субдиференциалът ѝ по посока удовлетворява неравенството (1.4), то тя е псевдо изпъкнала от класа $\mathcal{C}_\varphi$ функция. С други думи, съществува многозначен оператор T, в случая $T \equiv \partial^{CR} f$, такъв че $T \in \Upsilon(f)$.

Твърдение 1.2.8 *Ако функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу и такава, че условието (1.4) е в сила за всички $x \in X$, $h \in S_X$ и $t \in I\!R$, то $f \in \mathcal{C}_\varphi$.*

Доказателство: Първо да отбележим, че за $x \in \mathrm{dom} f$ функцията $f'(x;\cdot) : X \to \overline{I\!R}$, която е добре дефинирана според Лема 1.2.6, е изпъкнала. Наистина за $u,\ v \in X,\ \alpha \in (0,1)$ от (1.3) следва, че

$$f'(x; \alpha u + (1-\alpha)v) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x + \alpha t u + (1-\alpha)tv) - f(x)}{t} =$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(\alpha(x + tu) + (1-\alpha)(x + tv)) - f(x)}{t} \leq$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\alpha f(x + tu) + (1-\alpha) f(x + tv) - f(x) + c\varphi(t(u - v))}{t} \leq$$

$$\alpha \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} + (1-\alpha)\lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} + c\lim_{t\downarrow 0} \frac{\varphi(t(u - v))}{t},$$

където $c = 2\alpha(1-\alpha)$. Като използваме, че $\varphi'(0) = 0$ получаваме, че

$$f'(x; \alpha u + (1-\alpha)v) \leq \alpha f'(x; u) + (1-\alpha) f'(x; v).$$

По–нататък, за всяка изпъкнала и непрекъсната функция $g : X \to I\!R$ дефинираме многозначен оператор $D : X \to 2^{X^*}$, който на всяко $x \in X$ съпоставя множеството

$$D(f+g)(x) = \{p \in X^*,\ \langle p, h\rangle \le f'(x;h) + g'(x;h), \quad \forall h \in X\}.$$

Твърдим, че D е абсубдиференциал за класа $f + Conv$, където $Conv = \{g : X \to I\!R : g$ изпъкнала и непрекъсната$\}$. За да установим този факт, нека разгледаме $g \in Conv$ и нека $f + g$ има локален минимум в точка x. Това означава, че $0 \in \partial^c(f'(x;\cdot) + g'(x;\cdot))(0)$. От добре известна формула от изпъкналия анализ $0 \in \partial^c f'(x;\cdot)(0) + \partial^c g'(x;\cdot)(0) = Df(x) + \partial^c g(x)$, което е условие 4) в дефиницията на абсубдиференциала. Останалите условия са повече или по–малко очевидни.

От частта c) на Лема 1.2.6 и условието (1.4), което означава, че $\boldsymbol{\delta}_h f$ е $\varphi(\cdot\, h)$–монотонен заключаваме, че Df е φ–монотонен. От Лема 1.2.4 $Df \subset \partial^\varphi f$. Тъй като очевидно $\partial^\varphi f \subset Df$ имаме, че

$$Df \equiv \partial^\varphi f.$$

За да завършим ще покажем, че $Df \equiv \partial^{CR} f$, откъдето ще имаме, че последният е φ–монотонен и $f \in \mathcal{C}_\varphi$ по дефиниция. Достатъчно е да докажем, че $f^\circ(x;v) \le f'(x;v)$ за всяко $x \in \mathrm{dom} f$ и всяко $v \in X$. Да припомним, че

$$f^\circ(x;v) = \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{\substack{y\to_f x\\ t\downarrow 0}} \inf_{w\in v+\varepsilon B} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t}.$$

Нека $M \in (-\infty, +\infty]$ и $M \ge f'(x;v)$. Да фиксираме произволно $\varepsilon_1 > 0$. Можем да намерим $t > 0$ толкова малко, че

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} < M + \varepsilon_1, \quad \frac{\varphi(tv)}{t} < \frac{\varepsilon_1}{2} \text{ (тъй като } \varphi'(0) = 0).$$

От непрекъснатостта на φ съществува $\delta > 0$ такова, че $\|v' - tv\| < \delta$ води до $t^{-1}\varphi(v') < \varepsilon_1$. За всяко $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ и всяко $y \in X$, което е по графика достатъчно близо до x, т.е. $\|x - y\| < \min\{t\varepsilon,\ \delta\}$ и $\mid f(y) - f(x) \mid < t\varepsilon$ (и следователно $y \in \mathrm{dom} f$), за всяко положително $s < t$ и $w \in v + \varepsilon B$, като следствие от (1.3) имаме, че

$$f(y+sw) \le \frac{s}{t} f(y+tw) + \frac{t-s}{t} f(y) + \frac{2s(t-s)}{t^2}\varphi(tw).$$

Следователно

$$\frac{f(y+sw) - f(y)}{s} \le \frac{f(y+tw) - f(y)}{t} + \frac{2(t-s)}{t^2}\varphi(tw).$$

Тъй като $\dfrac{1}{t}(x + tv - y) \in v + \varepsilon B$ и $t - s \le t$, то

$$\begin{aligned} \inf_{w\in v+\varepsilon B} \frac{f(y+sw) - f(y)}{s} &\le \inf_{w\in v+\varepsilon B} \Big\{ \frac{f(y+tw) - f(y)}{t} + \frac{2}{t}\varphi(tw) \Big\} \\ &\le \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} + \frac{2}{t}\varphi(tv + x - y) + \varepsilon, \end{aligned}$$

където използуваме, че $| \ f(x) - f(y) \ | < t\varepsilon$. Но $\|x - y\| < \delta$ и следователно $\dfrac{\varphi(tv + x - y)}{t} < \varepsilon_1$. Накрая

$$\inf_{w \in v + \varepsilon B} \frac{f(y + sw) - f(y)}{s} \leq \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} + 3\varepsilon_1 \leq M + 4\varepsilon_1,$$

ако $s < t$ и y е достатъчно близо по графика до x. От тук

$$\limsup_{\substack{y \to_f x \\ s \downarrow 0}} \inf_{w \in v + \varepsilon B} \frac{f(y + sw) - f(y)}{s} \leq M + 4\varepsilon_1$$

за достатъчно малко ε. Като направим граничен преход при ε, клонящо към нула получаваме, че $f^{\circ}(x; v) \leq M + 4\varepsilon_1$. Тъй като $M \geq f'(x; v)$ е произволно, така както и ε_1 получаваме, че

$$f^{\circ}(x; v) \leq f'(x; v).$$

■

Непосредствено от Твърдение 1.2.7 и Твърдение 1.2.8 получаваме следната

Теорема 1.2.9 *Ако съществува φ–монотонен оператор, който притежава свойството Υ за собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, то $f \in \mathcal{C}_\varphi$.*

Като използуваме доказаните резултати, ще покажем, че псевдо изпъкналите функции притежават редица свойства на изпъкналите функции.

Да припомним, че локално липшицова функция $f : X \to I\!R$ се нарича *регулярна*, ако за всеки x, $h \in X$ съществува производната ѝ по посока $f'(x; h) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x + th) - f(x)}{t}$ и тя е равна на обобщената ѝ производна по посока $f'(x; h) = f^0(x; h)$.

Теорема 1.2.10 *Нека $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция, а φ е както в Определение 1.2.2. Тогава*

a) *$f \in \mathcal{C}_\varphi$ тогава и само тогава, когато за всеки $x \in \mathrm{dom} f$ и $h \in S_X$ функцията $g_{x,h}(t) = f(x + th) \in \mathcal{C}_{\varphi_h}$, където $t \in I\!R$ и $\varphi_h(t) = \varphi(th)$;*

b) *Ако $f \in \mathcal{C}_\varphi$, то $\mathrm{dom} f$ е изпъкнало множество. Функцията f е локално липшицова и регулярна във (възможно празната) вътрешност на $\mathrm{dom} f$. Нещо повече, за всеки $x, y \in \mathrm{dom} f$ и $\lambda \in (0, 1)$ е изпълнено неравенството*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) + 2\lambda(1 - \lambda)\varphi(x - y). \tag{1.6}$$

Доказателство: Ако $g_{x,h} \in \mathcal{C}_{\varphi_h}$ за всяко $x \in \mathrm{dom} f$ и $h \in S_X$, то, тъй като $\boldsymbol{\delta} g_{x,h}(t) = \langle \boldsymbol{\delta}_h f(x + th), h \rangle$ и $\boldsymbol{\delta} g_{x,h} \subset \partial^{CR} g_{x,h}$, условието (1.4) е в сила за всички $x \in X$, $h \in S_X$ и $t \in I\!R$ и Твърдение 1.2.8 дава, че $f \in \mathcal{C}_\varphi$.

Ако $f \in \mathcal{C}_\varphi$, то за всички $x \in \mathrm{dom} f$ и $h \in S_X$ следва, че $\boldsymbol{\delta} g_{x,h}$ е φ_h–монотонен и следователно $g_{x,h} \in \mathcal{C}_{\varphi_h}$. Неравенството (1.6) следва от (1.3). Тогава е очевидно, че $\operatorname{dom} f$ е изпъкнало множество. Доказателството на локалната липшицовост на f във вътрешността на $\operatorname{dom} f$ минава през същите етапи, както в случая на изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция (вж. [61]).

Първо ще покажем, че f е локално ограничена в $U := \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. Ако f е ограничена отгоре (например от константа K) в $B(x,\delta) \subset U$, където $\delta > 0$ е такова, че $\varphi(x-y) < K$, когато $y \in B(x,\delta/2)$, то f е ограничена и отдолу в $B(x,\delta)$, тъй като, ако $y \in B(x,\delta)$, то $2x - y \in B(x,\delta)$ и като използваме неравенство (1.6) получаваме, че

$$f(x) \le \frac{1}{2}[f(y) + f(2x-y) + \varphi(2(x-y)) \le \frac{1}{2}f(y) + K,$$

т.е. $f(y) \ge 2f(x) - K$ за всяко $y \in B(x,\delta)$. Следователно, за да покажем, че f е локално ограничена в U е достатъчно да покажем, че е локално ограничена отгоре в U. За всяко $n \ge 1$ да дефинираме множествата $F_n := \{x \in U : f(x) \le n\}$. Тъй като функцията f е полунепрекъсната отдолу, множествата F_n са затворени. Имаме, че $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ и тъй като U е берово пространство, за някое n_0 имаме, че $\operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $0 \in \operatorname{int} F_{n_0} \subset U$, т.е. $B(0,\delta) \in F_{n_0}$ за някое положително δ. Ако $y \in U$, $y \neq 0$, то съществува $\mu > 1$, такова че $z = \mu y \in U$ и следователно като вземем $0 < \lambda = \mu^{-1} < 1$ получаваме, че множеството $V = \lambda z + (1-\lambda)B(0,\delta) = y + (1-\lambda)B(0,\delta)$ е околност на точката y и $y \in V \subset U$. За всяка точка $v = (1-\lambda)x + \lambda z \in V$, където $x \in B(0,\delta)$ имаме, че

$$f(v) \le (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x-z) \le (1-\lambda)n_0 + \lambda f(z) + \frac{1}{2}\varphi(x-z),$$

откъдето като вземем предвид, че непрекъснатата изпъкнала функция φ е ограничена в кълбото $B(z,\delta)$, получаваме търсената ограниченост отгоре на f във V.

Вече показахме, че за всяко $x_0 \in U$ съществуват $\delta > 0$ и $K > 0$, такива, че $|\ f\ | \le K$ в $B(x_0, 2\delta) \subset U$ и $\varphi \le K$ в $B(0,3\delta)$. Ако x, y са различни точки от кълбото $B(x_0,\delta)$, полагаме $\alpha = \|x-y\|$ и разглеждаме точката $z = y + \dfrac{\delta}{\alpha}(y-x) \in B(x_0,2\delta)$. Тъй като точката y може да се представи като $y = \dfrac{\alpha}{\alpha+\delta}z + \dfrac{\delta}{\alpha+\delta}x$, то тя е изпъкнала комбинация на точки от кълбото $B(x_0,2\delta)$ и следователно също е в това кълбо и

$$f(y) \le \frac{\alpha}{\alpha+\delta}f(z) + \frac{\delta}{\alpha+\delta}f(x) + 2\frac{\alpha\delta}{(\alpha+\delta)^2}\varphi(z-x)$$

$$f(y) - f(x) \le \frac{\alpha}{\alpha+\delta}(f(z) - f(x)) + 2\frac{\alpha\delta}{(\alpha+\delta)^2}\varphi(z-x)$$

$$f(y) - f(x) \le \alpha\frac{4K}{\delta} \le \frac{4K}{\delta}\|x-y\|,$$

откъдето следва локалната липшицовост на f.

Регулярността на разглежданата функция е част от доказателството на Твърдение 1.2.8, като се вземе предвид, че за локално липшицова функция $f : X \to I\!R$ е изпълнено, че $f^0(x;h) = f^\circ(x;h)$ за всеки $x,\ h \in X$. ■

Като се използува доказания по–горе резултат може лесно да се получи доказателство на характеризацията на изпъкналите полунепрекъснати отдолу функции, доказана от Кореа, Джофре и Тибо, която мотивира разглежданията в параграфа.

Следствие 1.2.11 ([25], Теорема 2.4) *Собствената полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е изпъкнала, тогава и само тогава, когато $\partial^{CR} f$ е монотонен.*

Доказателство: Както вече отбелязахме, лесно се проверява, че ∂^c е абсубдиференциал за класа от всички собствени полунепрекъснати отдолу изпъкнали функции. Следователно, ако f е такава функция, то $\partial^c f \in \Upsilon(f)$ и $\partial^c f$ е монотонен по дефиниция. От Следствие 1.2.5 (като отчетем, че $\partial^c \equiv \partial^\varphi$, където $\varphi \equiv 0$) имаме, че $\partial^c f \equiv \partial^{CR} f$, откъдето последният е монотонен.
Обратно, ако $\partial^{CR} f$ е монотонен, прилагаме Теорема 1.2.10 за функцията $\varphi \equiv 0$. ■

Ако $\partial^c f \in \Upsilon(f)$ за собствена полунепрекъсната отдолу функция f, то, тъй като $\partial^c f$ очевидно е φ–монотонен за $\varphi \equiv 0$, като следствие от Теорема 1.2.9 имаме, че $f \in \mathcal{C}_0$, или, което е еквивалентно, че f е изпъкнала функция. С други думи, ако изпъкналият субдиференциал на собствена полунепрекъсната отдолу функция притежава свойството Υ за нея, то тя е изпъкнала.

Да отбележим, че операторът $\partial^\varphi f$ е само 2φ–монотонен и от това, че $\partial^\varphi f$ притежава свойството Υ за функцията f (т.е. $\partial^\varphi f \in \Upsilon(f)$) можем да получим само това, че функцията f е псевдо изпъкнала от класа $\mathcal{C}_{2\varphi}$.

Ако разгледаме върху реалната права функцията $f(x) = -x^2$ и вземем $\varphi(x) = x^2$, то имаме, че $\partial^\varphi f$ съвпада с производната на функцията f и $f \notin \mathcal{C}_\varphi$. Следователно не може да се очаква, че функцията f е псевдо изпъкнала от класа $\mathcal{C}_\varphi$, ако многозначният оператор $\partial^\varphi f \in \Upsilon(f)$ за произволна функция φ, удовлетворяваща условията в Определение 1.2.2, която не е тъждествено равна на нула.

Добре известен факт е, че ако функциите $f_\gamma : X \to I\!R$, $\gamma \in \Gamma$, където Γ е произволно индексно множество, са изпъкнали, то и функцията $f : X \to I\!R$, дефинирана като $f(x) = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ също е изпъкнала функция. За функции от класа $\mathcal{C}_\varphi$ ще докажем аналогичното

Твърдение 1.2.12 *Ако $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ е фамилия от псевдо изпъкнали функции от класа $\mathcal{C}_\varphi$, то функцията $f(x) = \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(x)$ е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_{4\varphi}$.*

Доказателство: Ако $\mathrm{dom} f$ е празно или едноелементно множество твърдението е тривиално, затова предполагаме, че $x,\ y \in \mathrm{dom} f,\ x \neq y$ са произволни и разглеждаме тяхна изпъкнала комбинация за произволно $\lambda \in (0,1)$. Тогава за всяко положително ε съществува $\gamma_\varepsilon \in \Gamma$, такова че

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda x + (1-\lambda)y) & = & \sup\limits_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ & < & f_{\gamma_\varepsilon}(\lambda x + (1-\lambda)y) + \varepsilon \\ & < & \lambda f_{\gamma_\varepsilon}(x) + (1-\lambda) f_{\gamma_\varepsilon}(y) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x-y) + \varepsilon \\ & < & \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x-y) + \varepsilon, \end{array}$$

откъдето след граничен преход при ε, клонящо към нула получаваме, че

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) + 2\lambda(1-\lambda)\varphi(x-y). \tag{1.7}$$

Да забележим, че функцията f е полунепрекъсната отдолу като супремум на полунепрекъснати отдолу функции.

Нека вземем произволни елементи $p \in \partial^{CR} f(x),\ q \in \partial^{CR} f(y)$. Тогава по дефиниция

$$\langle p - q, x - y\rangle \ge -f^\circ(x; y-x) - f^\circ(y; x-y),$$

откъдето е ясно, че се нуждаем от оценка отгоре на $f^\circ(x;v)$, където $v = y - x$. За произволно положително ε да разгледаме множеството от тези z, за които $\|z - x\| < \varepsilon$ и $\mid f(z) - f(x) \mid < \varepsilon$. Нека $w \in v + \varepsilon B$. От неравенството (1.7) имаме, че за всяко $s \in (0,1)$ е изпълнено

$$f(z + sw) \le s f(z + tw) + (1-s) f(z) + 2s(1-s)\varphi(w).$$

Тъй като при направените за z и w предположения имаме, че $x - z + v \in v + \varepsilon B$, то

$$\frac{f(z+sw) - f(z)}{s} \le f(z+w) - f(z) + 2(1-s)\varphi(w)$$

и

$$\begin{array}{rcl} \inf\limits_{w\in v+\varepsilon B} \dfrac{f(z+sw) - f(z)}{s} & \le & \inf\limits_{w\in v+\varepsilon B} \big\{ f(z+w) - f(z) + 2\varphi(w) \big\} \\ & \le & f(x+v) - f(x) + 2\varphi(v + x - z) + \varepsilon \\ & = & f(y) - f(x) + 2\varphi(y - z) + \varepsilon, \end{array}$$

където използуваме, че $\mid f(x) - f(z) \mid < \varepsilon$ и от непрекъснатостта на φ непосредствено следва, че

$$f^\circ(x; y-x) \le f(y) - f(x) + 2\varphi(y-x).$$

Аналогично се показва, че

$$f^\circ(y; x-y) \le f(x) - f(y) + 2\varphi(y-x).$$

Като съберем двете неравенства имаме, че

$$f^\circ(x; y-x) + f^\circ(y; x-y) \le 4\varphi(y-x),$$

и като заместим в изходното неравенство получаваме, че

$$\langle p - q, x - y \rangle \geq -4\varphi(y - x),$$

което е еквивалентно на това, че $f \in \mathcal{C}_{4\varphi}$. ∎

За да изследваме въпроса за диференцируемостта на псевдо изпъкналите функции, ще дадем някои предварителни дефиниции. Многозначното изображение $F : X \to 2^{X^*}$ се нарича *w^*-cusco*, ако
1) за всяко $x \in X$ множеството $F(x)$ е w^*–компактно изпъкнало множество в X^*.
2) $F : (X, \|.\|) \to (X^*, w^*)$ е *полунепрекъснато отгоре изображение*, т.е. за всяко w^* отворено множество W в X^* множеството $\{x \in X : F(x) \subset W\}$ е отворено подмножество на X.

F се нарича *минимално w^*–cusco*, ако графиката му не съдържа като собствено множество графиката на друго w^*–cusco изображение (вж. [56]).

Функцията $f : X \to I\!R$ се нарича *строго диференцируема по Гато* в точката $x \in X$, ако за всяко $h \in X$

$$\lim_{\substack{x' \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x' + th) - f(x')}{t} = \langle Df(x), h \rangle.$$

Твърдение 1.2.13 *Ако банаховото пространство X има диференцируема по Гато норма, то всяка псевдо изпъкнала функция f от класа $\mathcal{C}_\varphi$ е строго диференцируема по Гато в гъсто и G_δ подмножество на* $\operatorname{int}\operatorname{dom} f$.

Доказателство: От Теорема 1.2.10 имаме, че функцията f е локално липшицова и регулярна в $U = \operatorname{int}\operatorname{dom} f$. От основния резултат на Мурс в [56], Теорема 2.5 там следва, че субдиференциалът на Кларк на локално липшицова и регулярна в отворено множество в X функция е минимално w^*–cusco многозначно изображение. Следователно $\partial f : U \to 2^{X^*}$ е минимално w^*–cusco многозначно изображение и за него можем да приложим известната теорема на Фелпс, Прайс и Намиока от [65], Теорема 2.8 там. Тя твърди, че образът на ∂f е еднозначен в гъсто и G_δ подмножество на U. Еднозначността на образа на ∂f е еквивалентна, според [21], Твърдение 2.2.4 на строгата диференцируемост по Гато на функцията f. ∎

1.3 Максимална φ–монотонност

Добре известна е теоремата на Рокафелар, която твърди, че изпъкналият субдиференциал на всяка изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция е максимално монотонен оператор. Естествен е въпросът дали аналогично свойство е в сила за псевдо изпъкналите функциите от класа $\mathcal{C}_\varphi$ и субдиференциалът им на Кларк–Рокафелар. В този параграф даваме положителен отговор като модифицираме в Лема 1.3.2 доказателството на Саймънс (вж. [61], Параграф 3) на теоремата на Рокафелар.

Определение 1.3.1 *φ–монотонният оператор $T : X \to 2^{X^*}$ се нарича максимално φ–монотонен, ако за всеки φ–монотонен оператор $S : X \to 2^{X^*}$, такъв че $T \subset S$, е изпълнено, че $T \equiv S$.*

Еквивалентно на горното е, че φ–монотонният оператор T е максимално φ–монотонен, когато е в сила следното: за всяка точка $(x, x^*) \notin \mathrm{Gr}T$ съществува точка $(z, z^*) \in \mathrm{Gr}T$, такава, че $\langle z - x, z^* - x^* \rangle < -\varphi(z - x)$.

Лема 1.3.2 *Ако функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е псевдо изпъкнала от класа $\mathcal{C}_\varphi$, $x \in X$ и $r < f(x)$ са такива, че $r > \inf_{y \in X}\{f(y) + \varphi(y - x)\}$, то можем да намерим $z \in X$ и $z^* \in \partial^{CR} f(z)$, такива че*

$$\langle z^*, x - z \rangle > \varphi(x - z).$$

Доказателство: Съществува $y_1 \in X$, такова че $r > f(y_1) + \varphi(y_1 - x)$. Можем да изберем $\lambda \in (0, 1)$ по такъв начин, че за изпъкналата функция $\psi(x) := \lambda\varphi(\lambda^{-1}x)$ да имаме, че $r > f(y_1) + \psi(y_1 - x)$. Тогава, ако положим

$$K = \sup_{y \in X,\ y \neq x} \frac{r - f(y) - \psi(y - x)}{\|y - x\|}$$

е ясно, че $0 < K$.

Следващата ни цел е да покажем, че $K < \infty$. Да разгледаме множеството $F := \{y \in X : f(y) + \psi(y - x) \le r\}$. Ясно е, че F е затворено непразно множество и $x \notin F$. Ако $y \notin F$, то $\dfrac{r - f(y) - \psi(y - x)}{\|y - x\|} \le 0$. Нека $y \in F$. Съществуват $z \in \mathrm{dom} f$, $p \in \partial^{CR} f(z) \equiv \partial^\varphi f(z)$, такива че

$$\begin{aligned} f(y) &\ge f(z) + \langle p, y - z \rangle - \varphi(y - z) \\ &\ge f(z) + \langle p, x - z \rangle - ||p||\, ||y - x|| - \varphi(y - z). \end{aligned}$$

Следователно

$$\frac{r - f(y) - \psi(y - x)}{\|y - x\|} \le \frac{r - f(z) - \langle p, x - z \rangle + \varphi(y - z) - \psi(y - x)}{dist(x, F)} + \|p\|$$

(да отбележим че, $dist(x, F) > 0$). От друга страна от изпъкналостта на функцията φ имаме, че

$$\begin{aligned} \varphi(y - z) &= \varphi(\lambda(\lambda^{-1}(y - x)) + (1 - \lambda)(1 - \lambda)^{-1}(x - z)) \\ &\le \lambda\varphi(\lambda^{-1}(y - x)) + (1 - \lambda)\varphi((1 - \lambda)^{-1}(x - z)) \\ &= \psi(y - x) + C, \end{aligned}$$

където сме положили $C := (1 - \lambda)\varphi((1 - \lambda)^{-1}(x - z))$. Следователно

$$\frac{r - f(y) - \psi(y - x)}{\|y - x\|} \le \frac{r - f(z) - \langle p, x - z \rangle + C}{dist(x, F)} + \|p\|,$$

от където се вижда, че дясната страна на неравенството не зависи от y и е една горна граница за K.

Нека сега $\varepsilon \in (0,1)$. Тогава $(1-\varepsilon)K < K$ и според дефиницията на K съществува $x_0 \in X$, такова че $x_0 \neq x$ и

$$\frac{r - f(x_0) - \psi(x_0 - x)}{\|x_0 - x\|} > (1-\varepsilon)K.$$

За $z \in X$ да дефинираме функцията $N(z) = K\|z - x\|$. От горното неравенство и от дефиницията на K следва, че

$$r \leq \inf\{N(y) + f(y) + \psi(y-x) : y \in X\},$$

а също така, че $(N+f+\psi(\cdot - x))(x_0) < r + \varepsilon N(x_0)$. Тогава от вариационния принцип на Екеланд следва, че съществува $z \in \mathrm{dom}(N+f+\psi(\cdot-x)) \equiv \mathrm{dom} f$, такова че $\|z - x_0\| < \|x - x_0\|$, z е точка на минимум за функцията $N+f+\psi(\cdot-x)+\varepsilon K||\cdot - z||$ и $\|z - x\| > 0$. Тъй като функциите N и $\psi(\cdot - x)$ са изпъкнали и непрекъснати и субдиференциалът на Кларк–Рокафелар на f е абсубдиференциал, имаме, че

$$0 \in \partial^{CR} f(z) + \partial^c N(z) + \partial^c \psi(z-x) + \varepsilon K \partial^c || \cdot ||(0),$$

така, че съществуват $y^* \in \partial^c N(z)$, $z^* \in \partial^{CR} f(z)$ и $p^* \in \partial^c \psi(z-x)$, такива че, ако положим $w^* = y^* + z^* + p^*$, то $||w^*|| \leq \varepsilon K$. Тъй като $y^* \in \partial^c N(z)$, имаме, че $\langle y^*, z - x\rangle \geq N(z) - N(x) = K\|z-x\|$. Същият трик, приложен за функцията ψ ($\psi(0) = 0$) дава, че

$$\begin{aligned} \langle z^*, x - z\rangle &= \langle y^*, z-x\rangle + \langle p^*, z - x\rangle + \langle w^*, x - z\rangle \\ &\geq K\|z-x\| - \|w^*\|.\|z-x\| + \psi(z-x) \\ &\geq (1-\varepsilon)K\|z-x\| + \psi(z-x) \\ &> \psi(z-x). \end{aligned}$$

Остава само да отбележим, че $\varphi(x) = \varphi(\lambda.(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda).0) \leq \psi(x)$. ■

Теорема 1.3.3 *Нека функцията $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е псевдо изпъкнала от класа $\mathcal{C}_\varphi$. Тогава $\partial^{CR} f \equiv \partial^\varphi f$ е максимално φ–монотонен оператор.*

Доказателство: Да предположим, че $x \in X$, $x^* \in X^*$ и $x^* \notin \partial^\varphi f(x)$ и да разгледаме функцията $g(u) = f(u) - \langle x^*, u\rangle$. Тогава функцията $g(\cdot) + \varphi(\cdot - x)$ не си достига минимума в точката x (в противен случай $x^* \in \partial^\varphi f(x)$), така че можем да намерим $r < g(x)$, такова че

$$r > \inf_{y \in X}\{g(y) + \varphi(y - x)\}.$$

Не е трудно да се забележи, че $\partial^{CR} g(y) \equiv \partial^{CR} f(y) - x^*$ за всяко $y \in X$ и в частност, че $g \in \mathcal{C}_\varphi$. Следователно можем да приложим Лема 1.3.2 за функцията g в точката x с разглежданото по–горе r. Намираме $z \in X$, $z_1^* \in \partial^{CR} g(z)$, такива че $\langle z_1^*, x - z\rangle > \varphi(x - z)$. Но $z_1^* = z^* - x^*$, където $z^* \in \partial^{CR} f(z)$. Тогава $\langle z^* - x^*, z - x\rangle < -\varphi(z - x)$, което, както отбелязахме в началото на параграфа е еквивалентно на това $\partial^\varphi f \equiv \partial^{CR} f$ да е максимално φ–монотонен оператор. ■

1.4 Интегруемост

В този параграф ще покажем, че техниките, развити в предишните параграфи могат да се приложат към въпроса за интегруемост на някои полунепрекъснати отдолу функции.

За начало да се спрем на определението на понятието интегруемост на функция, дефинирана в банахово пространство X.

Определение 1.4.1 ([15]) *Собствената полунепрекъсната отдолу функция $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ се нарича интегруема, ако за всяка собствена полунепрекъсната отдолу функция $g : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, такава че $\partial^{CR} g \subset \partial^{CR} f$, съществува константа $c \in I\!R$, такава че*

$$f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in X.$$

Основният резултат в този параграф е формулиран в следната

Теорема 1.4.2 *Нека X е банахово пространство и $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена полунепрекъсната отдолу функция. Ако съществува регулярна локално липшицова функция $g : X \to I\!R$, такава че $f + g \in \mathcal{C}_\varphi$, то f е интегруема.*

Преди да изложим доказателството ще изброим някои непосредствени следствия.

Ако разгледаме случая $g \equiv 0$ получаваме, че всяка псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_\varphi$ е интегруема. За $\varphi \equiv 0$, т.е. f изпъкнала функция, това е добре известен резултат на Рокафелар, публикуван в [67]. За $\varphi = ||\cdot||^2$ резултатът е получен от Поликен в [63] в случая на крайномерно пространство и от Тибо и Загродни в [73] в случая на хилбертово пространство.

Както вече показахме в Теорема 1.2.10 всяка псевдо изпъкнала функция g от класа $\mathcal{C}_\varphi$, такава че $\mathrm{dom} g \equiv X$ е локално липшицова и регулярна и следователно всяка функция от класа $\mathcal{C}_\varphi - \mathcal{C}^{\mathrm{cont}}_{\varphi_1}$, където $\mathcal{C}^{\mathrm{cont}}_{\varphi_1} = \{g \in \mathcal{C}_{\varphi_1} : \mathrm{dom} g \equiv X\}$, е интегруема. Случаят, когато $\varphi \equiv \varphi_1 \equiv 0$,т.е. f е разлика на изпъкнала полунепрекъсната отдолу функция и изпъкнала непрекъсната функция е доказан в [73] от Тибо и Загродни при допълнителното предположение пространството X да е слабо асплундово.

Доказателство на Теорема 1.4.2. Ще извлечем резултата от едномерния случай, т.е. когато $X \equiv I\!R$. За целта се нуждаем от следната

Лема 1.4.3 *Нека $f = v - g$, където функцията $g : I\!R \to I\!R$ е локално липшицова и регулярна и $v : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_\varphi$. Ако собствената полунепрекъсната отдолу функция $u : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е такава, че*

$$\boldsymbol{\delta} u \subset \partial^{CR} v + \partial^{CR}(-g), \tag{1.8}$$

то съществува константа $c \in I\!R$, такава че $f = u + c$.

Да допуснем, че Лема 1.4.3 вече е доказана и да предположим, че твърдението в Теорема 1.4.2 не е вярно. Тогава можем да намерим собствена полунепрекъснатата отдолу функция $u : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$, такава че $\partial^{CR} u \subset \partial^{CR} f$ и $f - u$ не е константа. Да фиксираме $x_0 \in \mathrm{Dom}\partial^{CR} u \subset \mathrm{Dom}\partial^{CR} f \subset \mathrm{dom} f$ и да положим $c = f(x_0) - u(x_0)$. Тогава от нашето предположение следва, че съществува $y_0 \neq x_0$, такова че $f(y_0) \neq u(y_0) + c$. Нека $h = ||y_0 - x_0||^{-1}(y_0 - x_0)$ и за $t \in I\!R$ да положим

$$f_0\,, u_0\,, g_0,\ v_0\,(t) = f, u,\ g,\ v(x_0 + th)$$

съответно, където $v = f + g$ е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_\varphi$. От Теорема 1.2.10 имаме, че v_0 е псевдо изпъкнала функция от класа $\mathcal{C}_{\varphi_h}$. Съществуват $t_0 \in I\!R$, $p \in \boldsymbol{\delta} u_0(t_0)$, такива че

$$p \notin \partial^{CR} v_0(t_0) + \partial^{CR}(-g_0)(t_0) \tag{1.9}$$

(в противен случай Лема 1.4.3, приложена за правата $x_0 + I\!Rh$ ще даде, че $f_0(||y_0 - x_0||) = u(||y_0 - x_0||) + c$, т.е. $f(y_0) = u(y_0) + c$).

Тъй като $\partial^{CR} u \in \Upsilon(u)$, съществуват $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}_u z = x_0 + t_0 y_0$ и $p_n \in \partial^{CR} u(x_n)$, такива че $\langle p_n, h\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ и $||p_n|| d_h^{x_0}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. За всяко $n \in I\!N$

$$\partial^{CR} u(x_n) \subset \partial^{CR} f(x_n) \subset \partial^{CR} v(x_n) + \partial^{CR}(-g)(x_n)$$

(второто включване следва от Теорема 2.9.8 в [21]). Следователно съществуват $q_n \in \partial^{CR} v(x_n)$ и $r_n \in \partial^{CR}(-g)(x_n)$, такива че $p_n = q_n + r_n$. Редицата $\{\langle r_n, h\rangle\}_{n=1}^\infty$ е ограничена (да припомним, че g е локално липшицова) и след като вземем, ако е необходимо подредица от $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ можем да предположим, че $\langle r_n, h\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r \in I\!R$. Тъй като $\langle r_n, h\rangle \le (-g)^\circ(x_n; h)$ и функцията $(-g)^\circ(\cdot; h) = (-g)^0(\cdot; h)$ (равенството следва от локалната липшицовост на g) е полунепрекъснатата отгоре, то $r \le (-g)^0(z; h)$. Но от Твърдение 2.1.1 в [21] имаме, че $(-g)^0(z; h) = g^0(z; -h)$. Тъй като g е регулярна функция, то $g^0(z; -h) = g'(z; -h)$. От друга страна

$$g'(z; -h) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{g(z - th) - g(z)}{t} =$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{-g(z + th - th) + g(z - th)}{t} \le (-g_0)^0(t_0; 1)$$

и

$$(-g_0)^0(t_0; 1) \le (-g)^0(z; h) = g^0(z; -h) = g'(z; -h),$$

откъдето получаваме, че $g'(z; -h) = (-g_0)^0(t_0; 1)$. Следователно $(-g)^0(z; h) = (-g_0)^0(t_0; 1)$, откъдето имаме, че

$$r \le (-g_0)^0(t_0; 1). \tag{1.10}$$

Като използваме, че $\partial^{CR} v \equiv \partial^\varphi v$, за $t > 0$ е изпълнено следното:

$$\begin{aligned} v(z + th) &\ge v(x_n) + \langle q_n, z + th - x_n\rangle - \varphi(z + th - x_n) \\ &\ge v(x_n) + \langle q_n, z + th - x_n'\rangle - ||q_n|| d_h^{x_0}(x_n) - \varphi(z + th - x_n), \end{aligned} \tag{1.11}$$

където $x'_n \in x_0 + I\!Rh$ е такова, че $||x_n - x'_n|| = d_h^{x_0}(x_n)$. Да забележим, че $||q_n||d_h^{x_0}(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, защото $\{||r_n||\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена редица. Освен това $\liminf\limits_{n\to\infty} v(x_n) \geq v(z)$, тъй като v е полунепрекъсната отдолу. Накрая $\varphi(z + th - x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(th)$ и за $n \in I\!N$ достатъчно голямо

$$\langle q_n, z + th - x'_n\rangle = ||z + th - x'_n||\langle q_n, h\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} qt,$$

където $q = p - r$. След като направим граничен преход в неравенството (1.11) и вземем предвид направените изводи, получаваме че

$$v_0(t_0 + t) \geq v_0(t_0) + qt - \varphi_h(t)$$

и $(v_0)^\circ(t_0; 1) \geq q$. След като отчетем и (1.10) имаме, че

$$p = q + r \leq (v_0)^\circ(t_0; 1) + (-g_0)^0(t_0; 1).$$

Като се замени h с $-h$ в направените по–горе разглеждания се получава, че

$$-p \leq (v_0)^\circ(t_0; -1) + (-g_0)^0(t_0; -1).$$

Това означава, че $p \in \partial^{CR}v_0(t_0) + \partial^{CR}(-g_0)(t_0)$, което е в противоречие с (1.9). ■

Доказателство на Лема 1.4.3. Нека $a = \inf \mathrm{dom} f$ и $b = \sup \mathrm{dom} f$. Тогава от (1.8) $\mathrm{Dom}\boldsymbol{\delta}u \subset \mathrm{Dom}\partial^{CR}f \subset [a, b]$ и $\mathrm{dom}u \subset [a, b]$, тъй като $\mathrm{Dom}\boldsymbol{\delta}u$ е гъсто в $\mathrm{dom}u$. Ако $a = b$, то $\mathrm{dom}f = \mathrm{dom}u = \{a\}$ (да припомним, че и двете функции са собствени) и изводът е тривиален.

Нека сега $a < b$. Тъй като $\mathrm{dom}f = \mathrm{dom}v$, от Лема 1.2.6 следва, че интервалът $(a, b) \subset \mathrm{dom}v$ и v е локално липшицова и регулярна в (a, b). Тогава дясната страна на (1.8) е локално ограничена и от направената след доказателството на Лема 1.1.2 забележка функцията u е локално липшицова върху (a, b).

Нека U е подмножество на (a, b) с пълна мярка, в точките на което функциите v и g са диференцируеми. От регулярността на тези функции имаме, че за всяко $x \in U$ е в сила, че $\partial^{CR}v(x) = v'(x)$ и $\partial^{CR}(-g)(x) = -g'(x)$. Също така, функциите $v^\circ(\cdot; 1)$ и $(-g)^\circ(\cdot; 1)$ са непрекъснати във всяка точка на U (вж. [21]).

От Лема 1.1.2 следва, че за всяко $x \in (a, b)$

$$u^\circ(x; 1) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{p : p \in \boldsymbol{\delta}u(y),\ |y - x| < \varepsilon\}.$$

Ако $x \in U$, то можем да оценим

$$\begin{aligned} u^\circ(x; 1) &\leq \limsup_{y\to x} \big(v^\circ(y; 1) + (-g)^\circ(y; 1)\big) \\ &= v'(x) - g'(x), \end{aligned}$$

като първо използуваме условието (1.8), а след това непрекъснатостта на обобщените производни. По аналогичен начин се доказва, че $u^\circ(x; -1) \leq -v'(x)+g'(x)$

и тогава за всяко $x \in U$ имаме, че $\partial^{CR} u(x) = v'(x) - g'(x)$. За да завършим, да отбележим, че $u'(x) = f'(x)$ почти навсякъде върху (a, b), което означава, че $f(x) - u(x) = c \in I\!R$ за всяко $x \in (a, b)$.

Доказателството ще е завършено, ако $(a, b) = I\!R$, така че да допуснем обратното, т.е. b и (или) a принадлежат на $I\!R$. Да предположим, че

$$u(b) < \liminf_{x \uparrow b} u(x).$$

Тогава, както лесно се проверява, $\boldsymbol{\delta} u(b) = I\!R$ и като използваме (1.8) и ограничеността на $\partial^{CR}(-g)(b)$ можем да намерим $p_n \in \partial^{CR} v(b)$, такова, че $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Но $p_n \in \partial^{\varphi} v(b)$, тъй като $v \in \mathcal{C}_{\varphi}$ и тогава $u(2^{-1}(a+b)) \geq u(b) - p_n r - \varphi(r) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, където $r = 2^{-1}(b - a)$. Това противоречие и полунепрекъснатостта отдолу на u дават, че $u(b) = \liminf_{x\uparrow b} u(x)$. По същия начин получаваме, че $f(b) = \liminf_{x\uparrow b} f(x)$. Накрая,

$$\begin{aligned} u(b) &= \liminf_{x\uparrow b} u(x) \\ &= \liminf_{x\uparrow b} (f(x) - c) \\ &= f(b) - c. \end{aligned}$$

По аналогичен начин се показва, че $f(a) = u(a) + c$ и доказателството е завършено. ■

Ще отбележим, че изложеното по–горе доказателство работи и при предположение, че функцията g е локално липшицова и за произволни $x \in X, h \in S_X$ изображението $\langle \partial^{CR} g(x + th), h\rangle$ е минимално полунепрекъснато отгоре с компактни образи от $I\!R$ в $2^{I\!R}$, като за дефинициите вж. [65] или [15].

Глава 2

Субдиференциално смятане от втори ред

В тази глава дефинираме втори субдиференциали за функции от класа $C^{1,1}(E)$, където E е банахово пространство, чието спрегнато E^* е сепарабелно и ги използваме за доказване на условия от втори ред за оптималност на решението на минимизационни задачи с ограничения и с данни от класа $C^{1,1}(E)$.

2.1 Субдиференциали от втори ред

Добре известен факт е, че в пространства с безкрайна размерност няма добър аналог на лебеговата мярка. Въпреки това е възможно по различни приемливи начини да се дефинират пренебрежими в някакъв смисъл или "нулеви" множества в реални сепарабелни банахови пространства, съответстващи на множествата с лебегова мярка нула в пространствата с крайна размерност, за да се продължи класическата теорема на Радемахер в такива пространства.

Нека с E означим реално сепарабелно банахово пространство. Борелево множество M в E се нарича *нулево по Хаар*, ако съществува борелева вероятностна мярка μ в E, такава че $\mu(M + x) = 0$ за всяко $x \in E$ (вж. [20]). Да отбележим, че множество $M \subset I\!R^n$ е нулево по Хаар, ако е с лебегова мярка нула и че, ако $M \subset E$ е нулево по Хаар, то $E \setminus M$ е гъсто в E (вж. [72]). Един основен резултат на Кристенсен, на който съществено се основават по–нататъшните ни разглеждания е следната

Теорема 2.1.1 ([19], Теорема 7.5) *Нека $F : E \to X$ е локално липшицово изображение от реално сепарабелно банахово пространство E в банахово пространство X със свойството на Радон–Никодим. Тогава съществува множество $M \subset E$, такова че множеството $E \setminus M$ е нулево по Хаар и изображението F е диференцируемо по Гато във всяко $x \in M$, т.е. за всяко $x \in M$ и всяко $h \in E$ съществува границата*

$$F'(x; h) = \lim_{t \to 0} \frac{F(x + th) - F(x)}{t}$$

и изображението $h \to F'(x; h)$ е непрекъснато линейно изображение от E в X.

Да напомним, че банаховото пространство X има *свойството на Радон–Никодим* (вж. [17]), ако всяка абсолютно непрекъсната функция от $[0,1]$ в X е диференцируема почти навсякъде и че изображението $F : E \to X$ се нарича *локално липшицово*, ако за всяко $x_0 \in E$ съществуват околност $U \ni x_0$ и константа K, такива че $\|F(x) - F(y)\| \le K\|x - y\|,\ \forall x, y \in U$.

Да се спрем по–подробно на дефинициите на различните видове диференцируемост на изображение. Нека $Y,\ Z$ са линейни нормирани пространства. Означаваме пространството от всички непрекъснати линейни оператори от Y в Z със символа $\mathcal{L}(Y,Z)$. За произволен елемент $\Lambda \in \mathcal{L}(Y,Z)$ означаваме *ядрото* му с $\operatorname{Ker}\Lambda = \{y \in Y : \Lambda y = 0\}$ и *образа* му с $\operatorname{Im}\Lambda = \{z \in Z : z = \Lambda y,\ y \in Y\}$. Да разгледаме изображение $F : Y \to Z$. Границата

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(y+th) - F(y)}{t},$$

ако съществува, се нарича *производна на F в точка y по посока h* и се означава с $F'(y;h)$.

Ако съществува линеен непрекъснат оператор $\Lambda \in \mathcal{L}(Y,Z)$, такъв че $F'(y;h) = \Lambda(h),\ \forall h \in Y$, операторът Λ се нарича *производна по Гато на изображението F в точката y*.

Ако в околност на точката y изображението F може да се представи във вида

$$F(y+h) = F(y) + \Lambda(h) + o(\|h\|),$$

където $\Lambda \in \mathcal{L}(Y,Z)$ и $\lim\limits_{\|h\| \to 0} o(\|h\|) = 0$, то изображението F се нарича *диференцируемо по Фреше в точката y*, или, което е еквивалентно, за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$, такова че за всяко h, такова че $\|h\| < \delta$ е в сила

$$\|F(y+h) - F(y) - \Lambda(h)\| \le \varepsilon \|h\|.$$

Оттук естествено следва усилването: изображението F се нарича *строго диференцируемо в точката y*, ако съществува $\Lambda \in \mathcal{L}(Y,Z)$, такова че за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$, такова че за всеки $y_1,\ y_2 \in B(y,\delta)$ е в сила

$$\|F(y_1) - F(y_2) - \Lambda(y_1 - y_2)\| \le \varepsilon \|y_1 - y_2\|.$$

Ако положим в горното неравенство $y_2 = y$ и $y_1 = y + h$, получаваме че всяка функция $f : Y \to Z$, която е строго диференцируема в точка $y \in Y$ е диференцируема и по Фреше и $\Lambda = f'(y)$.

Както отбелязахме в началото на изложението, в тази глава разглеждаме реално банахово пространство E, такова че неговото дуално E^* е сепарабелно (откъдето и пространството E е сепарабелно) и нека G е отворено подмножество на E.

Със символа $C^{1,1}(G)$ означаваме класа от всички функции $f : G \to I\!R$, които са диференцируеми по Гато в точките на G и първите им производни по Гато са локално липшицови изображения от G в E^* (тогава функцията f е строго диференцируема в G). Като вземем предвид, че всяко сепарабелно дуално пространство E^* има свойството на Радон–Никодим (вж. [17]) от Теорема 2.1.1 следва, че за всяка функция $f \in C^{1,1}(G)$, производната ѝ $f' : G \to E^*$ е диференцируемо по Гато изображение в точките на подмножество $G(f)$ на G, като $G \setminus G(f)$ е нулево по Хаар множество, т.е. $G(f)$ е гъсто в G. Наричаме функцията f *двукратно диференцируема по Гато в точките на* $G(f)$ и означаваме с $f''(x) \in \mathcal{L}(E, E^*)$ производната по Гато на изображението f' в точката $x \in G(f)$.

Ще означаваме с $\langle x^*, h\rangle$ стойността на линейния функционал $x^* \in E^*$ в елемент $h \in E$ и с $L[h_1, h_2]$ – стойността на билинейния функционал L, дефиниран върху $E \times E$ в двойката от елементи $h_1, h_2 \in E$.

Нека $\mathcal{L}(E \times E)$ означава банаховото пространство от билинейните непрекъснати функционали $L : E \times E \to I\!R$, разглеждано с нормата

$$\|L\| := \sup_{\substack{\|h_1\|=1 \\ \|h_2\|=1}} |\ L[h_1, h_2]\ |,$$

а $\mathcal{L}(E, E^*)$ е банаховото пространство от всички линейни непрекъснати изображения $\Lambda : E \to E^*$, разглеждано с нормата

$$\|\Lambda\| := \sup_{\|h\|=1} \|\Lambda(h)\|^*.$$

Добре известен факт е, че пространствата $\mathcal{L}(E \times E)$ и $\mathcal{L}(E, E^*)$ са изометрично изоморфни (вж. [1], Параграф 2.2.5). Изоморфизмът между тях се построява по следния начин: ако $\Lambda \in \mathcal{L}(E, E^*)$, то $\Lambda(h) \in E^*$, $\forall h \in E$ и равенството $L[h_1, h_2] = \langle\Lambda(h_1), h_2\rangle$ определя билинейно изображение L от пространството $E \times E$ в $I\!R$. Обратно, всяко такова изображение L определя чрез горното равенство линейно изображение Λ от E в E^*. Остава да забележим, че

$$\begin{aligned} \|L\| &= \sup_{\substack{\|h_1\|=1 \\ \|h_2\|=1}} L[h_1, h_2] = \sup_{\|h_1\|=1} \sup_{\|h_2\|=1} \langle\Lambda(h_1), h_2\rangle \\ &= \sup_{\|h_1\|=1} \|\Lambda(h_1)\|^* = \|\Lambda\|, \end{aligned}$$

откъдето получаваме, че изображението е изометричен изоморфизъм и при по–нататъшните ни разглеждания чрез него ще отъждествяваме пространствата $\mathcal{L}(E \times E)$ и $\mathcal{L}(E, E^*)$.

От тук до края на този параграф предполагаме, че всички разглеждани функции принадлежат на класа $C^{1,1}(G)$, ако изрично не е отбелязано друго.

Определение 2.1.2 *За всеки $x \in G$, h_1, h_2 $\in E$ и функция $f \in C^{1,1}(G)$ дефинираме следните граници*

$$f^{00}(x; h_1, h_2) := \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{\langle f'(y + th_1), h_2\rangle - \langle f'(y), h_2\rangle}{t},$$

която наричаме обобщена втора производна на f в точката x по направленията $[h_1, h_2]$ и

$$d^2 f(x; h_1, h_2) := \limsup_{G(f) \ni z \to x} f''(z)[h_1, h_2].$$

За да докажем тяхното равенство ще използуваме едно твърдение, доказано от Тибо.

Твърдение 2.1.3 ([72], Твърдение 2.2) *Нека $g : E \to I\!R$ е локално липшицова функция и $M \subset E$ е подмножество, такова че g е диференцируема по Гато в M и $E \setminus M$ е нулево по Хаар множество в E. Тогава*

$$g^0(\bar{x}; h) = \max\{\langle \xi, h\rangle : \xi \in L_M(g, \bar{x}),\ \forall h \in E\},$$

където

$$L_M(g, \bar{x}) = \{w^* - \lim g'(x_n),\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \bar{x},\ x_n \in M\}.$$

Твърдение 2.1.4 *За всеки $x \in G,\ h_1,\ h_2\ \in E$ е в сила тъждеството*

$$f^{00}(x; h_1, h_2) = d^2 f(x; h_1, h_2).$$

Доказателство: От Твърдение 2.1.3, приложено за функцията $g(x) = \langle f'(x), h_2\rangle$ имаме, че

$$\begin{aligned} f^{00}(x; h_1, h_2) &= \langle f'(.), h_2\rangle^0(x; h_1) = \limsup_{G(f)\ni z\to x} \langle f'(.), h_2\rangle'(z; h_1) \\ &= \limsup_{G(f)\ni z\to x} f''(z)[h_1, h_2]. \end{aligned}$$

■

Да отбележим, че в [36] в дефиницията на $d^2 f(x; h_1, h_2)$ и за доказването на горния резултат е използувано друго понятие за “нулево” множество, разглеждано от Йост в [77].

Основни свойства на обобщената втора производна са формулирани в следното

Твърдение 2.1.5 *Функцията $f^{00}(.; h_1, h_2)$ е полунепрекъсната отгоре за всеки $h_1, h_2 \in E$ и*

$$|\ f^{00}(x; h_1, h_2)\ | \le\ l_x \|h_1\|.\|h_2\|,$$

където с l_x е означена липшицовата константа на изображението $f' : E \to E^*$ в някоя околност на точката x.

Доказателство: Тъй като $f^{00}(x; h_1, h_2) = \langle f'(.), h_2\rangle^0(x; h_1)$, твърдението следва от свойствата на производната на Кларк (вж. [21], Твърдение 2.1.1). ■

Като вземем предвид доказаното в Твърдение 2.1.4 тъждество можем да твърдим, че $d^2 f(x; h_1, h_2)$ има същите свойства.

Известно е, че $\mathcal{L}(E, E^*)$ е спрегнато пространство (вж. [42], Глава 23B); w^*–топологията в $\mathcal{L}(E, E^*)$ се нарича w^*–операторна топология. Предуалното пространство на пространството $\mathcal{L}(E, E^*)$ е линейната обвивка V на всички функционали $l_{h_1,h_2} \in (\mathcal{L}(E, E^*))^*,\ h_1, h_2 \in E$ във формата $l_{h_1,h_2}(L) := L[h_1, h_2]$, разглеждана с нормата в $(\mathcal{L}(E, E^*))^*$. Тогава $\mathcal{L}(E, E^*)$, разглеждано с w^* топологията е сепарабелно пространство, тъй като E е сепарабелно и можем да направим следната

Забележка 2.1.6 *Всяко w^*–компактно подмножество в $\mathcal{L}(E \times E)$ е метризуемо (вж.* [42], Глава 12 F).

От направената по–горе бележка се вижда, че редицата $\{L_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(E \times E)$ е сходяща в w^*–топологията към елемента $L_0 \in \mathcal{L}(E \times E)$ тогава и само тогава, когато $L_n[h_1, h_2] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_0[h_1, h_2]$ за всеки $h_1,\ h_2\ \in E$.

Съществуват два естествени начина да се дефинират субдиференциали от втори ред за функцията $f \in C^{1,1}(G)$ в точка $x \in G$ (по аналогия със субдиференциала от първи ред на Кларк (вж. [21], стр.27 и [21], Теорема 2.5.1):

Определение 2.1.7

$$\partial_c^2 f(x) := \{\ L \in \mathcal{L}(E \times E)\ :\ L[h_1, h_2]\ \leq\ f^{00}(x; h_1, h_2),\quad \forall (h_1, h_2) \in E \times E\}.$$

Определение 2.1.8

$$\partial^2 f(x) := \overline{co}^*\{L \in \mathcal{L}(E \times E)\ :\ L = w^* - \lim_{G(f)\ni z\to x} f''(z)\ \}.$$

Аналог на Определение 2.1.8 е използуван от Тибо в [72] с цел разширяване на понятието за субдиференциал на Кларк за локално липшицови изображения, действуващи от сепарабелно банахово пространство в сепарабелно рефлексивно банахово пространство.

Твърдение 2.1.9 *За всяко $x \in E$ множествата $\partial^2 f(x)$ и $\partial_c^2 f(x)$ са непразни, изпъкнали и w^*–компактни. Многозначните изображения $\partial^2 f$ и $\partial_c^2 f$ са локално ограничени по норма в $\mathcal{L}(E \times E)$.*

Доказателство: Нека $x_n \in G(f)$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Тъй като за някое $\nu \in I\!N$ множеството $D := \{f''(x_n)\ \ :\ \ n > \nu\}$ е ограничено по норма в $\mathcal{L}(E \times E)$ от липшицовата константа на изображението $f' : E \to E^*$ в околност на точката x, можем да приложим Теоремата на Алаоглу–Бурбаки. Следователно границата на w^*–сходяща подредица от елементи на D принадлежи на $\partial^2 f(x)$. Тъй като, както ще покажем по–долу, $\partial^2 f(x) \subset \partial_c^2 f(x)$, то $\partial_c^2 f(x)$ също е непразно множество. Изпъкналостта и w^*–затвореността на $\partial^2 f$ и $\partial_c^2 f$ следват директно от определенията. Локалната ограниченост е следствие от факта, че $f' : E \to E^*$ е локално липшицово изображение.

Отново от Теоремата на Алаоглу–Бурбаки получаваме, че $\partial^2 f(x)$ и $\partial_c^2 f(x)$ са w^*–компактни. ∎

Лесно се вижда, че $\partial^2 f(x) \subset \partial_c^2 f(x)$, за всяко $x \in G$. Наистина, нека $L = w^* - \lim_{G(f)\ni z_n\to x} f''(z_n)$. Тъй като $f''(z_n)[h_1, h_2] \leq f^{00}(z_n; h_1, h_2)$ за всеки $h_1,\ h_2\ \in E$, от Твърдение 2.1.5 имаме, че

$$L[h_1, h_2] = \lim_{n\to\infty} f''(z_n)[h_1, h_2] \leq \limsup_{n\to\infty} f^{00}(z_n; h_1, h_2) \leq f^{00}(x; h_1, h_2).$$

Следователно $L \in \partial_c^2 f(x)$ и тъй като $\partial_c^2 f(x)$ е изпъкнало и w^*–затворено множество, получаваме, че $\partial^2 f(x) \subset \partial_c^2 f(x)$.

Да забележим, че

$$d^2 f(x; h_1, h_2) = \sup\{L[h_1, h_2] \ : \ L \in \partial^2 f(x)\}, \tag{2.1}$$

откъдето следва, че функцията $d^2 f(x; h_1, .)$ е опорна функция на множеството $\partial^2 f(x)(h_1) \subset E^*$.

В случая, когато $E \equiv I\!\!R^n$ Определение 2.1.8 е използувано от Ириа-Урути, Стродио и Нгуен в [40] ($\partial^2 f(x)$ е наречен там обобщена хесианова матрица). Авторите използуват теоремата на Радемахер, (вместо тази на Кристенсен), за да покажат, че тогава функцията f е двукратно диференцируема по Фреше почти навсякъде (в смисъл на лебеговата мярка). Следователно втората производна по Фреше $f''(z)$ (когато съществува) е симетрична матрица (вж.[1], Параграф 2.2.5), откъдето обобщената хесианова матрица се състои от симетрични матрици. В разглеждания тук безкрайномерен случай не е известно дали $\partial^2 f(x)$ се състои от симетрични билинейни функционали.

Всеки билинеен функционал $L \in \partial^2 f(x)$ по дефиниция трябва да удовлетворява неравенството $L[h_1, h_2] \le f^{00}(x; h_1, h_2)$ за произволни $h_1,\ h_2 \in E$, тъй като, както вече отбелязахме $\partial^2 f(x) \subset \partial_c^2 f(x)$. Обратно, да се запитаме кои са тези $L \in \mathcal{L}(E \times E)$, които удовлетворяват неравенството $L[h_1, h_2] \le f^{00}(x; h_1, h_2)$ за произволни $h_1,\ h_2 \in E$? Като се възползуваме от изоморфизма между $\mathcal{L}(E \times E)$ и $\mathcal{L}(E, E^*)$ и w^*–затвореността и изпъкналостта на множеството $\partial^2 f(x)(h_1)$ в E^* този въпрос може да се преформулира така: кои са тези $L \in \mathcal{L}(E \times E)$, такива че $L(h_1) \in \partial^2 f(x)(h_1)$ за всяко $h_1 \in E$?

За да дадем отговор на въпроса се нуждаем от едно понятие, чиято дефиниция е следната: подмножество $A \subset \mathcal{L}(E \times E)$ се нарича *пленарно*, тогава и само тогава, когато включва всички $L \in \mathcal{L}(E \times E)$, удовлетворяващи $L(h) \in A(h)$ за всяко $h \in E$. *Пленарната обвивка* на множество A е най–малкото пленарно множество, съдържащо A (вж. [41]). Следователно $\partial_c^2 f(x)$ представлява пленарната обвивка на множеството $\partial^2 f(x)$ и е възможно да е по–голямо от него множество. Трудно е да се намери пример за функция $f \in C^{1,1}(E)$, за която $\partial_c^2 f(x)$ да е съществено по–голям от $\partial^2 f(x)$. По–долу ще покажем, че те съвпадат, когато $\partial^2 f(x)$ е едноелементно множество (вж. Следствие 2.1.13).

Определение 2.1.10 *Функцията $f : G \to I\!\!R$ се нарича двукратно строго диференцируема по Гато в точката $x \in G$, ако съществува $f''(x) \in \mathcal{L}(E \times E)$, такъв, че:*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{\langle f'(y + th_1), h_2 \rangle - \langle f'(y), h_2 \rangle}{t} = f''(x)[h_1, h_2], \quad \forall h_1,\ h_2 \in E.$$

Следните три твърдения са аналогични на тези, касаещи случая на диференцируемост от първи ред (вж. [21]).

Твърдение 2.1.11 *Ако $f \in C^{1,1}(G)$ е двукратно строго диференцируема по Гато в $x \in G$, то $\partial_c^2 f(x) = \{f''(x)\}$.*

Доказателство: От определението, $f^{00}(x;h_1,h_2) = f''(x)[h_1,h_2]$ и тогава $L[h_1,h_2] \le f''(x)[h_1,h_2]$ за всеки $h_1,\ h_2 \in E$ и $L \in \partial_c^2 f(x)$. Следователно $L[h_1,h_2] = f''(x)[h_1,h_2]$ и оттук $L = f''(x)$. ■

Твърдение 2.1.12 *Ако $f \in C^{1,1}(G)$, то $\partial^2 f(x)$ е едноелементно множество, тогава и само тогава, когато f е двукратно строго диференцируема по Гато в $x \in G$.*

Доказателство: Идеята за доказателството е заимствана от Кларк, [21].

Нека $\partial^2 f(x) = \{L\}$. Тогава $L = w^* - \lim\limits_{G(f)\ni z\to x} f''(z)$ и от Твърдение 2.1.4 и (2.1)

$$f^{00}(x;h_1,h_2) = \limsup_{G(f)\ni z\to x} f''(z)[h_1,h_2] = L[h_1,h_2], \quad \forall h_1,\ h_2 \in E.$$

Можем да запишем, че:

$$\liminf_{\substack{x'\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\langle f'(x'+th_1) - f'(x'), h_2\rangle}{t} = -\limsup_{\substack{x'\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\langle f'(x') - f'(x'+th_1), h_2\rangle}{t} =$$

$$= -\limsup_{\substack{x'\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\langle f'(x'+th_1-th_1) - f'(x'+th_1), h_2\rangle}{t} = -f^{00}(x;-h_1,h_2) =$$

$$= -L[-h_1,h_2] = L[h_1,h_2] = f^{00}(x;h_1,h_2),$$

следователно f е двукратно строго диференцируема по Гато в $x \in G$.

В другата посока твърдението следва от включването $\partial_c^2 f(x) \supset \partial^2 f(x)$ и от Твърдение 2.1.11. ■

От Твърдения 2.1.11 и 2.1.12 получаваме веднага следното

Следствие 2.1.13 *Нека $f : G \to I\!R$ е $C^{1,1}(G)$ функция. Тогава $\partial_c^2 f(x)$ е едноелементно множество за $x \in G$, тогава и само тогава, когато $\partial^2 f(x)$ е едноелементно множество.*

Аргументите, използвани за доказване на следващото твърдение са класически (подобни на тези, използвани в случая на субдиференциали от първи ред) и затова доказателството е пропуснато.

Твърдение 2.1.14 *Многозначните изображения $\partial_c^2 f$ и $\partial^2 f : (G, \|.\|) \longrightarrow (\mathcal{L}(E\times E), w^*)$ са полунепрекъснати отгоре.*

Ще покажем, че функциите от класа $C^{1,1}(G)$ притежават развитие до първи ред, в което остатъчният член има форма, подобна на формата на Лагранж. За целта да разгледаме афинна функция $\psi : I\!R \to G$ и функция $\phi : G \to I\!R$ от класа $C^{1,1}(G)$. Ясно е, че $\phi\circ\psi \in C^{1,1}(I\!R)$.

Като използваме вида на обобщената втора производна на съставна функция ще докажем, че

Твърдение 2.1.15 *За всеки* $x_0,\ u,\ v\ \in I\!R$

$$(\phi \circ \psi)^{00}(x_0; u, v) \leq \phi^{00}(\psi(x_0); \psi'(x_0)u, \psi'(x_0)v).$$

Доказателство: Като използуваме, че $(\phi \circ \psi)'(x_0)v = \langle \phi'(\psi(x_0)), \psi'(x_0)v \rangle$, можем да запишем

$$(\phi \circ \psi)^{00}(x_0; u, v) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{(\phi \circ \psi)'(x + tu)v - (\phi \circ \psi)'(x)v}{t} =$$

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{\langle \phi'(\psi(x + tu)), \psi'(x)v \rangle - \langle \phi'(\psi(x)), \psi'(x)v \rangle}{t} =$$

$$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ t \downarrow 0}} \frac{\langle \phi'(\psi(x) + t\psi'(x)u) - \phi'(\psi(x)), \psi'(x)v \rangle}{t} \leq$$

$$\phi^{00}(\psi(x_0); \psi'(x_0)u, \psi'(x_0)v).$$

■

От Твърдение 2.1.4 и Твърдение 2.1.15 имаме, че $d^2(\phi \circ \psi)(x_0; u, v) \leq d^2\phi(\psi(x_0); \psi'(x_0)u, \psi'(x_0)v)$. Тъй като $d^2 f(x_0; h_1, .)$ като отчетем (2.1) е опорната функция на множеството $\partial^2 f(x_0)(h_1)$, можем да извлечем, че

$$\partial^2(\phi \circ \psi)(x_0) \subset \{L[\psi'(x_0), \psi'(x_0)] \ :\ L \in \partial^2\phi(\psi(x_0))\}. \tag{2.2}$$

Следващото твърдение е представено в [40].

Твърдение 2.1.16 *Нека* $I \subset I\!R$ *е отворен интервал, съдържащ* $[0, 1]$ *и нека* $\phi \in C^{1,1}(I)$. *Тогава*

$$\phi(1) - \phi(0) - \phi'(0) \ \in\ \frac{1}{2}\partial^2\phi(t)$$

за някое $t \in (0, 1)$.

Като използваме (2.2) и Твърдение 2.1.16 за $\phi(x){=}f(x)$ и $\psi(t){=}a + t(b{-}a)$ непосредствено получаваме развитие на функцията f (аналогично на това в [40], Теорема 2.3 за крайномерния случай), което съществено ще използуваме в направените по–долу разглеждания.

Твърдение 2.1.17 *Нека* $f \in C^{1,1}(G)$. *Тогава за произволни* $a,\ b \in G$, *такива че отсечката* $[a, b] \subset G$ *съществуват* $c \in (a, b)$ *и* $L_c \in \partial^2 f(c)$, *такива че*

$$f(b) = f(a) + \langle f'(a), b - a \rangle + \frac{1}{2}L_c[b - a, b - a].$$

За да завършим, ще дадем една характеризация на изпъкналите функции от класа $C^{1,1}(G)$ в термините на $\partial^2 f$.

Твърдение 2.1.18 *Функцията $f \in C^{1,1}(G)$, където $G \subset E$ е отворено и изпъкнало множество, е изпъкнала в G тогава и само тогава, когато за всяко $x \in G$ и всяко $L \in \partial^2 f(x)$ е изпълнено, че*

$$L[h,h] \geq 0, \quad \forall h \in E.$$

Доказателство: Нека $f : G \to I\!R$ е изпъкнала функция. Тогава, ако f е двукратно диференцируема по Гато в точка $z \in G$, то имаме, че

$$f''(z)[h,h] = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\langle f'(z+th) - f'(z), h\rangle}{t} \geq 0, \quad \forall h \in E,$$

откъдето, като вземем произволна w^* граница на такива елементи, имаме, че тя удовлетворява неравенството.

Обратно, нека за всяко $x \in G$ имаме, че за всяко $L \in \partial^2 f(x)$ е в сила неравенството $L[h,h] \geq 0, \forall h \in E$. Като използуваме развитието до втори ред на функцията, получено в Твърдение 2.1.17 и изпъкналостта на множеството G, имаме че за произволни $x,\ y \in G$

$$f(y) = f(x) + \langle f'(x), y-x\rangle + \frac{1}{2}L[y-x, y-x],$$

за някое $L \in \partial^2 f(w),\ w \in [x,y]$ и следователно

$$f(y) \geq f(x) + \langle f'(x), y-x\rangle, \quad \forall x,\ y \in G,$$

откъдето лесно следва, че f е изпъкнала в множеството G функция. ■

2.2 Условия от втори ред за оптималност

В този параграф разглеждаме следната минимизационна задача с ограничения:

$$P(E) \quad \left| \begin{array}{l} f_0(x) \to \min \\ x \in E \\ f_i(x) \leq 0\ ,\ 1 \leq i \leq m \\ F(x) = 0, \end{array} \right.$$

където $F(x) = (g_1(x), \ldots, g_k(x))^T$ и функциите $f_0,\ f_i\ ,\ 1 \leq i \leq m,\ \ g_j,\ 1 \leq j \leq k$ са от класа $C^{1,1}(E)$.

Ще докажем условия за оптималност на решението на задачата $P(E)$.

Функцията $f_0 : E \to I\!R$ се нарича *целева функция*, множеството от ограничения $x \in E,\ f_i(x) \leq 0\ ,\ 1 \leq i \leq m,\ F(x) = 0$ се нарича *допустимо множество*, а неговите елементи – *допустими точки* (*вектори*).

За по–нататъшните разглеждания се нуждаем от следните определения и твърдения.

Определение 2.2.1 ([1], Параграф 2.3.5) *Елемент h на банаховото пространство X се нарича допирателен вектор към множеството $M \subset X$ в точката $x_0 \in M$, ако съществуват $\varepsilon > 0$ и изображение $r : [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$, такива, че*
a) $x_0 + \alpha h + r(\alpha) \in M$,
b) $r(\alpha) = o(\alpha)$ *при* $\alpha \to 0$.

Множеството от всички допирателни вектори към M в точката x_0 се означава с $T_{x_0}M$.

Теорема 2.2.2 (Люстерник, [1], Параграф 2.3.5) *Нека X_1, X_2 са банахови пространства, U е околност на точката x_0 в X_1 и изображението $F : U \to X_2$ е такова, че $F(x_0) = 0$.*

Ако F е строго диференцируемо в точката x_0 и производната му $F'(x_0) \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ е такава че $\operatorname{Im} F'(x) \equiv X_2$, то допирателното пространство на множеството $M = \{x \ : \ F(x) = 0\}$ в точката x_0 е

$$T_{x_0}M \equiv \operatorname{Ker} F'(x_0).$$

Лема 2.2.3 (Хофман, [1], Параграф 3.3.4) *Нека X_1, X_2 са банахови пространства, $\Lambda \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ е такъв че $\Lambda X_1 \equiv X_2$, $x_1^*, \ldots, x_s^*$ са елементи на спрегнатото пространство X_1^* и нека*

$$K = \{x \ : \ \langle x_i^*, x\rangle \le 0, \ 1 \le i \le s; \ \Lambda x = 0\}$$

е конус в X_1. Тогава за функцията разстояние от точката x до конуса K е в сила неравенството

$$d(x, K) \le c\Big\{ \sum_{i=1}^{s} \langle x_i^*, x\rangle_+ + \|\Lambda x\| \Big\},$$

където

$$\langle x_i^*, x\rangle_+ = \begin{cases} \langle x_i^*, x\rangle, & \langle x_i^*, x\rangle \ge 0, \\ 0, & \textit{в противен случай}, \end{cases}$$

а константата c не зависи от x.

Да забележим, че ако конусът K се задава само с равенства, т.е.

$$K = \{x \ : \ \langle x_i^*, x\rangle = 0, \ 1 \le i \le s; \ \Lambda x = 0\},$$

(т.е. е подпространство), като приложим за него Лемата на Хофман получаваме, че

$$d(x, K) \le c\Big\{ \sum_{i=1}^{s} \mid \langle x_i^*, x\rangle \mid + \|\Lambda x\| \Big\}.$$

Следващата теорема е обобщение на класическата теорема за неявната функция

Теорема 2.2.4 ([1], Параграф 2.3.1) *Нека X_1, X_2, и X_3 са банахови пространства, W е околност на точката $(x_0, y_0) \in X_1 \times X_2$, а Φ е изображение от W в X_3, такова че $\Phi(x_0, y_0) = z_0$. Нека са в сила следните три условия:*
1) *изображението $x \to \Phi(x, y_0)$ е непрекъснато в точката x_0;*
2) *съществува линеен непрекъснат оператор $\Lambda : X_2 \to X_3$, такъв че за всяко $\varepsilon > 0$ и околност U на точката x_0, такава че от условието $x \in U$ и неравенствата $\|y' - y_0\| < \delta$, $\|y'' - y_0\| < \delta$ следва неравенството*

$$\|\Phi(x, y') - \Phi(x, y'') - \Lambda(y' - y'')\| < \varepsilon\|y' - y''\|;$$

3) $\Lambda X_2 \equiv X_3$.
Тогава може да се намери число $q > 0$, околност V на точката $(x_0, z_0) \in X_1 \times X_3$ и изображение $\varphi : V \to X_2$, такива че
a) $\Phi(x, \varphi(x, z)) = z$;
b) $\|\varphi(x, z) - y_0\| \leq q\|\Phi(x, y_0) - z\|$.

Да означим с $\operatorname{locmin} P(E)$ множеството от всички точки на локален минимум за задачата $P(E)$ и да дефинираме множеството

$$\Lambda(x) = \{(\lambda, \mu) \in \ R^{m+1} \times I\!R^k \ : \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i'(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j g_j'(x) = 0;$$

$$\lambda_i f_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad \lambda_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq m, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\}.$$

Твърдение 2.2.5 ([1], Параграф 3.4.2) *Ако точката $x_0 \in \operatorname{locmin} P(E)$ и $\operatorname{Im}\ F'(x) \equiv I\!R^k$, то $\Lambda(x_0)$ е непразно изпъкнало компактно множество.*

Ако $A : X_1 \to X_2$ е линеен непрекъснат оператор между банахови пространства, със $A^* : X_2^* \to X_1^*$ означаваме спрегнатия на A оператор, т.е. операторът за който е в сила, че $\langle A^* y^*, x\rangle = \langle y^*, Ax\rangle$ за произволни $x \in X_1$ и $y^* \in X_2^*$.

Лема 2.2.6 ([1], Параграф 3.3.4) *Нека $A : E \to I\!R^k$ е линеен непрекъснат проективен оператор (т.е. $AE \equiv I\!R^k$), $x_i^* \in E^*$, $0 \leq i \leq m$, $y \in I\!R^k$, $a \in \ I\!R^{m+1}$,*

$$\max_{0 \leq i \leq m} \langle x_i^*, x\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \operatorname{Ker}\ A. \tag{2.3}$$

Да означим

$$S(a, y) = \inf_{Ax+y=0} \quad \max_{0 \leq i \leq m} (a_i + \langle x_i^*, x\rangle). \tag{2.4}$$

Тогава

$$\text{a)} \quad S(a, y) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda} (\sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j), \tag{2.5}$$

където

$$\Lambda = \{(\lambda, \mu) \in I\!R^{m+1} \times I\!R^k \ : \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x_i^* + A^*\mu = 0\}.$$

b) $\inf$ *в* (2.4) *и* $\sup$ *в* (2.5) *се достигат.*

Нека $x_0 \in \operatorname{locmin} P(E)$. Без ограничение на общността можем да предполагаме по–нататък, че $f_i(x_0) = 0, \quad 0 \le i \le m$ (вж. [1], Параграф 3.2.3).

Да разгледаме задачата

$$P'(E) \qquad\qquad f(x) := \max\{f_0(x), \dots, f_m(x)\} \to \min; \quad F(x) = 0.$$

Лесно се проверява, че

Лема 2.2.7 ([1], Параграф 3.4.2) *Ако* $x_0 \in \operatorname{locmin} P(E)$, *то* $x_0 \in \operatorname{locmin} P'(E)$.

Лема 2.2.8 ([1], Параграф 3.2.4.) *Ако* $x_0 \in \operatorname{locmin} P'(E)$, *то*

$$\max_{0 \le i \le m} \langle f_i'(x_0), x \rangle \ge 0, \quad \forall x \in \operatorname{Ker}\, F'(x_0).$$

В следващата теорема формулираме необходимо условие за решението на задачата $P(E)$. В доказателството са използувани някои от идеите, залегнали в доказателството на Теорема 9.1.2 в [2] (вж. също [1], Теорема 3.4.2), където функциите се предполагат двукратно непрекъснато диференцируеми. Тук за данните на задачата предположението е по–слабо, а именно те да са функции от класа $C^{1,1}(E)$.

За задачата $P(E)$ дефинираме конуса

$$K(x) = \{h \in E \ : \ \langle f_i'(x), h \rangle \le 0, \ \ 0 \le i \le m; \ \ \langle g_j'(x), h \rangle = 0, \ \ 1 \le j \le k\}.$$

Теорема 2.2.9 (Необходимо условие) *Нека в задачата* $P(E)$ *имаме, че* $\operatorname{Im} F'(x_0) \equiv I\!R^k$. *Ако* $x_0 \in \operatorname{locmin} P(E)$, *то за всяко* $h \in K(x_0)$ *съществуват* $L_i \in \partial^2 f_i(x_0), \ \ 0 \le i \le m, \ \ M_j \in \partial^2 g_j(x_0), \ \ 1 \le j \le k$, *такива че*

$$\max_{(\lambda,\mu) \in \Lambda(x_0)} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i[h,h] + \sum_{j=1}^{k} \mu_j M_j[h,h]\right) \ \ge \ 0.$$

Доказателство: От Твърдение 2.2.5 имаме, че множеството $\Lambda(x_0)$ е непразно.

Нека допуснем противното на формулираното твърдение, т.е. че съществува $h \in K(x_0)$, такова че за всеки набор от $L_i \in \partial^2 f_i(x_0)$, $0 \le i \le m$ и всеки набор от $M_j \in \partial^2 g_j(x_0), \ \ 1 \le j \le k$ е изпълнено, че

$$\max_{(\lambda,\mu) \in \Lambda(x_0)} \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i[h,h] + \sum_{j=1}^{k} \mu_j M_j[h,h]\right) \ < \ 0. \tag{2.6}$$

Ясно е, че $\|h\| \ne 0$. Нека $0 < t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Като използуваме развитието, получено в Твърдение 2.1.17 имаме, че

$$\begin{aligned} g_j(x_0 + t_n h) &= g_j(x_0) + t_n \langle g_j'(x_0), h \rangle + \frac{t_n^2}{2} M_{j,n}[h,h] \\ &= \frac{t_n^2}{2} M_{j,n}[h,h], \end{aligned}$$

където $M_{j,n} \in \partial^2 g_j(x_0 + \gamma_{j,n} t_n h)$ и $\gamma_{j,n} \in (0,1)$.

Тъй като $x_0 + \gamma_{j,n} t_n h \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ и $\partial^2 g_j$ са локално ограничени и имат w^*–затворени графики, то за всяко $j : 1 \le j \le k$ можем да изберем w^*–сходяща подредица от $\{M_{j,n}\}_{n\ge 1}$ (която, за да не усложняваме означенията ще бележим със същите индекси), чиято w^*–граница M_j е в $\partial^2 g_j(x_0)$.

Аналогично, като имаме предвид, че $f_i(x_0) = 0$ (вж. забележката преди Лема 2.2.7)

$$\begin{aligned} f_i(x_0 + t_n h) &= f_i(x_0) + t_n \langle f_i'(x_0), h\rangle + \frac{t_n^2}{2} L_{i,n}[h,h] \\ &= t_n \langle f_i'(x_0), h\rangle + \frac{t_n^2}{2} L_{i,n}[h,h], \end{aligned}$$

където $L_{i,n} \in \partial^2 f_i(x_0 + \eta_{i,n} t_n h)$, $\eta_{i,n} \in (0,1)$ и за всяко $i : 1 \le i \le m$ избираме w^*–сходяща подредица от $\{L_{i,n}\}_{n\ge 1}$ (която, отново за да не усложняваме означенията означаваме по същия начин), чиято w^*–граница L_i е в $\partial^2 f_i(x_0)$.

За произволно $\varepsilon > 0$ съществува естествено число N_1, такова че за всяко $n \ge N_1$ са изпълнени следните неравенства:

$$| M_{j,n}[h,h] - M_j[h,h] | < 2\varepsilon,$$

$$| L_{i,n}[h,h] - L_i[h,h] | < 2\varepsilon.$$

Следователно за $n \ge N_1$ имаме:

$$g_j(x_0 + t_n h) = \frac{t_n^2}{2} M_j[h,h] + \phi_{j,n}(\varepsilon), \tag{2.7}$$

където

$$| \phi_{j,n}(\varepsilon) | < t_n^2 \varepsilon \quad \text{за} \quad 1 \le j \le k \tag{2.8}$$

и

$$f_i(x_0 + t_n h) = t_n \langle f_i'(x_0), h\rangle + \frac{t_n^2}{2} L_i[h,h] + \psi_{i,n}(\varepsilon), \tag{2.9}$$

където

$$| \psi_{i,n}(\varepsilon) | < t_n^2 \varepsilon \quad \text{за} \quad 0 \le i \le m. \tag{2.10}$$

Да означим $x_i^* = f_i'(x_0)$, $a_i = \frac{1}{2} L_i[h,h]$, $0 \le i \le m$; $y_j = \frac{1}{2} M_j[h,h]$, $1 \le j \le k$; $y = (y_1, \ldots, y_k)$; $A = F'(x_0)$. От Лема 2.2.8 имаме, че условието (2.3) на Лема 2.2.6 е изпълнено. Като приложим Лема 2.2.6 можем да намерим $\xi{=}\xi(h) \in E$, такова че

$$F'(x_0)\xi + y = 0 \tag{2.11}$$

и

$$\max_{0\le i\le m} (a_i + \langle f_i'(x_0), \xi\rangle) = \max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)} (\sum_{i=0}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j) =: \Psi(h) \tag{2.12}$$

където $\Psi(h) < 0$ от (2.6).

Нека означим с l най–голямата липшицова константа от тези на g_j' и f_i' в околност U_1 на x_0. Съществуват околност $U_2 \subset U_1$ на x_0 и константа s, такива че g_j' и f_i' са ограничени по норма от s в U_2.

Като използуваме класическата теорема за средните стойности, (2.7) и (2.11), за достатъчно големи n имаме:

$$\begin{aligned}
g_j(x_0+t_nh+t_n^2\xi) &= g_j(x_0+t_nh+t_n^2\xi) - g_j(x_0+t_nh) + g_j(x_0+t_nh)\\
&= t_n^2\langle g_j'(x_0+t_nh+\kappa_{j,n}t_n^2\xi),\xi\rangle + \frac{t_n^2}{2}M_j[h,h] + \phi_{j,n}(\varepsilon)\\
&= t_n^2\langle g_j'(x_0+t_nh+\kappa_{j,n}t_n^2\xi),\xi\rangle - t_n^2\langle g_j'(x_0),\xi\rangle + \phi_{j,n}(\varepsilon)\\
&\le t_n^2 l\|t_nh+\kappa_{j,n}t_n^2\xi\|\|\xi\| + \phi_{j,n}(\varepsilon)\\
&\le t_n^3 l(\|h\|+t_n\|\xi\|)\|\xi\| + \mid \phi_{j,n}(\varepsilon) \mid =: \theta_{j,n}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

където $\kappa_{j,n} \in (0,1)$.

Като използуваме (2.8) получаваме, че

$$\theta_{j,n}(\varepsilon) \le o(t_n^2) + t_n^2\varepsilon, \quad \forall j = 1,\dots,k, \tag{2.13}$$

където $\dfrac{o(t_n^2)}{t_n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Сега прилагаме обобщението на теоремата за неявната функция – Теорема 2.2.4 и получаваме, че съществуват константа q и изображение $\varphi : U \to E$, където $U \subset U_2$ е околност на точката x_0, такава че:

$$F(x+\varphi(x)) = 0, \quad \|\varphi(x)\| \le q\|F(x)\|, \quad \forall x \in U,$$

Полагаме $r(t_n) = \varphi(x_0+t_nh+t_n^2\xi)$. Тогава за достатъчно големи $n \in I\!N$, точката $x_0+t_nh+t_n^2\xi \in U$, $g_j(x_0+t_nh+t_n^2\xi+r(t_n)) = 0$ за $1 \le j \le k$ и от (2.13) имаме, че

$$\begin{aligned}
\|r(t_n)\| &\le q\|F(x_0+t_nh+t_n^2\xi)\| = q(\sum_{j=1}^k g_j^2(x_0+t_nh+t_n^2\xi))^{1/2}\\
&\le q\sqrt{k}(o(t_n^2)+t_n^2\varepsilon).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Отново използуваме теоремата за средните стойности, (2.9) и факта, че $h\in K(x_0)$ и за достатъчно големи $n \in I\!N$ получаваме, че

$$\begin{aligned}
f_i(x_0+t_nh+t_n^2\xi+r(t_n)) &= f_i(x_0+t_nh+t_n^2\xi+r(t_n)) - f_i(x_0+t_nh) + f_i(x_0+t_nh)\\
&= \langle f_i'(x_0+t_nh+\nu_{i,n}(t_n^2\xi+r(t_n)), t_n^2\xi+r(t_n)\rangle\\
&+ t_n\ f_i'(x_0),h\rangle + \frac{t_n^2}{2}L_i[h,h] + \psi_{i,n}(\varepsilon)\\
&\le t_n^2 l\|t_nh+\nu_{i,n}(t_n^2\xi+r(t_n))\|.\|\xi\|\\
&+ s\|r(t_n)\| + t_n^2\langle f_i'(x_0),\xi\rangle + \frac{t_n^2}{2}L_i[h,h] + \psi_{i,n}(\varepsilon),
\end{aligned}$$

където $\nu_{i,n} \in (0,1)$. Следователно от (2.10), (2.12) и (2.14) получаваме, че

$$\begin{aligned} f(x_0 + t_n h + t_n^2\xi + r(t_n)) &:= \max_{0\le i\le m} f_i(x_0 + t_n h + t_n^2\xi + r(t_n)) \\ &\le \max_{0\le i\le m} [t_n^2 l \|t_n h + \nu_{i,n}(t_n^2\xi + r(t_n))\|.\|\xi\| \\ &+ s\|r(t_n)\| + t_n^2\langle f_i'(x_0),\xi\rangle + \frac{t_n^2}{2}L_i[h,h] + \psi_{i,n}(\varepsilon)] \\ &\le o_1(t_n^2) + (t_n^2 l\|\xi\| + s)\|r(t_n)\| + t_n^2\Psi(h) + t_n^2\varepsilon \\ &\le o_1(t_n^2) + (t_n^2 l\|\xi\| + s)q\sqrt{k}[o(t_n^2) + t_n^2\varepsilon] + t_n^2\Psi(h) + t_n^2\varepsilon \\ &= t_n^2[\frac{o_1(t_n^2)}{t_n^2} + (t_n^2 l\|\xi\| + s)q\sqrt{k}\Big(\frac{o(t_n^2)}{t_n^2} + \varepsilon\Big) + \Psi(h) + \varepsilon], \end{aligned}$$

където $\dfrac{o_1(t_n^2)}{t_n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Тъй като $\Psi(h) < 0$, ясно е, че ако изберем ε достатъчно малко, то за достатъчно големи $n \in I\!N$ е изпълнено, че

$$f(x_0 + t_n h + t_n^2\xi + r(t_n)) \ < \ 0,$$

което е в противоречие със заключението на Лема 2.2.7. С това доказателството е приключено. ■

Да отбележим, че доказаното необходимо условие се изразява посредством елементи от вторите субдиференциали на целевата функция и ограниченията на задачата $P(E)$, а не чрез елемент от втория субдиференциал на функцията на Лагранж за задачата $P(E)$, какъвто е случая с доказаното в [40] необходимо условие за крайномерна задача. Да припомним, че *функцията на Лагранж* за задачата $P(E)$ е следната

$$\mathbf{L}(x;\lambda,\mu) = \sum_{i=0}^{m}\lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{k}\mu_j g_j(x),$$

където $(\lambda,\mu) := (\lambda_0,\dots,\lambda_m,\mu_1,\dots,\mu_k) \in I\!R^{m+1}\times I\!R^k$ са *множителите на Лагранж.*

Преди да дадем формулировката на едно достатъчно условие от втори ред за решението на задачата $P(E)$, да отбележим следното

Твърдение 2.2.10 ([1], Параграф 3.4.2) *Ако множеството $\Lambda(x) \neq \emptyset$, то $\Lambda(x)$ е изпъкнало компактно множество в $I\!R^{m+1}\times I\!R^k$.*

Теорема 2.2.11 (Достатъчно условие) *Нека в задачата $P(E)$ $f_i(x_0) = 0$, $0 \le i \le m$, $\operatorname{Im} F'(x_0) \equiv I\!R^k$, $\Lambda(x_0) \neq \emptyset$ и съществува константа $\alpha > 0$, такава че за всеки $L_i \in \partial^2 f_i(x_0)$, $0 \le i \le m$, $M_j \in \partial^2 g_j(x_0)$, $1 \le j \le k$ е изпълнено*

$$\max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)}(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h,h] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h,h]) \ \ge \ \alpha\|h\|^2, \quad \forall h \in K(x_0).$$

Тогава x_0 е точка на строг локален минимум (т.е. единствен минимум в околност на x_0) за задачата $P(X)$ за всяко крайномерно подпространство $X \ni x_0$ на E.

Ако, освен това, функциите f_i, $0 \le i \le m$ са изпъкнали, а функциите g_j, $1 \le j \le k$ са афинни, задачата $P(X)$ има единствено решение x_0. В този случай задачата $P(E)$ също има единствено решение x_0.

Доказателство: Ще използваме идеите от [2], Теорема 10.1.1, където функциите се предполагат двукратно непрекъснато диференцируеми.

Ще покажем, че за всяко крайномерно подпространство $X \ni x_0$ съществува $\delta > 0$, такова че условията: $h \in \delta B_E \cap X$, $h \neq 0$ и

$$f_i(x_0+h) \le 0, \quad 0 \le i \le m, \quad F(x_0+h) = 0, \tag{2.15}$$

където B_E е затвореното единично кълбо в E, са несъвместими. Оттук ще получим непосредствено верността на твърдението.

Нека допуснем противното, а именно, че съществува крайномерно подпространство $X \ni x_0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува ненулев елемент $h_\delta \in \delta B_E \cap X$, такъв че условията (2.15) са изпълнени едновременно

Да означим $Q := \{h_\delta : \delta > 0\}$. Нека $h \in Q$. От развитието на функциите, получено в Твърдение 2.1.17 имаме, че

$$f_i(x_0+h) = \langle f_i'(x_0), h\rangle + \frac{1}{2} L_i(x_0+\eta_i h)[h,h], \tag{2.16}$$

където $\eta_i \in (0,1)$, $L_i(x_0+\eta_i h) \in \partial^2 f_i(x_0+\eta_i h)$, $0 \le i \le m$;

$$g_j(x_0+h) = \ g_j'(x_0), h\rangle + \frac{1}{2} M_j(x_0+\gamma_j h)[h,h], \tag{2.17}$$

където $\gamma_j \in (0,1)$, $M_j(x_0+\gamma_j h) \in \partial^2 g_j(x_0+\gamma_j h)$, $1 \le j \le k$.

Тъй като по направеното предположение $\Lambda(x_0) \neq \emptyset$, от Твърдение 2.2.10 следва, че множеството $\Lambda(x_0)$ е компактно и следователно съществува константа c_1, такава че за всяко $(\lambda,\mu) \in \Lambda(x_0)$ имаме, че $\sum_{i=1}^{k} \mid \mu_i \mid \le c_1$, където $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$.

Полагаме
$x_i^* = f_i'(x_0)$,
$a_i = \frac{1}{2} L_i(x_0+\eta_i h)[h,h]$, $0 \le i \le m$,
$A = F'(x_0)$ (да припомним, че $F(x) = (g_1(x), \ldots, g_k(x))$),
$y_j = \frac{1}{2} M_j(x_0+\gamma_j h)[h,h]$, $1 \le j \le k$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$, $f(x) = \max\limits_{0\le i\le m} f_i(x)$.
От (2.16) и (2.17) получаваме, че (2.15) е еквивалентно на

$$\langle x_i^*, h\rangle + a_i = f_i(x_0+h) \le 0, \quad 0 \le i \le m, \quad Ah + y = 0. \tag{2.18}$$

Тъй като изображенията $\partial^2 f_i$ и $\partial^2 g_j$ са локално ограничени имаме, че

$$\begin{aligned} &\exists c_2 > 0,\ \exists \delta_1 > 0\ : \text{ако } x \in B(x_0,\delta_1),\ L_i \in \partial^2 f_i(x),\ 0 \le i \le m, \\ &M_j \in \partial^2 g_j(x),\ 1 \le j \le k,\ \text{то } \|L_i\| < c_2, \quad \|M_j\| < c_2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Като се възползуваме от вече дефинираната функция
$\langle x_i^*, h\rangle_+ := \max\{\langle x_i^*, h\rangle, 0\}$ за $\|h\| < \delta_1$ получаваме, че за $0 \le i \le m$

$$\langle x_i^*, h\rangle_+ \le | a_i | \le \frac{c_2}{2}\|h\|^2,\ \|Ah\| = \|y\| \le \frac{c_2}{2}\|h\|^2. \tag{2.20}$$

За $(\lambda, \mu) \in \Lambda(x_0)$ имаме, че

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle x_i^*, x\rangle + \sum_{j=1}^{k} \mu_j \langle g_j'(x_0), x\rangle = 0, \quad \forall x \in E.$$

Следователно $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \langle x_i^*, x\rangle = 0,\ \ \forall x \in \mathrm{Ker}\ A$, откъдето

$$\max_{0\le i\le m} \langle x_i^*, x\rangle \ge 0, \quad \forall x \in \mathrm{Ker}\, A,$$

което е условието (2.3) на Лема 2.2.6. От (2.18) и Лема 2.2.6 получаваме, че

$$\begin{aligned}\max_{0\le i\le m} f_i(x_0+h) &= \max_{0\le i\le m} (\langle x_i^*, h\rangle + a_i)\\ &\ge \min_{Ax+y=0} \max_{0\le i\le m} (\langle x_i^*, x\rangle + a_i)\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$= \max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)} \frac{1}{2}(\sum_{i=0}^{m} \lambda_i L_i(x_0+\eta_i h)[h,h] + \sum_{j=1}^{k} \mu_j M_j(x_0+\gamma_j h)[h,h]).$$

Оценяваме разстоянието от h до конуса $K(x_0)$ като използуваме Лемата на Хофман – Лема 2.2.3 и след това чрез (2.20):

$$d(h, K(x_0)) := \inf\{\|h-y\|,\ y \in K(x_0)\} \ \le\ c(\sum_{i=0}^{m} \langle x_i^*, h\rangle_+ + \|Ah\|) \ <\ c_3\|h\|^2$$

за някоя константа c, която не зависи от h и полагаме $c_3 := c.c_2$.

Следователно h може да се представи във вида $h = h' + h''$, където

$$h' \in\ K(x_0), \quad \|h''\| < c_3\|h\|^2. \tag{2.22}$$

Ако $\|h\| < \dfrac{1}{2c_3}$, то можем да оценим $\|h'\|$ по следния начин:

$$\frac{1}{2}\|h\| \ <\ (1 - c_3\|h\|)\|h\| \le \|h'\| \le \|h\|(1 + c_3\|h\|) \le 2\|h\|. \tag{2.23}$$

Тъй като изображенията $\partial^2 f_i$ и $\partial^2 g_j$ са w^*–полунепрекъснати отгоре и локално ограничени и тъй като w^*–компактните множества в сепарабелни дуални пространства са секвенциално w^*–компактни (вж. Забележка 2.1.6), можем да намерим (като приложим Теоремата на Алаоглу–Бурбаки) редица $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}\subset Q$, $\|h_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и елементи $L_i \in \partial^2 f_i(x_0)$, $\quad M_j \in \partial^2 g_j(x_0)$, такива че

$$L_i(x_0 + \eta_i h_n) \xrightarrow{w^*} L_i,$$

$$M_j(x_0 + \gamma_j h_n) \xrightarrow{w^*} M_j.$$

Следователно съществува $\nu \in I\!N$, такова че за всяко $h \in \{h_n\}_{n\geq\nu}$ имаме, че

$$\mid L_i(x_0 + \eta_i h)[h,h] - L_i[h,h] \mid < \frac{\alpha\|h\|^2}{16}, \tag{2.24}$$

$$\mid M_j(x_0 + \gamma_j h)[h,h] - M_j[h,h] \mid < \frac{\alpha\|h\|^2}{16c_1} \tag{2.25}$$

(тук съществено използуваме предположението, че X е крайномерно, за да твърдим, че рестрикциите на $L_i(x_0 + \eta_i h_n)$ и $M_j(x_0 + \gamma_j h_n)$ върху $X \times X$ клонят в нормираната топология съответно към рестрикциите на L_i и M_j върху $X \times X$, когато $n \to \infty$).

Тогава за всяко $h \in \{h_n\}_{n\geq\nu}$, такова че $\|h\| < \min\{\frac{1}{2c_3}, \delta_1\}$, като вземем предвид, че $h = h' + h''$, където $h' \in K(x_0)$ и h'' удовлетворяват (2.22) и (2.23) и като използуваме (2.21), (2.24) и (2.25) получаваме:

$$\begin{aligned}
0 \geq f(x_0+h) \;&\geq\; \max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)} \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i(x_0+\eta_i h)[h,h] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j(x_0+\gamma_j h)[h,h]\Big)\\
&\geq\; -\frac{\alpha\|h\|^2}{16} + \max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)} \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h,h] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h,h]\Big)\\
&\geq\; -\frac{\alpha\|h\|^2}{16} + \max_{(\lambda,\mu)\in\Lambda(x_0)} \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h',h'] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h',h']\\
&+\; \sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h',h''] + \sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h'',h'] + \sum_{i=0}^{m}\lambda_i L_i[h'',h'']\\
&+\; \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h',h''] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h'',h'] + \sum_{j=1}^{k}\mu_j M_j[h'',h'']\Big)\\
&\geq\; -\frac{\alpha\|h\|^2}{16} + \frac{\alpha}{2}\|h'\|^2 - \Big(\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\|L_i\|\|h'\|\|h''\| + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{m}\lambda_i\|L_i\|\|h''\|^2\\
&+\; \sum_{j=1}^{k}\mid\mu_j\mid\|M_j\|\|h'\|\|h''\| + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\mid\mu_j\mid\|M_j\|\|h''\|^2\Big)\\
&\geq\; -\frac{\alpha\|h\|^2}{16} + \frac{\alpha}{8}\|h\|^2 - c_2\|h'\|\|h''\|(1+c_1) - \frac{1}{2}c_2\|h''\|^2(1+c_1)\\
&\geq\; \|h\|^2\Big[\frac{\alpha}{16} - 2c_2c_3(1+c_1)\|h\| - \frac{1}{2}c_2c_3^2(1+c_1)\|h\|^2\Big].
\end{aligned}$$

Последният израз е с положителен знак, когато нормата на h е достатъчно малка. Това води до противоречие.

Следователно x_0 е строг локален минимум за задачата $P(X)$. Когато f_i, $0 \leq i \leq m$ са изпъкнали и g_j, $1 \leq j \leq k$ са афинни функции, функцията на Лагранж е изпъкнала и допустимото множество е изпъкнало, следователно локалният минимум е и глобален. При тези предположения x_0 е строг глобален минимум и за задачата $P(E)$. Наистина, ако допуснем, че x_0 не е строг глобален минимум на задачата $P(E)$, т.е. че съществува друга допустима точка $\bar{x}$, за която $f_0(\bar{x}) \leq f_0(x_0)$, то като разгледаме двумерното подпространство $X = \operatorname{span}\{0, x_0, \bar{x}\}$ и задачата $P(X)$, получаваме противоречие с това, че последната има строг глобален минимум в x_0. ■

Забележка 2.2.12 *Ако функциите $f_0, f_1, \ldots, f_m$ са изпъкнали, а функциите $g_1, \ldots, g_k$ са афинни, Теорема* 2.2.11 *твърди, че за всяко крайномерно подпространство X задачата $P(X)$ има единствено решение x_0 и следователно е коректна по Тихонов.*

Да припомним, че минимизационна задача се нарича *коректна по Тихонов*, ако има единствено решение, към което клонят в нормираната топология всички минимизиращи редици (вж. [30]).

Полученото в Твърдение 2.1.17 развитие и забележката, направена след Лемата на Хофман позволяват да се докаже и следното достатъчно условие, което е модификация на това в [1], Параграф 3.4.3., доказано там за задача с двукратно непрекъснато диференцируеми данни.

Теорема 2.2.13 (Достатъчно условие) *Нека за задачата $P(E)$ точката x_0 е такава, че $f_i(x_0) = 0$, $1 \leq i \leq m$, $\operatorname{Im} F'(x_0) \equiv \mathbb{R}^k$ и съществува число $\alpha > 0$ и множители на Лагранж $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{m+1} \times \mathbb{R}^k$, такива че $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m$,*

$$\mathbf{L}'_x(x_0; \lambda, \mu) = f'_0(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f'_i(x_0) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j g'_j(x_0) = 0 \tag{2.26}$$

и за всяко $L \in \partial^2 \mathbf{L}(x_0; \lambda, \mu)$

$$L[h, h] \geq 2\alpha \|h\|^2, \quad \forall h \in C(x_0), \tag{2.27}$$

където $C(x_0) = \{h \in E \ : \ \langle f'_i(x_0), h \rangle = 0, \ 1 \leq i \leq m, \ F'(x_0)[h] = 0\}$.

Тогава x_0 е локален минимум за задачата $P(X)$ за всяко крайномерно подпространство $X \ni x_0$ на E.

Доказателство: Както вече отбелязахме, следваме доказателството на Теорема в [1], Параграф 3.4.3. като вместо обичайното развитие в ред на Тейлър, използваме развитието, получено в Твърдение 2.1.17 за $C^{1,1}(E)$ функции.

Допускаме противното, т.е. че съществува крайномерно подпространство $X \ni x_0$, такова че за всяко $\delta > 0$ съществува $h_\delta \in X \cap \delta B_E$ (B_E е затвореното единично кълбо в E), такова че

$$f_i(x_0 + h_\delta) \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad F(x_0 + h_\delta) = 0 \ \text{ и } \ f_0(x_0 + h_\delta) < f_0(x_0).$$

Да означим $Q := \{h_\delta : \delta > 0\}$ и нека $h \in Q, h \neq 0$.

Тъй като $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_0 + h) \leq 0$, от Твърдение 2.1.17, приложено за функцията на Лагранж $\mathbf{L}(\cdot; \lambda, \mu)$ имаме:

$$f_0(x_0 + h) \geq \mathbf{L}(x_0; \lambda, \mu) + \frac{1}{2} L(x_0 + \eta_h h)[h, h],$$

където $L(x_0 + \eta_h h) \in \partial^2 \mathbf{L}(x_0 + \eta_h h; \lambda, \mu)$, $\eta_h \in (0, 1)$. Локалната ограниченост на $\partial^2 \mathbf{L}(\cdot; \lambda, \mu)$ ни позволява да намерим редица $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Q$, $\|h_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, такава че редицата $L_n := L(x_0 + \eta_{h_n} h_n)$ е w^*–сходяща към някое $L \in \partial^2 \mathbf{L}(x_0; \lambda, \mu)$ (от w^*–полунепрекъснатостта отгоре на $\partial^2 \mathbf{L}(.; \lambda, \mu)$). Тъй като X е крайномерно, рестрикциите на L_n върху $X \times X$ клонят към рестрикцията на L върху $X \times X$ в нормираната топология.

Така, че

$$f_0(x_0 + h_n) \geq f_0(x_0) + \frac{1}{2} L[h_n, h_n] + r_2(h_n), \tag{2.28}$$

където $r_2(h_n) = o(\|h_n\|^2)$.

От друга страна можем да представим

$$\begin{aligned} f_0(x_0 + h) &= \mathbf{L}(x_0 + h; \lambda, \mu) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_0 + h) \\ &= \mathbf{L}(x_0; \lambda, \mu) + \mathbf{L}'_x(x_0; \lambda, \mu) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \langle f'_i(x_0), h\rangle + r_1(h) \\ &= f_0(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \langle f'_i(x_0), h\rangle + r_1(h), \end{aligned} \tag{2.29}$$

където остатъчният член $r_1(h)$ е от порядъка на $O(\|h\|^2)$.

Да означим конуса

$$K_0 = \{h \in E : \langle f'_i(h_0), h\rangle \leq 0,\ 1 \leq i \leq m;\ F'(x_0)(h) = 0\}.$$

По Лемата на Хофман всяко $h \in E$ може да се представи като сума $h = h_1 + h_2$, където $h_1 \in K_0$, а нормата на h_2 може да се оцени чрез

$$\|h_2\| \leq c_1 \{\sum_{i=1}^{m} \langle f'_i(x_0), h\rangle_+ + \|F'(x_0)(h)\|\}, \tag{2.30}$$

където c_1 е константа. По–нататък, като се възползуваме от забележката, направена след Лемата на Хофман, можем да разложим h_1 на сума $h_1 = h'_1 + h''_1$, където $h'_1 \in C(x_0)$, а нормата на h''_1 може да се оцени чрез

$$\|h''_1\| \leq c_2 \{\sum_{i=1}^{m} \mid \langle f'_i(x_0), h_1\rangle \mid\} = c_2 \{-\sum_{i=1}^{m} \langle f'_i(x_0), h''_1\rangle\}, \tag{2.31}$$

където c_2 е константа. За тази оценка използваме и че $F'(x_0)(h_1) = 0$, тъй като $h_1 \in K_0$ и това, че $|\ \langle f_i'(x_0), h_1\rangle\ | = |\ \langle f_i'(x_0), h_1' + h_1''\rangle\ | = |\ \langle f_i'(x_0), h_1''\rangle\ | = -\langle f_i'(x_0), h_1''\rangle$, тъй като $\langle f_i'(x_0), h_1'\rangle = 0$, а $\langle f_i'(x_0), h_1\rangle \le 0$ за всяко $1 \le i \le m$.

Ако векторът $x_0 + h$ е допустим за задачата $P(E)$, то имаме че

$$0 = F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)(h) + r_0(h),$$

$$0 \ge f_i(x_0 + h) = \langle f_i'(x_0), h\rangle + \rho_i(h), \quad 1 \le i \le m,$$

където $\|r_0(h)\|$ и $|\ \rho_i(h)\ |$, $1 \le i \le m$ са величини от порядъка на $O(\|h\|^2)$. Като използваме тези оценки в (2.30), намираме, че ако $x_0 + h$ е допустим вектор за задачата $P(E)$, то

$$\|h_2\| \le c_1\{\sum_{i=1}^{m} |\ \rho_i(h)\ | + \|r_0(h)\|\}. \tag{2.32}$$

Да изберем число $S > 0$, толкова голямо, че

$$Sc_2^{-1}(\min_{1\le i\le m} \lambda_i) - c_1 \max_{1\le i\le m}(\lambda_i\|f_i'(x_0)\|) - 1 \ge 0. \tag{2.33}$$

Да фиксираме $\varepsilon_1 \in (0, 1]$, такова че за $\varepsilon = (c_1 + S)\varepsilon_1$ да са изпълнени неравенствата

$$\begin{cases} \varepsilon < 1, \\ \alpha(1-\varepsilon)^2 - \|L\|\varepsilon(1+\varepsilon) - \frac{1}{2}\|L\|\varepsilon^2 - \frac{\alpha}{2} \ge 0. \end{cases}$$

Да изберем $\delta \in (0, \|L\|^{-1})$, такова че от неравенството $\|h\| < \delta$ и $h \in Q$ да следват неравенствата

$$\sum_{i=1}^{m} |\ \rho_i(h)\ | + \sum_{j=0}^{1} \|r_j(h)\| \le \varepsilon\|h\|, \quad \|r_2(h)\| \le \frac{\alpha}{2}\|h\|^2. \tag{2.34}$$

Нека $h \in Q$. Тогава $x_0 + h$ е допустим вектор за задачата $P(E)$. Да представим $h = h_1' + h_1'' + h_2$. Възможни са два случая (a) $\|h_1''\| > S\varepsilon_1\|h\|$ и (b) $\|h_1''\| \le S\varepsilon_1\|h\|$.

В случай (a) имаме от (2.31), че при $\|h\| \le \delta$ (т.е. за достатъчно големи $n \in \mathbb{N}$)

$$S\varepsilon_1\|h\| < \|h_1''\| \le c_2(-\sum_{i=1}^{m}\langle f_i'(x_0), h_1''\rangle). \tag{2.35}$$

Тогава като следствие последователно от (2.29), (2.35), (2.32), (2.34) и (2.33) получаваме, че

$$\begin{aligned} f_0(x_0 + h) &= f_0(x_0) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\langle f_i'(x_0), h_1'' + h_2\rangle + r_1(h) \\ &\ge f_0(x_0) + Sc_2^{-1}(\min_{1\le i\le m} \lambda_i)\varepsilon_1\|h\| - \max_{1\le i\le m}(\lambda_i\|f_i'(x_0)\|)c_1\varepsilon_1\|h\| - \varepsilon_1\|h\| \\ &= f_0(x_0) + \varepsilon_1\|h\|[Sc_2^{-1}(\min_{1\le i\le m} \lambda_i) - c_1 \max_{1\le i\le m}(\lambda_i\|f_i'(x_0)\|) - 1] \\ &\ge f_0(x_0). \end{aligned}$$

В случай (b) $\|h_1''\| \le S\varepsilon_1\|h\|$ и като следствие от (2.32) и (2.34), ако означим $h_2' = h_1''+h_2$ имаме, че $\|h_2'\| = \|h_1''+h_2\| \le (S+c_1)\varepsilon_1\|h\| = \varepsilon\|h\|$. Тогава $h = h_1'+h_2'$, където $(1-\varepsilon)\|h\| \le \|h_1'\| \le (1+\varepsilon)\|h\|$.

Като използуваме тези неравенства и (2.28), (2.27), (2.34) получаваме и в този случай, че при достатъчно малки по норма $h \in Q$

$$
\begin{aligned}
f_0(x_0+h) &\ge f_0(x_0) + \frac{1}{2}L[h,h] + r_2(h) \\
&= f_0(x_0) + \frac{1}{2}L[h_1'+h_2', h_1'+h_2'] + r_2(h) \\
&= f_0(x_0) + \frac{1}{2}L[h_1',h_1'] + \frac{1}{2}L[h_1',h_2'] + \frac{1}{2}L[h_2',h_1'] + \frac{1}{2}L[h_2',h_2'] + r_2(h) \\
&\ge f_0(x_0) + \alpha\|h_1'\|^2 - \|L\|\|h_1'\|\|h_2'\| - \frac{1}{2}\|L\|\|h_2'\|^2 - \frac{\alpha}{2}\|h\|^2 \\
&\ge f_0(x_0) + [\alpha(1-\varepsilon)^2 - \|L\|\varepsilon(1+\varepsilon) - \frac{1}{2}\|L\|\varepsilon^2 - \frac{\alpha}{2}]\|h\|^2 \\
&\ge f_0(x_0).
\end{aligned}
$$

Това приключва доказателството. ■

Глава 3

Вариационни методи в негладкия анализ

В тази глава излагаме резултати, получени чрез вариране на функции посредством използването на апроксимации или прилагане на идеите на вариационните методи.

3.1 Предварителни сведения

Тук даваме формулировките на дефиниции и твърдения, с които илюстрираме най–важните характеристики на апроксимациите на Моро–Йосида и на Ласри и Лионс на функции, дефинирани в хилбертово пространство H.

Апроксимацията по епиграфика на Моро–Йосида с индекс $\lambda > 0$ на функцията $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е следната функция

$$f_\lambda(x) := \inf_{y\in H}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2\}.$$

Твърдение 3.1.1 ([6], Твърдение 1.1) *Нека $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е функция, която удовлетворява следното условие за ръста: за всяко $x \in H$, $f(x) \geq -\frac{c}{2}(\|x\|^2 + 1)$, където c е положителна константа (т.е. f е квадратично минорирана функция).*

Тогава, ако $\lambda \in (0, 1/c)$, функцията $f_\lambda : H \to I\!R$ е липшицова върху всяко ограничено подмножество на H.

Нещо повече, за всяко $x \in H$

$$\sup_{\lambda>0} f_\lambda(x) = \underline{cl}f(x),$$

където $\underline{cl}f(x)$ обозначава полунепрекъснатата отдолу регуляризация на f в x , т.е. $\underline{cl}f(x) = \sup_{\delta>0}\inf_{z\in B(x,\delta)} f(z)$.

Въпреки глобалната дефиниция регуляризирането на квадратично минорирана функция f има локален характер. Непосредствени пресмятания показват, че ако $f(x) \neq +\infty$, то

$$f_\lambda(x) = \inf_{\|x-y\|\le\rho}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2\}, \tag{3.1}$$

където ρ се задава като

$$\rho = \rho(x, f, \lambda, c) = \big[\lambda\frac{2f(x) + c(2\|x\|^2 + 1)}{1 - 2\lambda c}\big]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.2}$$

(вж.[6]).

Регуляризирането по епиграфика има локален характер и за липшицова функция $f : H \to I\!R$ (т.е. такава че съществува константа $K > 0$, такава че $|f(x) - f(y)| \le K\|x - y\|$, $\forall x,\ y \in H$), както се вижда от един резултат на Беноа:

Лема 3.1.2 ([11]) *Нека $f : H \to I\!R$ е липшицова функция. Тогава*
(a) *за всяко $\lambda > 0$ и всяко $x \in H$, $f_\lambda(x) = \inf_{\|x-y\|\le\rho}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2\}$, където ρ се задава като*

$$\rho = 2K\lambda; \tag{3.3}$$

(b) *за всяко $\lambda>0$ функцията $f_\lambda : H \to I\!R$ е липшицова със същата константа K.*

Естествено е да се разгледа и аналогичното понятие за апроксимация по хипографика.

Апроксимацията на Моро–Йосида по хипографика с индекс $\mu > 0$ на функция $g : H \to I\!R \cup \{-\infty\}$ е функцията:

$$g^\mu(x) := \sup_{y\in H}\{g(y) - \frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\}.$$

Тъй като $g^\mu(x) = -(-g)_\mu(x)$ Твърдение 3.1.1 лесно се обръща в

Твърдение 3.1.3 ([6], Твърдение 1.2) *Нека $g : H \to I\!R \cup \{-\infty\}$ е функция, която удовлетворява следното условие за ръста: за всяко $x \in H$, $g(x) \le \frac{d}{2}(\|x\|^2 + 1)$, където d е някоя положителна константа (т.е. g е квадратично мажорирана функция).*

Тогава, ако $\mu \in (0, 1/d)$, функцията $g^\mu : X \to I\!R$ е липшицова във всяко ограничено подмножество на H.

Нещо повече, за всяко $x \in H$

$$\inf_{\mu>0} g^\mu(x) = \overline{cl}g(x),$$

където $\overline{cl}g(x)$ обозначава полунепрекъснатата отгоре регуляризация на g в x, т.е. $\overline{cl}g(x) = \inf_{\delta>0}\sup_{z\in B(x,\delta)} g(z)$.

Ясно е, че регуляризирането по хипографика на квадратично мажорирана функция g също има локален характер, като ако $g(x) \neq -\infty$, то

$$g^{\mu}(x) = \sup_{\|x-y\|\leq\sigma}\{g(y) - \frac{1}{2\mu}\|x-y\|^2\},$$

където σ се задава като

$$\sigma = \sigma(x, g, \mu, d) = \big[\mu\frac{d(2\|x\|^2+1) - 2g(x)}{1-2\mu d}\big]^{\frac{1}{2}}.$$

Функцията $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ се нарича *слабо изпъкнала*, ако съществува константа $c > 0$, такава че $f(.) + \frac{c}{2}\|.\|^2$ е изпъкнала функция. Функцията $g : H \to I\!R \cup \{-\infty\}$ се нарича *слабо вдлъбната*, ако функцията $-g$ е слабо изпъкнала. Това е еквивалентно на съществуването на константа $c > 0$, такава че $g(.) - \frac{c}{2}\|.\|^2$ е вдлъбната функция (вж. [51]).

Твърдение 3.1.4 ([6], Твърдение 3.2) *Дадени са функциите $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$, $g : H \to I\!R \cup \{-\infty\}$. За всеки $\lambda > 0$, $\mu > 0$ функцията f_λ е $\frac{1}{\lambda}$–слабо вдлъбната, а функцията g^μ е $\frac{1}{\mu}$–слабо изпъкнала.*

Ласри и Лионс в статията си [51] въвеждат следните функции

$$(f_\lambda)^{\mu}(x) = \sup_{y\in H}\inf_{z\in H}\{f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z-y\|^2 - \frac{1}{2\mu}\|y-x\|^2\},$$

$$(g^\lambda)_{\mu}(x) = \inf_{y\in H}\sup_{z\in H}\{g(z) - \frac{1}{2\lambda}\|z-y\|^2 + \frac{1}{2\mu}\|y-x\|^2\}$$

и показват, че за $0 < \mu < \lambda$ те са от класа $C^{1,1}(H)$ и равномерно апроксимират функциите $f : H \to I\!R$ и $g : H \to I\!R$ при предположение, че последните са ограничени и равномерно непрекъснати. В работата си [11] Беноа доказва, че в случая на липшицова функция $f : H \to I\!R$ фамилията от функции $\{(f_\lambda)^\mu\}_{0<\mu<\lambda}$ равномерно клони към f, когато $(\lambda, \mu) \to (0, 0)$.

Доказателствата на следните теореми са представени от Атуш и Азе в статията им [6]:

Теорема 3.1.5 ([6], Теорема 4.1) *Нека съществуват константи c, $d > 0$, такива че за всяко $x \in H$*

$$f(x) \geq -\frac{c}{2}(\|x\|^2 + 1), \tag{3.4}$$

$$g(x) \leq \frac{d}{2}(\|x\|^2 + 1). \tag{3.5}$$

Тогава за всеки $0 < \mu < \lambda < 1/c$ *(респективно* $0 < \mu < \lambda < 1/d$*)* $(f_\lambda)^\mu$ *(респективно* $(g^\lambda)_\mu$*) е функция от класа* $C^{1,1}(H)$*, чиято производна е* $\max\left\{\dfrac{1}{\mu}, \dfrac{1}{\lambda-\mu}\right\}$*–липшицова. Функцията* $(f_\lambda)^\mu$ *е* $\dfrac{1}{\mu}$*–слабо изпъкнала и* $\dfrac{1}{\lambda-\mu}$*–слабо вдлъбната,* $(f_\lambda)^\mu \le f$ *и* $(g^\lambda)_\mu \ge g$*.*

Теорема 3.1.6 ([6], Теорема 4.2) *Ако предположим, че* f *и* g *удовлетворяват условията за ръста* (3.4) *и* (3.5) *съответно, то*

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0\\ \lambda>\mu}} (f_\lambda)^\mu(x) = \underline{cl} f(x), \qquad \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0\\ \lambda>\mu}} (g^\lambda)_\mu(x) = \overline{cl} g(x).$$

В частност от тези резултати следва, че полунепрекъсната отдолу (респективно отгоре) функция с подходящо условие за ръста може да се апроксимира поточково отдолу (респективно отгоре) с функции от класа $C^{1,1}(H)$.

3.2 Диференциални свойства на апроксимациите на Моро-Йосида

В този параграф се спираме на диференциалните свойства на апроксимациите на Моро–Йосида на полунепрекъсната отдолу функция, дефинирана в хилбертово пространство H и на връзката им със субдиференциала на Фреше на апроксимираната функция.

Да припомним, че *субдиференциалът на Фреше* на функция $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ в точката x е множеството

$$\partial^F f(x) := \{x^* \in H : \liminf_{\|h\|\to 0} \frac{f(x+th) - f(x) - \langle x^*, h\rangle}{\|h\|} \ge 0\}$$

и че функцията f се нарича *субдиференцируема по Фреше* в точката x, ако $\partial^F(x) \ne \emptyset$.

Добре известен факт е, а и лесно се доказва, като се използва гладкият вариационен принцип на Борвейн и Прайс, вж. [16], че за собствена полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to I\!R \cup \{+\infty\}$ множеството $\mathrm{Dom}\,\partial^F f$ е гъсто в $\mathrm{dom}\, f$, както и че $\partial^F f(x) \subset \partial f(x)$ за локално липшицова функция $f : H \to I\!R$, където с ∂f означаваме субдиференциала на Кларк на функцията $f : H \to I\!R$. Да припомним, че *субдиференциалът на Кларк* на локално липшицовата функция $f : H \to I\!R$ в точката $x \in \mathrm{dom}\, f$ е множеството

$$\partial f(x) = \{p \in H : f^0(x; h) \ge \langle p, h\rangle,\ \forall h \in H\},$$

където

$$f^0(x; h) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+th) - f(y)}{t}.$$

Преди да изложим доказателството на основната теорема в този параграф, да припомним и формулировката на известната теорема на Екеланд и Лебург.

Теорема 3.2.1 ([32], Теорема 2.5) *Нека банаховото пространство X е такова, че в него е дефинирана неотрицателна непрекъсната функция, която приема стойност нула извън някое ограничено множество и е диференцируема по Фреше във всяка точка, различна от началото.*

Нека A е произволно множество и $f : X \times A \to \mathbb{R}$ е функция, за която съществува отворено подмножество $\Omega \subset X$, във всяка точка от което $f(.,\alpha)$ е диференцируема по Фреше за всяко $\alpha \in A$. Дефинираме функцията $F(x) := \inf\limits_{\alpha \in A} f(x,\alpha)$ и предполагаме, че $F(x) > -\infty$, $\forall x \in X$ и
1) *съществуват $\eta > 0$ и $\theta > 0$, такива че множеството*

$$\{f'_x(x',\alpha)\ :\ \|x'-x\| < \eta,\ f(x',\alpha) < F(x)+\theta\}$$

е ограничено по норма в X^*;
2) *съществува $\theta > 0$, такова че ако означим $A_\theta(x) := \{\alpha \in A\ :\ f(x,\alpha) \le F(x)+\theta\}$, функциите $f'_x(.,\alpha)$, $\alpha \in A_\theta$ са равностепенно непрекъснати в X.*

Тогава функцията F е локално липшицова в Ω и диференцируема по Фреше в гъсто и G_δ подмножество на Ω.

Преди да цитираме и един резултат на Борвейн и Джайлс, от който също се нуждаем в по–нататъшните ни разглеждания, да припомним, че нормата $\|.\|$ в банахово пространство X има *свойството на Кадец*, ако за всяка редица $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, която клони в слабата топология в X към x и е такава, че $\|x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|$ е изпълнено, че x_n клони към x в нормираната топология.

Теорема 3.2.2 ([14], Теорема 11) *Нека X е рефлексивно банахово пространство с норма, която има свойството на Кадец. Нека Y е топологично пространство и $T : Y \to X$ е непрекъснат оператор, такъв че $T(Y)$ е ограничено множество и за всяка сходяща обобщена редица $\{Tx_\alpha\}$ в Y може да се намери сходяща обобщена подредица от редицата $\{x_\alpha\}$ в X. Разглеждаме функцията*

$$\psi(x) = \inf_{y \in Y}\{p(y) + h(\|x - Ty\|)\},$$

където $p : Y \to \mathbb{R}$ е полунепрекъсната отдолу и ограничена отдолу функция, $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[0,\infty)$ функция, чиято производна h' е непрекъсната и положителна в $(0,\infty)$, като $h(0) = 0$. Тогава за всяка точка $x_0 \in X$, в която функцията $\psi : X \to \mathbb{R}$ е субдиференцируема по Фреше, съществува точка $y_0 \in Y$, такава че

$$\psi(x_0) = p(y_0) + h(\|x_0 - Ty_0\|).$$

Основният резултат в този параграф е формулиран и доказан в следната

Теорема 3.2.3 *Нека $f : H \to I\!\!R$ е полунепрекъсната отдолу функция, която удовлетворява условието за ръста* (3.4)*. Тогава за всяко $\lambda \in (0, 1/c)$ имаме, че:*

a) *за всяка точка x на субдиференцируемост по Фреше на функцията f_λ съществува точка $y_\lambda(x)$, такава че*

$$\|y_\lambda(x) - x\| \le \rho, \tag{3.6}$$

където ρ се дава чрез (3.2),

$$f_\lambda(x) = f(y_\lambda(x)) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y_\lambda(x)\|^2, \tag{3.7}$$

и

$$\partial^F(f_\lambda)(x) \subset \partial^F f(y_\lambda(x)); \tag{3.8}$$

b) *съществува гъсто и G_δ множество G_λ, такова че f_λ е диференцируема по Фреше в G_λ. Нещо повече, ако $x \in G_\lambda$, то точката $y_\lambda(x)$ е точка на строг минимум за функцията $\varphi_x(.) := f(.) + \dfrac{1}{2\lambda}\|x - .\|^2$ (т.е. всяка минимизираща редица за функцията φ_x клони към $y_\lambda(x)$), $y_\lambda : G_\lambda \to H$ е непрекъснато изображение и*

$$(f_\lambda)'(x) = \frac{x - y_\lambda(x)}{\lambda}; \tag{3.9}$$

c) *образът на многозначният оператор $I + \lambda\partial^F f$ съдържа множеството G_λ;*

d) *резолвентата $J_\lambda = (I + \lambda\partial^F f)^{-1}$ има непразен образ в точките на G_λ и за всяко $x \in G_\lambda$ имаме, че $J_\lambda(x) \ni y_\lambda(x)$.*

Доказателство: Да забележим, че хилбертовото пространство H е рефлексивно, а хилбертовата норма има свойството на Кадец. Да вземем реалната функция $h(s) = s$ и изображението $T : H \to H$, дефинирано като $Ty = y$, което удовлетворява условията на Теорема 3.2.2. Като отчетем условието за ръста (3.4) имаме, че са изпълнени всички предположения на Теорема 3.2.2, откъдето получаваме, че (3.7) е в сила за всяка точка на субдиференцируемост по Фреше на функцията f_λ. За да установим (3.8) да вземем точка x на субдиференцируемост по Фреше на f_λ и произволно $p \in \partial^F f_\lambda(x)$. Тогава

$$\liminf_{\|h\|\to 0} \frac{f(y_\lambda(x) + h) - f(y_\lambda(x)) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \ge$$

$$\liminf_{\|h\|\to 0} \frac{f_\lambda(x + h) - f_\lambda(x) - \langle p, h\rangle}{\|h\|} \ge 0,$$

откъдето получаваме, че

$$p \in \partial^F f(y_\lambda(x)).$$

Остава да се отбележи, че (3.6) е следствие от (3.1).

Тъй като $\lambda \in (0, 1/c)$ и (3.4) е в сила, можем да приложим Твърдение 3.1.1, за да получим, че функцията f_λ е липшицова върху всяко ограничено подмножество на H. Сега b) следва от Теоремата на Екеланд и Лебург – Теорема 3.2.1, чиито условия се удовлетворяват благодарение на (3.4).

c) следва от (3.9).

d) $y \in J_\lambda(x)$ тогава и само тогава, когато $x \in (I + \lambda\partial^F f)(y)$ и твърдението следва от c). ∎

Да отбележим, че заключенията на теоремата са в сила и за апроксимациите f_λ за $\lambda > 0$ на произволна липшицова функция с константа K, като в този случай $\rho = 2K\lambda$.

3.3 Възстановяване на субдиференциала на Кларк

В този параграф доказваме, че ако $f : H \to I\!R$ е локално липшицова квадратично минорирана функция и x^* е w^* граница на производни на апроксимациите ѝ на Ласри и Лионс $((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(x_n)$ за някои редици $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $x^* \in \partial f(x)$. Нещо повече, $\partial f(x)$ е w^* затворената изпъкнала обвивка на всички такива граници. Доказваме и аналогичен резултат за апроксимациите на Моро–Йосида на такава функция.

В началото ще се спрем на някои основни свойства на функция $f : H \to I\!R$, която е полунепрекъсната отдолу и удовлетворява условието за ръста (3.4).

Да отбележим, че за достатъчно малки $\lambda > 0$ функциите $f_\lambda : H \to I\!R$ са квадратично мажорирани с константа $d_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$. Наистина, от дефиницията на f_λ имаме, че

$$f_\lambda(x) \le f(0) + \frac{1}{2\lambda}\|x\|^2 \le \frac{1}{2\lambda}[\|x\|^2 + 1],$$

ако $\lambda \in (0, \dfrac{1}{2f(0)})$, в случай, че $f(0) \ne 0$. В случай, че $f(0) = 0$ функцията f_λ е квадратично мажорирана с константа $d_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$ за всяко $\lambda \in (0, \infty)$.

От друга страна, ако искаме да оценим отдолу $f_\lambda(x)$ на полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to I\!R$, която удовлетворява условието за ръста (3.4) имаме, че

$$f(y) \ge -\frac{c}{2}(1 + \|y\|^2), \quad \forall y \in H.$$

Следователно

$$f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2 \ge -\frac{c}{2}(1 + \|y\|^2) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2, \quad \forall x,\ y \in H$$

$$f_\lambda(x) = \inf_{y\in H}\{f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x - y\|^2\} \ge -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}\inf_{y\in H}\{-c\|y\|^2 + \frac{1}{\lambda}\|x - y\|^2\}$$

$$2f_\lambda(x) \ge -c + \inf_{y\in H}\{\frac{1}{\lambda}\|x-y\|^2 - c\|y\|^2\}$$

$$2f_\lambda(x) \ge -c + \frac{1}{\lambda}\inf_{y\in H}\{\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + (1-c\lambda)\|y\|^2\}.$$

Когато $\lambda \in (0, 1/2c)$ можем да оценим

$$2f_\lambda(x) \ge -c + \frac{1}{\lambda}\inf_{y\in H}\{\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| + \frac{1}{2}\|y\|^2\}.$$

$$2f_\lambda(x) \ge -c - \frac{1}{\lambda}\|x\|^2,$$

или

$$-2f_\lambda(x) \le c + \frac{\|x\|^2}{\lambda} \text{ за всяко} x \in H, \text{ ако } \lambda \in (0, 1/2c). \tag{3.10}$$

Да разгледаме сега функцията $\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda)$. По дефиниция

$$\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda) = \left[\mu\frac{d_\lambda(2\|x\|^2+1) - 2f_\lambda(x)}{1-2\mu d_\lambda}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Като се възползуваме от факта, че за полунепрекъсната отдолу функция $f: H \to I\!R$, която удовлетворява условието за ръста (3.4) за всяко

$$\lambda \in (0, \min\{\frac{1}{2f(0)},\ \frac{1}{2c}\}) \tag{3.11}$$

имаме, че $d_\lambda = \dfrac{1}{\lambda}$ и разполагаме с оценката (3.10), получаваме, че за λ удовлетворяващи условието (3.11) е изпълнено, че

$$\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda) \le \left[\frac{\mu}{\lambda}\frac{2\|x\|^2 + 1 + c\lambda + \|x\|^2}{1-2\frac{\mu}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda) \le \left[\frac{\mu}{\lambda}\frac{3\|x\|^2 + 3/2}{1-2\frac{\mu}{\lambda}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оттук заключаваме, че ако собствената полунепрекъсната отдолу функция $f: H \to I\!R$ удовлетворява условието за ръста, то $\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda)$ клони към нула, когато частното $\dfrac{\mu}{\lambda}$ клони към нула. Нещо повече, за всяко ограничено множество $M \subset H$ е в сила, че $\sigma_M(\lambda, \mu) := \sup_{x\in M}\sigma(x, f_\lambda, \mu, d_\lambda)$ също клони към нула, когато частното $\dfrac{\mu}{\lambda}$ клони към нула.

Да забележим, че тъй като за полунепрекъсната отдолу функция $f: H \to I\!R$, която удовлетворява условието за ръста (3.4) имаме

$$\rho(x, f, \lambda, c) = \left[\lambda\frac{2f(x) + c(2\|x\|^2+1)}{1-2\lambda c}\right]^{\frac{1}{2}},$$

то очевидно $\rho(x, f, \lambda, c)$ клони към нула, когато λ клони към нула. Нещо повече, за всяко ограничено множество $M \subset H$, такова че полунепрекъснатата функция

$f : H \to I\!R$, удовлетворяваща условието за ръста (3.4) е ограничена отгоре в M е в сила, че $\rho_M(\lambda) := \sup_{x\in M} \rho(x, f, \lambda, c)$ клони към нула, когато λ клони към нула.

Направените дотук забележки ще използваме в изложените по–долу доказателства.

Уместно е да припомним и представянето на субдиференциала на Кларк на локално липшицова функция, доказано от Прайс:

Теорема 3.3.1 ([64]) *Нека банаховото пространство X има еквивалентна β–диференцируема извън началото норма. Тогава всяка локално липшицова функция $f : X \to I\!R$ е β–диференцируема в гъсто множество, което означаваме с $\mathbf{D}_\beta(f)$, а съответната производна на функцията в точка $x \in \mathbf{D}_\beta(f)$ чрез $D_\beta f(x)$. В сила е неравенството*

$$\inf_{z\in V\cap \mathbf{D}_\beta(f)} \langle D_\beta f(z), u-v\rangle \le f(u) - f(v) \le \sup_{z\in V\cap \mathbf{D}_\beta(f)} \langle D_\beta f(z), u-v\rangle, \tag{3.12}$$

където V е произволно отворено множество в X, което съдържа отсечката $[u, v]$ и

$$\partial f(x) = \bigcap_{s>0} \overline{co}^* \{D_\beta f(y) : y \in B(x, s)\}. \tag{3.13}$$

За да улесним изложението за полунепрекъсната отдолу функция $f : H \to R$, която удовлетворява условието за ръста (3.4) въвеждаме означението

Определение 3.3.2

$$\limsup_{\substack{\lambda\to 0\\ \frac{\mu}{\lambda}\to 0\\ z\to x}} ((f_\lambda)^\mu)'(z) := \{x^* \in H \ : \ x^* = w^* - \lim_{n\to\infty}((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(z_n),$$

$$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ \frac{\mu_n}{\lambda_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\}.$$

Основният резултат в този параграф позволява да се представи субдиференциала на Кларк на локално липшицова функция с подходящо условие за ръста, дефинирана в хилбертово пространство посредством производните на апроксимациите ѝ на Ласри и Лионс по следния начин:

Теорема 3.3.3 *Нека $f : H \to I\!R$ е локално липшицова функция, която удовлетворява условието за ръста* (3.4)*. Тогава*

$$\overline{co}^* \limsup_{\substack{\lambda\to 0\\ \frac{\mu}{\lambda}\to 0\\ z\to x}} ((f_\lambda)^\mu)'(z) = \partial f(x). \tag{3.14}$$

Доказателство: Да означим

$$A(x) = \limsup_{\substack{\lambda \to 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} \to 0 \\ z \to x}} ((f_\lambda)^\mu)'(z).$$

Тогава $\overline{co}^* A(x)$ е w^* затворено изпъкнало множество. Да предположим, че съществува $p \in \partial f(x)$, такова че $p \notin \overline{co}^* A(x)$. От Теоремата за отделимост на Хан–Банах съществуват $h \in S_H$ и $\delta > 0$, такива че

$$\langle p, h \rangle \geq \sup_{a \in A(x)} \langle a, h \rangle + \delta. \tag{3.15}$$

Да означим с L липшицовата константа на f в ограничената околност $U(x) \ni x$. От дефиницията на обобщената производна на Кларк съществуват редици $x'_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ t_n \downarrow 0$, такива че

$$f^0(x; h) = \limsup_{\substack{z \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(z + th) - f(z)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x'_n + t_n h) - f(x'_n)}{t_n}.$$

За всяко $n \in I\!N$, като отчетем факта, че функцията f е ограничена в $U(x)$ и направените в началото на параграфа забележки, можем да намерим $\lambda_n > 0$, толкова малко, че $\rho_{U(x)}(\lambda_n) = \sup_{z \in U(x)} \rho(z, f, \lambda_n, c) < t_n^2$.

От гъстотата на множествата G_{λ_n} имаме, че съществуват точки $y_n \in B(x'_n + t_n h, t_n^2) \cap G_{\lambda_n}$. Следователно, ако представим y_n във вида $y_n = x_n + t_n h$, то $\|x'_n - x_n\| \leq t_n^2$ и като използваме локалната липшицовост на f получаваме, че

$$f^0(x; h) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n + t_n h) - f(x_n)}{t_n}.$$

За достатъчно големи $n \in I\!N$ точките x_n и $x_n + t_n h$ попадат в $U(x)$. Тъй като $x_n + t_n h \in G_{\lambda_n}$ от Теорема 3.2.3 съществуват $y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)$, такива че

$$f_{\lambda_n}(x_n + t_n h) = f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)) + \frac{1}{2\lambda_n}\|x_n + t_n h - y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)\|^2,$$

$$(f_{\lambda_n})'(x_n + t_n h) \in \partial f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)),$$

$$\|x_n + t_n h - y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)\| \leq \rho(x_n + t_n h, f, \lambda_n, c) \leq \rho_{U(x)}(\lambda_n) < t_n^2.$$

Оттук получаваме, че

$$\begin{aligned} f^0(x; h) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)) - f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h) - t_n h)}{t_n} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{f_{\lambda_n}(x_n + t_n h) - f_{\lambda_n}(x_n)}{t_n}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Като използваме, че f_{λ_n} е липшицова функция върху ограничените множества, за всяко $n \in I\!N$ можем да намерим $\mu_n > 0$, такова че $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n} < \dfrac{1}{n}$ и

$\sigma_{U(x)}(\lambda_n,\mu_n) = \sup\limits_{z\in U(x)} \sigma(z,f_{\lambda_n},\mu_n,d_{\lambda_n}) < \min\left\{\frac{t_n^2}{2L_{\lambda_n}},\frac{1}{n}\right\}$, където с L_{λ_n} е означена липшицовата константа на f_{λ_n} върху $U(x)$. Тъй като $(f_{\lambda_n})^{\mu_n} \in C^{1,1}(H)$ от Теорема 3.2.3 получаваме, че съществуват $y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)$, такива че

$$(f_{\lambda_n})^{\mu_n}(x_n) = f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)) - \frac{1}{2\mu_n}\|x_n - y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)\|^2,$$

$$((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(x_n) \in \partial f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)),$$

$$\|x_n - y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)\| \le \sigma(x_n,f_{\lambda_n},\mu_n,d_{\lambda_n}) \le \sigma_{U(x)}(\lambda_n,\mu_n) < \min\{\frac{t_n^2}{2L_{\lambda_n}},\frac{1}{n}\}.$$

От избора на μ_n и липшицовата непрекъснатост на f_{λ_n} следва, че

$$\begin{aligned}
&f_{\lambda_n}(x_n+t_nh) - f_{\lambda_n}(x_n)\\
\le\ & f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)+t_nh) - f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)) + 2L_{\lambda_n}\|x_n - y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)\|\\
\le\ & f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)+t_nh) - f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)) + t_n^2\\
\le\ & (f_{\lambda_n})^{\mu_n}(x_n+t_nh) + \frac{1}{2\mu}\|x_n - y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)\|^2 - f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(x_n)) + t_n^2\\
=\ & (f_{\lambda_n})^{\mu_n}(x_n+t_nh) - (f_{\lambda_n})^{\mu_n}(x_n) + t_n^2\\
=\ & \langle((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(w_n), t_nh\rangle + t_n^2,
\end{aligned}$$

където $w_n \in (x_n, x_n+t_nh)$ от Теоремата за средните стойности.

От Теорема 3.2.3 имаме, че $((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(w_n) \in \partial f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(w_n))$, където $\|w_n - y_{\lambda_n\mu_n}(w_n)\| \le \sigma(w_n,f_{\lambda_n},\mu_n,d_{\lambda_n}) \le \sigma_{U(x)}(\lambda_n,\mu_n) < 1/n$. От Теоремата на Прайс – Теорема 3.3.1 следва, че $((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(w_n) \in \overline{co}^*\{(f_{\lambda_n})'(y) : y \in G_{\lambda_n} \cap B(y_{\lambda_n\mu_n}(w_n),s)\}$ за всяко $s>0$. Отново от Теорема 3.2.3, $(f_{\lambda_n})'(y) \in \partial f(y_{\lambda_n}(y))$, където $\|y - y_{\lambda_n}(y)\| \le \rho(y,f,\lambda_n,c)$. За големи $n \in I\!N$ и малки s, като се вземат предвид направените оценки и избора на λ_n и μ_n, имаме че $y_{\lambda_n}(y) \in U(x)$ и множеството $\partial f(y_{\lambda_n}(y))$ се съдържа в кълбото LB_H. Така показахме, че за достатъчно големи $n \in I\!N$ производните $((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(w_n)$ са ограничени по норма и следователно от тях можем да извлечем w^*–сходяща подредица, чиято граница е някое $a_0 \in A(x)$. Следователно, като използуваме (3.16), имаме че

$$\langle p,h\rangle \le f^0(x;h) \le \langle a_0,h\rangle.$$

Това е в противоречие с (3.15), следователно

$$\overline{co}^*A(x) \supset \partial f(x). \tag{3.17}$$

За да покажем обратното включване, да вземем произволно $q \in A(x)$, т.е. $q = w^*-\lim\limits_{n\to\infty}((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(z_n)$, където $z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x,\ \dfrac{\mu_n}{\lambda_n}\downarrow 0,\ \lambda_n \downarrow 0$. Да предположим, че $q \notin \partial f(x)$. От Теоремата за отделимост на Хан–Банах съществуват $h \in S_H,\ s>0$, такива че

$$\langle q,h\rangle \ge \sup_{p\in\partial f(x)} \langle p,h\rangle + s.$$

От полунепрекъснатостта отгоре на $\partial f : (H, \|\cdot\|) \to (H, w^*)$ съществува $\varepsilon > 0$, такова че за достатъчно малки λ_n, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$, както и z_n достатъчно близо до x

$$\langle ((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(z_n), h\rangle \geq \sup_{p\in\partial f(x)} \langle p, h\rangle + \frac{3s}{4} \geq \sup_{d\in D_\varepsilon(x)} \langle d, h\rangle + \frac{s}{2}, \tag{3.18}$$

където $D_\varepsilon(x) = \overline{co}^*\{d \in \partial f(z),\ z \in B(x,\varepsilon) \subset U(x)\}$. От Теорема 3.2.3 съществуват $y_{\lambda_n\mu_n}(z_n)$, такива че

$$((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(z_n) \in \partial f_{\lambda_n}(y_{\lambda_n\mu_n}(z_n)),$$

$$\|z_n - y_{\lambda_n\mu_n}(z_n)\| \leq \sigma(z_n, f_{\lambda_n}, \mu_n, d_{\lambda_n}).$$

Като използваме отново представянето на ∂f_{λ_n} от Теорема 3.3.1 следва, че $((f_{\lambda_n})^{\mu_n})'(z_n) \in \overline{co}^*\{(f_{\lambda_n})'(y) \ :\ y \in G_{\lambda_n} \cap B(y_{\lambda_n\mu_n}(z_n), s)\}$ за всяко $s > 0$. Отново от Теорема 3.2.3, $(f_{\lambda_n})'(y) \in \partial f(y_{\lambda_n}(y))$, където $\|y - y_{\lambda_n}(y)\| \leq \rho(y, f, \lambda_n, c)$. За малки s, като се вземат предвид направените оценки, имаме, че за достатъчно малки λ_n, $\dfrac{\mu_n}{\lambda_n}$ и z_n близки до x точките $y_{\lambda_n}(y) \in B(x,\varepsilon) \subset U(x)$ и множеството $\partial f(y_{\lambda_n}(y)) \subset D_\varepsilon(x)$. Така, че за големи $n \in I\!N$ и малки $s > 0$ получаваме противоречие с (3.18). Следователно $A(x) \subset \partial f(x)$ и тъй като $\partial f(x)$ е изпъкнало и w^* затворено множество,

$$\overline{co}^* A(x) \subset \partial f(x),$$

което заедно с (3.17) приключва доказателството. ■

Производните на Фреше на апроксимациите на Моро–Йосида на локално липшицова функция с подходящо условие за ръста, дефинирана в хилбертово пространство също могат да възстановят субдиференциала ѝ на Кларк, както ще покажем в теоремата по–долу. За такава функция дефинираме следното множество

Определение 3.3.4

$$\limsup_{\substack{G_\lambda \ni z \to x \\ \lambda \downarrow 0}} (f_\lambda)'(z) := \{x^* \in H \ :\ x^* = w^* - \lim_{n\to\infty} (f_{\lambda_n})'(z_n),$$

$$\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ z_n \in G_{\lambda_n},\ z_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\}.$$

Теорема 3.3.5 *Нека $f : H \to I\!R$ е локално липшицова функция, която удовлетворява условието за ръста* (3.4)*. Тогава*

$$\overline{co}^* \limsup_{\substack{G_\lambda \ni z \to x \\ \lambda \downarrow 0}} (f_\lambda)'(z) = \partial f(x). \tag{3.19}$$

Доказателство: Да означим

$$C(x) = \limsup_{\substack{G_\lambda \ni z \to x \\ \lambda \downarrow 0}} (f_\lambda)'(z).$$

Тогава $\overline{co}^* C(x)$ е w^* затворено изпъкнало множество. Да предположим, че съществува $p \in \partial f(x)$, такова че $p \notin \overline{co}^* C(x)$. Тогава от Теоремата на Хан-Банах за отделимост съществуват $h \in S_H$ и $\delta > 0$, такива че

$$\langle p, h \rangle \geq \sup_{c \in C(x)} \langle c, h \rangle + \delta. \tag{3.20}$$

Като следваме едно към едно доказателството на Теорема 3.3.3 до (3.16), имаме че, като използуваме неравенството (3.12) от Теоремата на Прайс,

$$\begin{aligned}
& f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h)) - f(y_{\lambda_n}(x_n + t_n h) - t_n h) \\
\leq \ & f_{\lambda_n}(x_n + t_n h) - f_{\lambda_n}(x_n) \\
\leq \ & \sup_{z \in V_n} \langle (f_{\lambda_n})'(z), t_n h \rangle \\
\leq \ & \langle (f_{\lambda_n})'(z_n), t_n h \rangle + \frac{\delta t_n}{2},
\end{aligned}$$

където $V_n = [x_n, \ x_n + t_n h] + \dfrac{1}{n} B_H^\circ$ и $z_n \in V_n$. От Теорема 3.2.3 $(f_{\lambda_n})'(z_n) \in \partial f(y_{\lambda_n}(z_n))$, където $\|z_n - y_{\lambda_n}(z_n)\| \leq \rho(z_n, f, \lambda_n, c) < t_n^2$ за достатъчно големи $n \in I\!N$. Следователно съществува $N \in I\!N$, такова че множеството от производните $\{(f_{\lambda_n})'(z_n)\}_{n \geq N}$ е ограничено по норма. Като извлечем, ако е необходимо, подредица от тях (за която запазваме означенията), получаваме че $(f_{\lambda_n})'(z_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c_0 \in C(x)$. Следователно от (3.16),

$$\langle p, h \rangle \leq f^0(x; h) \leq \langle c_0, h \rangle + \frac{\delta}{2},$$

което е в противоречие с (3.20) и следователно

$$\overline{co}^* C(x) \supset \partial f(x). \tag{3.21}$$

За да покажем обратното включване да вземем произволно $q \in C(x)$, т.е. $q = w^* - \lim\limits_{n \to \infty} (f_{\lambda_n})'(z_n)$, където $G_{\lambda_n} \ni z_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} x, \ \lambda_n \downarrow 0$. Да предположим, че $q \notin \partial f(x)$. От Теоремата за отделимост на Хан–Банах съществуват $h \in S_H, \ s > 0$, такива че

$$\langle q, h \rangle \geq \sup_{p \in \partial f(x)} \langle p, h \rangle + s.$$

От полунепрекъснатостта отгоре на изображението $\partial f : (H, \|\cdot\|) \to (H, w^*)$ имаме, че съществува $\varepsilon > 0$, такова че за достатъчно малки $\lambda_n > 0$ и z_n близки до x

$$\langle (f_{\lambda_n})'(z_n), h \rangle \geq \sup_{p \in \partial f(x)} \langle p, h \rangle + \frac{3s}{4} \geq \sup_{d \in D_\varepsilon(x)} \langle d, h \rangle + \frac{s}{2}, \tag{3.22}$$

където $D_\varepsilon(x)$ е множеството, дефинирано чрез (3.18). От Теорема 3.2.3 имаме, че съществуват $y_{\lambda_n}(z_n)$, такива че

$$(f_{\lambda_n})'(z_n) \in \partial f(y_{\lambda_n}(z_n)),$$

$$\|z_n - y_{\lambda_n}(z_n)\| \leq \rho(z_n, f, \lambda_n, c).$$

Ясно е, че за достатъчно малки $\lambda_n > 0$ и z_n близки до x точките $y_{\lambda_n}(z_n) \in B(x,\varepsilon) \subset U(x)$ и $(f_{\lambda_n})'(z_n) \in D_\varepsilon(x)$. Следователно за големи $n \in I\!N$ получаваме противоречие с (3.22), откъдето $C(x) \subset \partial f(x)$ и тъй като $\partial f(x)$ е изпъкнало и w^* затворено множество

$$\overline{co}^* C(x) \subset \partial f(x),$$

което заедно с (3.21) завършва доказателството. ■

Да отбележим, че представените доказателства на последните два резултата за представимост на субдиференциала на Кларк са в сила и за липшицова функция, дефинирана в хилбертово пространство. Отношения на субдиференциалите на апроксимациите на Ласри и Лионс на липшицова функция, дефинирана в банахово пространство към субдиференциала ѝ на Кларк са разглеждани от Беноа в [11], където е показано включване в едната посока и в [12], където разглежданията са в крайномерно пространство.

3.4 Генерична диференцируемост по Гато

В този параграф, като използваме идеята на вариационните принципи, показваме че всяка непрекъсната и диференцируема по посока функция, дефинирана в банахово пространство X с липшицова и равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция, е генерично диференцируема по Гато.

Да припомним, че функцията $b : X \to I\!R$, дефинирана в произволно банахово пространство X се нарича *камбановидна функция*, ако съществува ограничено подмножество $\operatorname{supp} b \subset X$, такова че $b(x) = 0$ за всяко $x \notin \operatorname{supp} b$. В следващото твърдение даваме локализация на точка на δ минимум на собствена ограничена отдолу функция, която използваме съществено в по–нататъшните ни разглеждания.

Твърдение 3.4.1 *Нека $b : X \to I\!R$ е камбановидна функция, дефинирана в банахово пространство X и такава че $\operatorname{supp} b \subset B(0,1)$, $b(0) = 1$ и $0 \leq b(x) \leq 1$, $\forall x \in X$. Нека $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ е собствена, ограничена отдолу функция. Нека са дадени $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Да предположим, че $y_0 \in X$ удовлетворява условието*

$$f(y_0) \; < \; \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon.$$

Тогава за всяко $\delta > 0$ съществува точка $x_0 \in X$, такава че:

(a) $\quad f(x_0) - \varepsilon b(\frac{x_0 - y_0}{\lambda}) < \inf_{x \in X}\{f(x) - \varepsilon b(\frac{x - y_0}{\lambda})\} + \delta;$

(b) $\quad \frac{x_0 - y_0}{\lambda} \in \operatorname{supp} b;$

(c) $\quad \|x_0 - y_0\| < \lambda.$

Доказателство: Да дефинираме функцията

$$h(x) = f(x) - \varepsilon b\big(\frac{x - y_0}{\lambda}\big).$$

Тогава

$$h(y_0) = f(y_0) - \varepsilon \ < \ \inf_{x \in X} f(x).$$

Нека

$$\delta_1 = \inf_{x \in X} f(x) - h(y_0).$$

Съществува точка $x_0 \in X$, такава че

$$h(x_0) < \inf_{x \in X} h(x) + \min\{\delta, \delta_1\},$$

откъдето имаме (a). Да предположим, че $\frac{x_0 - y_0}{\lambda} \notin \operatorname{supp} b$. Като използуваме, че $b(\frac{x_0 - y_0}{\lambda}) = 0$ получаваме, че

$$\delta_1 > h(x_0) - h(y_0) = f(x_0) - \inf_{x \in X} f + \delta_1 \geq \delta_1,$$

което е противоречие, откъдето (b) е изпълнено. Ясно е, че (c) е непосредствено следствие от (b). ■

Чрез модифициране на изложеното доказателство може да се направи и локализация на точката на минимум на смутената функция във вариационния принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер [28]. Липсата на такава локализация до момента е отбелязана от Йофе и Тихомиров в статията им [3] като недостатък на този вариационен принцип. По–долу привеждаме модифицираното доказателство в Твърдение 3.4.1 bis.

Нека $(X, \|\cdot\|)$ е банахово пространство. Да означим с Y банаховото пространство от всички ограничени липшицови функции, дефинирани в X, снабдено с нормата

$$\|f\|_Y = \sup\{|\ f(x)\ |: \ x \in X\} + \sup\left\{\frac{f(x) - f(y)}{\|x - y\|} \ : \ x \neq y\right\}.$$

Да означим с L_f липшицовата константа на функцията $f \in Y$.

Предположенията на Теорема II 1 в [28] за пространството Y са в сила.

Твърдение 3.4.1 bis *Нека* $b \in Y$ *е камбановидна функция, такава че* $\operatorname{supp} b \in B[0,1]$, $b(0) = 1$ *и* $0 \leq b(x) \leq 1$, $\forall x \in X$. *Нека* $f : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ *е полунепрекъсната отдолу, ограничена отдолу функция и е такава, че* $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$.

Нека са дадени $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Да предположим, че $y_0 \in X$ удовлетворява условието

$$f(y_0) \ < \ \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon.$$

Тогава съществува функция $g \in Y$ и точка $x_0 \in X$, такива че

(a) *Функцията $f + g$ има строг минимум върху пространството X в точката x_0;*

(b) $\|g\|_\infty < \varepsilon$;

(c) $L_g < \dfrac{\varepsilon}{\lambda} L_b$;

(d) $\dfrac{x_0 - y_0}{\lambda} \in \operatorname{supp} b$;

(e) $\|x_0 - y_0\| < \lambda$.

Доказателство: Нека $\varepsilon' < \varepsilon$ е такова, че

$$f(y_0) < \inf_{x\in X} f(x) + \varepsilon'.$$

Да въведем функцията

$$h(x) = f(x) - \varepsilon' b\Big(\frac{x - y_0}{\lambda}\Big).$$

Тогава

$$h(y_0) = f(y_0) - \varepsilon' \ < \ \inf_{x\in X} f(x).$$

Нека

$$\delta = \inf_{x\in X} f(x) - h(y_0).$$

От вариационния принцип на Дьовил, Годфроа и Зизлер [28] имаме, че съществуват функция $k \in Y$ и точка $x_0 \in X$, такива че

(i) $\|k\|_Y \ < \ \min\{\dfrac{\delta}{2},\ \varepsilon - \varepsilon',\ \dfrac{\varepsilon - \varepsilon'}{\lambda} L_b\}$;

(ii) $h + k$ има строг минимум в точката x_0.

Да предположим, че $\dfrac{x_0 - y_0}{\lambda} \notin \operatorname{supp} b$. Тогава

$$2\|k\|_Y \geq k(y_0) - k(x_0) \geq h(x_0) - h(y_0) = f(x_0) - \inf_X f + \delta \geq \delta,$$

което е в противоречие с (i) и следователно (d) е в сила, а е очевидно, че (e) следва непосредствено от (d).

Да дефинираме функцията

$$g(x) = -\varepsilon' b\Big(\frac{x - y_0}{\lambda}\Big) + k(x).$$

Тогава

$$\|g\|_\infty \leq \varepsilon' + \|k\|_\infty < \varepsilon' + (\varepsilon - \varepsilon') = \varepsilon,$$

което е (b). Също така, имаме че

$$| g(x) - g(y) | \leq \frac{\varepsilon' L_b}{\lambda} \|x - y\| + L_k \|x - y\| < \frac{\varepsilon}{\lambda} L_b \|x - y\|,$$

което доказва (c).

Заключението (a) е в сила, тъй като $f + g = h + k$. ■

Да предположим, че камбановидната функция $b : X \to I\!R$ е *равномерно диференцируема по Гато*. Това означава, че

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{b(x + th) - b(x)}{t} = \langle b'(x), h \rangle,$$

където с $b'(x) \in X^*$ е означена производната по Гато на функцията b в точката x и за всяко $h \in S_X$ тази граница е равномерна по отношение на $x \in X$.

Да припомним, че функцията $f : X \to I\!R$ се нарича *диференцируема по посока в точката* x_0, ако за всяко $h \in S_X$ производната по посока

$$f'(x_0; h) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$$

съществува и е крайна.

В доказателството на основния за този параграф резултат ще използваме и следното твърдение, доказано от Живков.

Твърдение 3.4.2 ([80], Твърдение 2.1) *Нека X, Y са банахови пространства и $D \subset X$ е отворено множество. Нека $F : D \to Y$ е непрекъснато изображение и нека съществуват отворено непразно множество $U \subseteq X$ и гъсто и G_δ множество $\Gamma \subseteq D \times U$, такива че*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{\|F(x + th) - F(x)\|}{t} < +\infty, \quad \forall (x, h) \in \Gamma.$$

Тогава F е локално липшицово в отворено и гъсто подмножество на D.

Резултати от тип генеричност на диференцируемост по Гато са получени от Кендеров за непрекъснати функции, дефинирани в сепарабелно банахово пространство в [49]. Те са продължени в различни посоки от Латек, Ло и Вейл в [52], Фабиан в [33], Лебург в [53] и др., но в техните работи предположението за сепарабелност на пространството се използва съществено. Продължението, направено от Живков в [80] е за по–широк клас банахови пространства. Подобен род въпроси се разглеждат и от Фабиан и Прайс в [34]. Формулираната по–долу теорема разширява основния резултат на Георгиев, получен в [35] за пространство с равномерно диференцируема по Гато норма.

Теорема 3.4.3 *Нека банаховото пространство X притежава липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция $\tilde{b} : X \to I\!R$. Тогава всяка непрекъсната функция f, дефинирана в отворено множество $D \subset X$, която е диференцируема по посока в гъсто и G_δ подмножество G на D, е диференцируема по Гато в гъсто и G_δ подмножество на D.*

Доказателство: От Твърдение 3.4.2 следва, че f е локално липшицова в гъсто и отворено подмножество D_1 на D. Нека $U \subset D_1$ е отворено подмножество, такова че f е липшицова в U. Ако докажем, че f е диференцируема по Гато в гъсто и G_δ подмножество на U, теоремата ще е доказана, като се вземе предвид принципът за локализиране (вж. [50], Глава I, Параграф 10, V). Той твърди, че подмножество P на топологично пространство е от първа категория на Бер, ако за всяка точка $p \in P$ съществува отворено множество $Q \ni p$, такова че $P \cap Q$ е от първа категория на Бер в Q.

Без ограничение на общността предполагаме, че $\tilde{b}(0) \neq 0$. Дефинираме камбановидната функция $b : X \to I\!R$ като

$$b(x) := \tau(\tilde{b}(dx)),$$

където $d = \sup\limits_{s \in \operatorname{supp} \tilde{b}} \|s\|$, $\tau : I\!R \to I\!R^+$ е диференцируема камбановидна функция с липшицова производна, такава че $\tau(\tilde{b}(0)) = \max\limits_{t \in I\!R} \tau(t) = 1, \quad 0 \notin \operatorname{supp} \tau$. Тогава b е липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция, такава че $\operatorname{supp} b \subset B(0,1), \quad b(0) = 1, \quad 0 \leq b(x) \leq 1 \ \ \forall x \in X$.

Дефинираме множествата

$$X_n := \Big\{ x \in U \ : \ \exists x_n \in X, \ \exists t_n \in (0, \frac{1}{n^2}) \ : \ \frac{x - x_n}{\sqrt{t_n}} \in \operatorname{supp} b, \ B[x_n, 2\sqrt{t_n}] \subset U,$$
$$f(x) - 2\sqrt{t_n} b\big(\frac{x - x_n}{\sqrt{t_n}}\big) \ < \ \inf_{z \in B[x_n, 2\sqrt{t_n}]} \big\{ f(z) - 2\sqrt{t_n} b\big(\frac{z - x_n}{\sqrt{t_n}}\big) \big\} + t_n^2 \ \Big\}.$$

Тъй като f и b са непрекъснати функции, множествата X_n са отворени. Ще докажем, че X_n са гъсти в U.

Нека $x^* \in U$ и $\varepsilon_0 > 0$ са фиксирани. За всяко $n \geq 1$ избираме $\varepsilon \in (0, \ \min\{\varepsilon_0, \frac{1}{n}\})$ по такъв начин, че $B[x^*, \varepsilon] \subset U$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че липшицовата константа L на f в U е по-малка от 1. Тогава

$$f(x^*) \leq \inf_{z \in B[x^*, \varepsilon]} \{ f(z) + L\|x^* - z\| \} \ < \ \inf_{z \in B[x^*, \varepsilon]} f(z) + \varepsilon$$

и можем да приложим Твърдение 3.4.1 за $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}, \ \delta = \frac{\varepsilon^4}{16}$ и полунепрекъснатата отдолу и ограничена отдолу функция f_0, дефинирана като

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B[x^*, \varepsilon], \\ +\infty, & x \notin B[x^*, \varepsilon]. \end{cases}$$

Следователно съществува точка $y_n \in X$, такава че

$$f(y_n) - \varepsilon b\big(2\frac{y_n - x^*}{\varepsilon}\big) < \inf_{z\in B[x^*,\varepsilon]}\{f(z) - \varepsilon b\big(2\frac{z-x^*}{\varepsilon}\big)\} + \frac{\varepsilon^4}{2^4};$$

$$\|y_n - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$2(y_n - x^*)/\varepsilon \in \operatorname{supp} b.$$

Тогава за $t_n = \frac{\varepsilon^2}{4}$, $x_n = x^*$ имаме, че $y_n \in X_n$ и $y_n \in B[x^*, \varepsilon_0]$ и гъстотата на множествата X_n е установена.

Ясно е, че по същия начин можем да конструираме гъсти и отворени множества X'_n, съответстващи на функцията $(-f)$. От теоремата на Бер за категориите множеството $X_0 = (\cap_{n=1}^\infty X_n)\bigcap(\cap_{n=1}^\infty X'_n)\bigcap G$ е гъсто и G_δ в U.

Ще покажем, че f е диференцируема по Гато в точките на X_0.

Нека $x_0 \in X_0$. От равномерната диференцируемост на камбановидната функция b, за всеки $\varepsilon > 0$ и $h \in S_X$ съществува $\delta \in (0, \varepsilon)$, такова че

$$\frac{b(x+th) - b(x)}{t} - \langle b'(x), h\rangle \ > \ -\frac{\varepsilon}{2}$$

за всяко $x \in X$ и всяко $t \in (0, \delta)$.

За всяко $\varepsilon > 0$ и такова δ, за $n > \frac{1}{\delta}$ и $h \in S_X$, тъй като

$$\|x_0 + t_n h - x_n\| \le \|x_0 - x_n\| + t_n \ < \ \sqrt{t_n} + \sqrt{t_n} = 2\sqrt{t_n},$$

имаме, че $x_0 + t_n h \in B[x_n, 2\sqrt{t_n}] \subset U$. Тогава

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + t_n h) - f(x_0)}{t_n} \ &\ge \ \frac{2\sqrt{t_n}}{t_n}\Big(b\big(\frac{x_0 + t_n h - x_n}{\sqrt{t_n}}\big) - b\big(\frac{x_0 - x_n}{\sqrt{t_n}}\big)\Big) - t_n \\
&\ge \ 2\Big(\langle b'\big(\frac{x_0 - x_n}{\sqrt{t_n}}\big), h\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\Big) - t_n \\
&\ge \ \langle 2b'\big(\frac{x_0 - x_n}{\sqrt{t_n}}\big), h\rangle - \varepsilon - t_n.
\end{aligned}$$

Тъй като b е липшицова функция, $\{\|b'\big(\frac{x_0-x_n}{\sqrt{t_n}}\big)\|\}_{n\ge1}$ е ограничена редица и можем да изберем w^*–сходяща обобщена подредица от редицата $\{b'\big(\frac{x_0-x_n}{\sqrt{t_n}}\big)\}_{n\ge1}$, чиято w^*–граница означаваме с $\dfrac{b_1^*}{2}$.

След граничен преход получаваме

$$f'(x_0; h) \ge \langle b_1^*, h\rangle - \varepsilon$$

и тъй като това неравенство е в сила за всяко $\varepsilon > 0$ и $h \in S_X$ имаме, че

$$f'(x_0; h) \ge \langle b_1^*, h\rangle, \quad \forall h \in X.$$

Като повторим разглежданията за функцията $(-f)$ получаваме, че във всяка точка x_0 на гъстото и G_δ подмножество X_0 на U е изпълнено: съществуват $b_1^*,\ b_2^* \in X^*$, такива че

$$\langle b_2^*, h\rangle \geq f'(x_0;h) \geq \langle b_1^*, h\rangle, \quad \forall h \in X.$$

Следователно $b_1^* = b_2^* = f'(x_0)$ и доказателството е завършено. ■

Да припомним, че банаховото пространство X се нарича *слабо асплундово*, ако множеството от точки на диференцируемост по Гато на произволна изпъкнала функция, дефинирана в X съдържа гъсто и G_δ множество (вж. [61] или [27]). Тъй като изпъкналите функции са диференцируеми по посока във вътрешността на дефиниционната си област (вж. например [61]) от доказаната по–горе теорема непосредствено следва, че банаховите пространства с липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция са слабо асплундови.

Ще покажем, че банахово пространство с *равномерно диференцируема по Гато норма* т.е., такава че за всяко $h \in S_X$ границата

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\|y - th\| - 1}{t} = \langle \|y\|', h\rangle$$

е равномерна по $y \in S_X$ (вж. [27]), притежава липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция.

Лема 3.4.4 *Нека банаховото пространство X има равномерно диференцируема по Гато норма. Тогава X притежава и липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция.*

Доказателство: Нека $\|.\|$ е равномерно диференцируема по Гато норма в X и нека $r : I\!\!R \to I\!\!R$ е ограничена функция с липшицова производна, такава че $r = 0$ върху $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ и $r(2) \neq 0$. Да означим с $L_{r'}$ липшицовата константа на функцията r' и $\mid r' \mid := \sup\limits_{t\in[1,3]} \mid r'(t) \mid$. Тогава функцията

$$b(x) := r(\|x\|)$$

е липшицова и равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция. Наистина, нека $h \in S_X$, $\varepsilon > 0$ са фиксирани и $0 < \gamma < \dfrac{\varepsilon}{2 \mid r' \mid}$. От равномерната диференцируемост на нормата съществува $t_0 < \dfrac{\varepsilon}{L_{r'}}$, такова че за всяко $0 < t < t_0$ и $y \in S_X$

$$\frac{\|y + th\| - 1}{t} - \langle \|y\|', h\rangle < \ \gamma.$$

От дефиницията на функцията r е ясно, че е достатъчно да ограничим нашите разглеждания до $x \in X$, такива че $1 \leq \|x\| \leq 3$. Нека $t \in (0, \dfrac{t_0}{2})$. Като приложим последователно Теоремата за диференциране на съставна функция и Теоремата за средните стойности можем да намерим число $\alpha = \alpha(x,t)$, което е между $\|x\|$ и $\|x+th\|$ и да оценим

$$\Big|\frac{b(x+th)-b(x)}{t} - \langle b'(x), h\rangle\Big| =$$

$$\Big|\frac{r(\|x+th\|)-r(\|x\|)}{t} - r'(\|x\|)\langle\|x\|', h\rangle\Big| =$$

$$\Big|r'(\alpha)\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t} - r'(\|x\|)\langle\|x\|', h\rangle\Big| =$$

$$\Big|r'(\alpha)\big(\frac{\big\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{t}{\|x\|}h\big\|-1}{\frac{t}{\|x\|}} \pm \langle\|x\|', h\rangle\big) - r'(\|x\|)\langle\|x\|', h\rangle\Big| \leq$$

$$\mid r' \mid \gamma + L_{r'} \mid \alpha - \|x\| \mid \leq \mid r' \mid \gamma + \frac{t_0}{2}L_{r'} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Да отбележим, че тъй като всяко сепарабелно банахово пространство притежава равномерно диференцируема по Гато норма (вж. [27], Следствие 6.9 (i)), то Теорема 3.4.3 е в сила в частност и за такива пространства.

Сега ще дадем някои приложения на доказания резултат.

Нека A е произволно непразно индексно множество и $\{g_\alpha : X \to R,\ \alpha \in A\}$ е фамилия от функции. Дефинираме функцията $f : X \to I\!R$ като $f(x) = \inf\limits_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$.

Нуждаем се от следната

Лема 3.4.5 *Нека фамилията $\{g_\alpha : X \to I\!R,\ \alpha \in A\}$ е такава, че*

(i) *за всяко $\alpha \in A$, функцията g_α е K–липшицова;*

(ii) *за всеки $x \in X,\ h \in S_X$, съществува $\varepsilon > 0$, такова че границата*

$$g'_\alpha(x;h) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{g_\alpha(x+th)-g_\alpha(x)}{t}$$

съществува и е равномерна по отношение на $\alpha \in M_\varepsilon(x)$, където

$$M_\varepsilon(x) := \{\alpha \in A\ :\ g_\alpha(x) \leq f(x) + \varepsilon\}.$$

Тогава функцията $f(x) = \inf\limits_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$ е K–липшицова, диференцируема по всяка посока $h \in X$ и $f'(x;h) = \sup\limits_{\varepsilon>0}\inf\limits_{\alpha\in M_\varepsilon(x)} g'_\alpha(x;h)$.

Доказателство: Нека като начало да отбележим, че

$$\forall x_0 \in X,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \text{ такова, че } M_\delta(x) \subset M_\varepsilon(x_0),\ \forall x \in B(x_0,\delta). \qquad (3.23)$$

Наистина от (i) имаме, че $|\ g_\alpha(x) - g_\alpha(x_0)\ | \le K\|x - x_0\|$, за всяко $\alpha \in A$ и $|f(x) - f(x_0)| \le K\|x - x_0\|$. Тогава за $\delta = \min\{\varepsilon/4K, \varepsilon/2\}, x \in B(x_0;\delta)$ и $\alpha \in M_\delta(x)$ имаме, че

$$\begin{aligned} g_\alpha(x_0) &\le g_\alpha(x) + K\|x - x_0\| \\ &\le f(x) + \delta + K\|x - x_0\| \\ &\le f(x_0) + \delta + 2K\|x - x_0\| \\ &\le f(x_0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

което означава, че $\alpha \in M_\varepsilon(x_0)$ и (3.23) е доказано.

Нека $x \in X$ е фиксирано. Достатъчно е да разгледаме само случая, когато $h \in S_X$. Означаваме $a := \sup\limits_{\varepsilon > 0} \inf\limits_{\alpha \in M_\varepsilon(x)} g'_\alpha(x;h)$. От (ii) за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват $\varepsilon_0 > 0$ и $t_0 = t_0(\varepsilon)$, такива че

$$\left| \frac{g_\alpha(x + th) - g_\alpha(x)}{t} - g'_\alpha(x;h) \right| \ < \ \varepsilon/3$$

за всяко $\alpha \in M_{\varepsilon_0}(x)$ и $t \in (0, t_0)$.

Нека $t_1 \in (0, t_0)$ и $0 < \varepsilon_1 < \min\{t_1\varepsilon/3, \varepsilon_0\}$. Съществува $\alpha_1 \in M_{\varepsilon_1}(x)$, такова че

$$\inf_{\alpha \in M_{\varepsilon_1}(x)} g'_\alpha(x;h) \ > g'_{\alpha_1}(x;h) - \varepsilon/3.$$

Тъй като $\varepsilon_1 \ < \ \varepsilon_0$ имаме, че $M_{\varepsilon_1}(x) \subset M_{\varepsilon_0}(x)$ и:

$$\begin{aligned} \frac{f(x + t_1 h) - f(x)}{t_1} &\le \frac{g_{\alpha_1}(x + t_1 h) - g_{\alpha_1}(x) - \varepsilon_1}{t_1} \\ &< g'_{\alpha_1}(x;h) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon_1}{t_1} \\ &< \inf_{\alpha \in M_{\varepsilon_1}(x)} g'_\alpha(x;h) + \varepsilon \\ &\le a + \varepsilon. \end{aligned}$$

Следователно

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \le \ a + \varepsilon$$

и тъй като $\varepsilon > 0$ е произволно малко,

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \ \le \ a.$$

За да покажем обратното неравенство нека вземем $\varepsilon_3 \ > \ 0$, такова че $\inf\limits_{\alpha \in M_{\varepsilon_3(x)}} g'_\alpha(x;h) > a - \varepsilon/3$. От (3.23) съществува $\delta > 0$, такова че $M_\delta(x') \subset M_{\varepsilon_3}(x)$, когато $\|\ x' - x\ \| < \delta$. Нека $0 \ < \ t_2 \ < \ \min\{t_0, \delta\}$, $0 \ < \ \varepsilon_2 \ < \ \min\{t_2\varepsilon/3, \varepsilon_0, \delta\}$ и

$\alpha_2 \in M_{\varepsilon_2}(x+t_2h)$. Тогава $M_{\varepsilon_2}(x+t_2h) \subset M_\delta(x+t_2h) \subset M_{\varepsilon_3}(x)$ и можем да оценим

$$\begin{aligned}\frac{f(x+t_2h)-f(x)}{t_2} &\geq \frac{g_{\alpha_2}(x+t_2h)-g_{\alpha_2}(x)-\varepsilon_2}{t_2}\\ &\geq g'_{\alpha_2}(x;h)-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{\varepsilon_2}{t_2}\\ &> \inf_{\alpha\in M_{\varepsilon_2}(x+t_2h)} g'_\alpha(x;h)-2\frac{\varepsilon}{3}\\ &\geq \inf_{\alpha\in M_{\varepsilon_3}(x)} g'_\alpha(x;h)\ -2\frac{\varepsilon}{3}\\ &> a-\varepsilon.\end{aligned}$$

Следователно $\liminf\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t} \geq a-\varepsilon$ и тъй като $\varepsilon>0$ е произволно малко, $\liminf\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t} \geq a$ и доказателството е завършено. ■

Ще приложим получените резултати за изследване на диференциалните свойства на функцията разстояние.

Да напомним че, ако A е непразно подмножество на X, то *функцията разстояние до* A се дефинира като $dist(x,A) := \inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$. За нея е в сила следното твърдение, което е непосредствено следствие от Лема 3.4.5.

Твърдение 3.4.6 *Нека нормата в банаховото пространство X е такава, че за всеки $h\in S_X$ и $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$, такова че*

$$\frac{\|x+th\|-1}{t} < \|.\|'(x;h)+\varepsilon, \quad \forall x\in S_X,\ \forall t\in(0,\delta).$$

Тогава за всяко непразно затворено множество $A\subset X$ функцията разстояние $dist(.,A)$ е диференцируема по посока в $X\setminus A$.

Следващата теорема е директно следствие от Теорема 3.4.3 и Лема 3.4.5 и може да се разглежда като обобщение на "Гато" версията на Теоремата на Екеланд и Лебург [32] (вж. също [79], където е анонсиран друг вариант на резултата).

Теорема 3.4.7 *Ако банаховото пространство X притежава липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция, то функцията $f(x)=\inf\limits_{\alpha\in A} g_\alpha(x)$, където за фамилията от функции $\{g_\alpha : X\to I\!R,\ \alpha\in A\}$ са в сила предположенията* (i) *и* (ii) *от Лема* 3.4.5, *е диференцируема по Гато в гъсто и G_δ подмножество на X.*

Да припомним, че от равномерно диференцируема по Гато норма можем да конструираме равномерно диференцируема по Гато липшицова камбановидна функция (вж. Лема 3.4.4), откъдето получаваме следното твърдение, анонсирано от Зайчек в [79]:

Следствие 3.4.8 *В банахово пространство X с равномерно диференцируема по Гато норма функцията разстояние е диференцируема по Гато в гъсто и G_δ подмножество на X.*

През 1963 година Стечкин в [70] изказва хипотезата, че *метрическата проекция*, която е многозначно изображение $P : X \to A$, $Px = \{y \in A : \|x - y\| = \inf_{z\in A} \|x - z\|\}$, породено от произволно непразно подмножество A на строго изпъкнало банахово пространство X е *немногозначна* в точките на гъсто и G_δ подмножество $\Gamma \subset X$, т.е. или Px е празно, или Px е едноелементно множество за $x \in \Gamma$. Да напомним, че банаховото пространство X се нарича *строго изпъкнало*, ако единичната му сфера няма линейни сегменти, или което е еквивалентно, от $x,\ y \in S_X$ и $x \neq y$ следва, че $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|$, когато $\lambda \in (0, 1)$ (вж. [61]).

В работата си [80] Живков намира широк клас строго изпъкнали банахови пространства, който включва в себе си различните класове, за които Стечкин, Зайчек, Конягин и Лау доказват тази хипотеза. Банаховото пространство X принадлежи на този клас, или *притежава свойството* $(\wedge)$, ако за всяка локално липшицова функция f, дефинирана в отворено подмножество D на X субдиференциалът ѝ

$$\delta f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, h\rangle \le \limsup_{t\downarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},\ \forall h \in X\}$$

е непразен в гъсто и G_δ подмножество на D (вж. [80]).

Формулировката на доказания от Живков резултат е следната

Теорема 3.4.9 ([80], Теорема 6.1) *Нека X е строго изпъкнало банахово пространство, което притежава свойството $(\wedge)$ (в частност слабо компактно генерирано или пространство с диференцируема по Фреше камбановидна функция). Да предположим, че A е непразно подмножество на X и P е породената от него метрическа проекция. Тогава P е немногозначна в гъсто и G_δ подмножество на X.*

Фактът, че банахово пространство с липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция притежава свойството $(\wedge)$ е част от доказателството на Теорема 3.4.3 и от Теорема 3.4.9 непосредствено получаваме следното

Следствие 3.4.10 *Ако X е строго изпъкнало банахово пространство с липшицова равномерно диференцируема по Гато камбановидна функция и A е непразно подмножество на X, то породената от него метрическа проекция е немногозначна в гъсто и G_δ подмножество на X.*

Библиография

[1] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров и С.В. Фомин, *Оптимальное управление*, Москва, Наука, (1979).

[2] Э.М. Галеев и В.М. Тихомиров, *Краткий курс теории екстремальных задач*, Издательство Мосовского Университета, (1989).

[3] А.Д. Иоффе и В.М. Тихомиров, Несколько замечаний о вариационны принципах, Матматические заметки, Российская Академия Наук, (1997), 305-311.

[4] Дж. Кели, *Обща топология*, Наука и Изкуство, София, (1971).

[5] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators*, Applicable Mathematics Series, Pitman London, (1984).

[6] H. Attouch and D. Aze, Approximation and regularization of arbitrary functions in Hilbert spaces by the Lasry-Lions method, Ann. Inst. Henry Poincaré, vol. 10, No 3 (1993), 289-312.

[7] H. Attouch and R.J.B. Wets, *Epigraphical analysis, analyse non linéare*, eds. H. Attouch, J,-P. Aubin, F.H. Clarke, I. Ekeland, 73-100, Gauthier-Villars Paris et C.R.M. Montreal (1989).

[8] J.-P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser-Verlag, Boston, (1990).

[9] A. Auslender, Stability in mathematical programming with nondifferentiable data; second order directional derivative for lower C^2 functions, (1981).

[10] D. Aussel, J.-N. Corvellec and M. Lassonde, Mean value theorem and subdifferential criteria for lower semicontinuous functions, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 347, No 10 (1995), 4147-4161.

[11] J. Benoist, Convergence de la dérivée de la régularisée Lasry-Lions, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 315, série I (1992), 941-944.

[12] J. Benoist, Approximation and regularisation of arbitrary sets in finite dimention, Set-Valued Analysis, 2 (1994), 95-115.

[13] A. Ben-Tal and J. Zowe, Necessary and sufficient optimality conditions for a class of nonsmooth minimization problems, Math. Programming, 24 (1982), 70-91.

[14] J.M. Borwein and J.R Giles, The proximal normal formula in Banach space, Trans. Amer. Math. Soc, vol. 302, No 1 (1987), 371-381.

[15] J. Borwein and W. Moors, Essentially smooth Lipschitz functions, preprint.

[16] J. Borwein and D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and differentiability of convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 303 (1987), 517-527.

[17] R. Bourgain, *Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nicodym property*, Lect. Notes Math., No 993, Springer (1983).

[18] H. Brezis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[19] J.P.R. Christensen, *Topology and Borel Structure*, North-Holland Mathematics Studies, No 10, Notas de Matematica (51), L. Nachbin (ed.), North-Holland, American Elservier, Amsterdam, London, New-York, (1974).

[20] J.P.R Christensen, On the sets of Haar measure zero in abelian Polish groups, Israel J. Math., 13 (1972), 255-260.

[21] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley and Sons, New York, (1983).

[22] R. Correa and A. Jofre, Tangentially continuous directional derivatives in nonsmooth analysis, J. Optim. Theory Appl., 61 (1989), 1-21.

[23] R. Correa and L. Thibault, Subdifferential analysis of bivariate separate regular functions, J. Math. Anal. Appl., 148 (1990), 157-174.

[24] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Characterization of lower semicontinuous convex functions, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 116, No 1 (1992), 67-72.

[25] R. Correa, A. Jofre and L. Thibault, Subdifferential monotonicity as characterization of convex functions, Numer. Funct. Anal. Optim., vol. 15, No 5-6 (1994), 531-535.

[26] M.G. Crandal and P.L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc., 277 (1983), 1-24.

[27] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and Renormings in Banach Spaces*, Longman, (1993).

[28] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, A smooth variational principle with applications to Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions, J. Funct. Anal., 111 (1993), 197-212.

[29] R. Deville and M. Ivanov, Smooth Variational Principle with Constraints, second order subdifferentials and regularity of functions on Banach spaces, preprint.

[30] A. Donchev and T. Zolezzi, *Well-Posed optimization problems*, Lecture Notes in Mathematics, No 1543, Springer, Berlin, (1993).

[31] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 1 (1979), 443-474.

[32] I. Ekeland and G. Lebourg, Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 224, No 2 (1976), 193-216.

[33] M. Fabian, Differentiability via one-sided directional derivatives, Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1982), 495-500.

[34] M. Fabian and D. Preiss, On intermediate differentiability of Lipschitz functions on certain spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 113 (1991), 733-740.

[35] P.G. Georgiev, The smooth variational principle and generic differentiability, Bull. Austral. Math. Soc., 43 (1991), 169-175.

[36] P.G. Georgiev and N.P. Zlateva, Second subdifferentials of $C^{1,1}$ functions: optimality conditions and well posedness, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci., vol. 46, No 11 (1993), 25-28.

[37] P.G. Georgiev and N.P. Zlateva, Second-order subdifferentials of $C^{1,1}$ functions and optimality conditions, Set-Valued Analysis, 4 (1996), 101-117.

[38] P.G. Georgiev and N.P. Zlateva, Generic Gateaux differentiability via smooth perturbations, to appear in Bull. Austr. Math. Soc., 56 (1997), 421-428.

[39] P.G. Georgiev and N.P. Zlateva, Lasry–Lions regularizations and reconstruction of subdifferentials, to appear in Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.

[40] J.B. Hiriart-Urruty, J.J. Strodiot and V.H. Nguyen, Generalized Hessian matrix and second-order optimality conditions for problems with $\mathrm{C}^{1,1}$ data, Appl. Math. Optim., 11 (1984), 43-56.

[41] J.B. Hiriart-Urruty, Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix, Math. Programming Study, 17 (1982), 1-12.

[42] R.B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Application*, Graduate Text in Mathematics, No 24, Springer-Verlag, New-York, (1975).

[43] A.D. Ioffe, On some recent developments in the theory of second order optimality conditions, in S.Dolecki (ed.), *Optimization*, Proc. 5th French-German Conf. Varetz / Fr 1988, Lect. Notes Math., No 1405, Springer-Verlag, Berlin, (1989), 55-68.

[44] A.D. Ioffe, Composite optimization: Second order conditions, value functions and sensitivity, in *Analysis and optimization on systems*, Proc. 9th Int. Conf., Antibes / Fr. 1990, Lecture Notes Control Inf. Sci., 144 (1990), 442-451.

[45] A.D. Ioffe, Approximate subdifferentials and applications, 2 and 3, Mathematica 33 (1986), 111-128; 36 (1989), 1-36.

[46] H. Ishii, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, Duke Math. J., 55 (1987), 369-384.

[47] M. Ivanov and N. Zlateva, Abstract subdifferential calculus and semiconvex functions, Serdica Math. J., 23 (1997), 35-58.

[48] A. Jofre and L. Thibault, Proximal and Frechet normal formulae for some small normal cones in Hilbert spaces, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 19 (1992), 599-612.

[49] P.S. Kenderov, The quasi-differentiable functionals are almost everywhere differentiable, Math. and Education in Math., 2 (1974), 123-126.

[50] K. Kuratowski ,*Topology* I, Academic Press, New York and London, (1966).

[51] J. Lasry and P. Lions, A remark on regularization in Hilbert spaces, Israel J. Math., 55 (1986), 257-266.

[52] K.-S. Law and C.E. Weil, Differentiability via directional derivatives, Proc. Amer. Math. Soc, 70 (1978), 11-17.

[53] G. Lebourg, Generic differentiability of Lipschitzian functions, Trans. Amer. Math. Soc., 256 (1979), 125-144.

[54] P. Michael and J.-P. Penot, Second order moderate derivatives, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 22 (1994), 809-823.

[55] Ph. Michel and M. Penot, A generalized derivative for calm and stable functions, Differential Integral Equations, 5 (1992), 189-196.

[56] W.B. Moors, A characterization of minimal subdifferential mappings of locally lipschitz functions, Set-Valued Analysis, vol. 3, No 2 (1995), 129-141.

[57] B.S. Mordukhovich, Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of nonsmooth extremal problems, Soviet Math. Dokl., 22 (1980), 526-530.

[58] J.-J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Lecture notes, Colége de France, Paris, (1967).

[59] W. Oettli and M. Thera, On $\Psi-$ monotonicity, Seminaire d'Analyse Convexe, Montpellier (1992), expose No 20.

[60] J.-P. Penot, Miscellaneous incidences of convergence theories in optimization and nonlinear analysis, Part II : applications in nonsmoooth analysis, Recent Advances in Nonsmooth Optimization, (1985), 288-320.

[61] R.R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Lecture Notes in Math., No 1364, Springer-Verlag, Berlin, 2nd ed., (1993).

[62] R. Poliquin, Subgradient monotonicity and convex functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 14 (1990), 305-317.

[63] R. Poliquin, Integration of subdifferentials of nonconvex functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 17 (1991), 358-398.

[64] D. Preiss, Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces, J. Func. Anal., 91 (1990), 312-345.

[65] D. Preiss, R.R. Phelps and I. Namioka, Smooth Banach spaces, weak Asplund spaces and monotone or usco mappings, Israel J. Math., vol. 72, No 3 (1990), 257-279.

[66] L. Qi, The maximal normal operator space and integration of subdifferentials of nonconvex functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 13 (1989), 1003-1012.

[67] R.T. Rockafellar, Favorable classes of Lipschitz-continuous functions in subgradient optimiation, Progress in Nondifferentiable Optimization, E. Nurminski (ed.), IIASA Collaborative Proceedings Series, International Institute of Applied Systems Analysis, Laxenburg, Australia, (1982), 125-144.

[68] R.T.Rockafellar, First- and second-order epi-differentiability in nonlinear programming, Trans. Amer. Math. Soc., 307 (1988), 75-108.

[69] R.T. Rockafellar, Generalized second derivatives of convex functions and saddle functions, Trans. Amer. Math. Soc., 322 (1990), 51-77.

[70] S.B. Stechkin, Approximative properties of Banach spaces subsets, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 8 (1963), 5-8.

[71] L. Thibault, A note on the Zagrodny's mean value theorem, Optimization, 35 (1995), 127-130.

[72] L. Thibault, On generalized differentials and subdifferentials of Lipschitz vector-valued functions, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 6 (1982), 1037-1053.

[73] L. Thibault and D. Zagrodny, Integration of lower semicontinuous functions on Banach spaces, Jurnal of Math. Anal. and Appl., 189 (1995), 33-58.

[74] J.S. Treiman, Shrinking generalized gradients, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 12 (1988), 1429-1449.

[75] X. Yang, Second-order conditions in $C^{1,1}$ optimization with applications, Numer. Funct. Anal. Optim., 14 (1993), 621-633.

[76] K. Yosida, *Functional analysis*, third edition, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, (1971).

[77] D. Yost, If every doughnut is a teacup, then every Banach space is a Hilbert space, Notas de Matematica, vol. 1, Seminar of functional analysis, (1987), 125-148.

[78] D. Zagrodny, Approximate mean value theorem for upper subderivatives, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl., 12 (1988), 1413-1428.

[79] L. Zajicek, A generalization of an Ekeland-Lebourg theorem and the differentiability of distance functions, Proc. 11-th Winter School on Abstract Analysis, Suppl. Rend. Circolo Mat. di Palermo, Ser. II, 3 (1984).

[80] N.V. Zhivkov, Generic Gateaux differentiability of directionally differentiable mappings, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 32 (1987), 179-188.