СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ „ТУРНИР НА ДЕКАНА НА ФМИ“

22 февруари 2009 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Зад. 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x}.$$

Решение. Уравнението има смисъл при $x \geq 1$ (и тогава и двете му страни са положителни). След двукратно повдигане на квадрат и очевидни преобразувания, достигаме до $3x^2 = 4$, $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Предвид $x \geq 1$, намираме единствения корен $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Зад. 2. Даден е триъгълник ABC със страна $AB = 19$ и медиани $AA_1 = 12$ ($A_1 \in BC$) и $BB_1 = \dfrac{39}{2}$ ($B_1 \in AC$). Да се пресметне лицето на триъгълника.

Решение. Нека G е медицентърът на $\triangle ABC$. Тогава $AG = \dfrac{2}{3}AA_1 = 8$, $BG = \dfrac{2}{3}BB_1 = 13$. По хероновата формула пресмятаме $S_{ABG} = 4\sqrt{105}$. Накрая имаме $S_{ABC} = 3S_{ABG} = 12\sqrt{105}$.

Зад. 3. Да се реши уравнението

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{3}{2}.$$

Решение. Последователно преобразуваме уравнението:

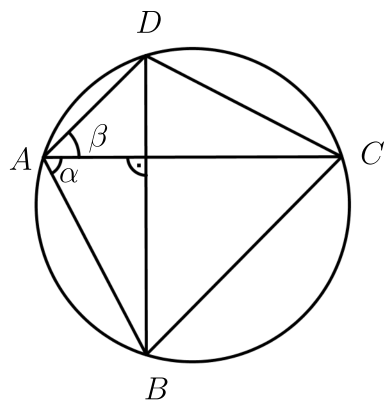
$$2\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 3, \qquad (2\sin^2 x - 1) + 2(1-\cos^2 2x) = 2,$$
$$-\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x = 2, \qquad \cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0.$$

От $\cos 2x = 0$ намираме $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ и получаваме решенията $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$). От $\cos 2x = -\dfrac{1}{2}$ намираме $2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ и получаваме решенията $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Зад. 4. В окръжност с радиус $R = 1$ е вписан четириъгълник $ABCD$ с взаимно перпендикулярни диагонали AC и BD. Да се пресметне сумата

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Решение. Да означим $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CAD = \beta$. От синусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ получаваме съответно $BC = 2\sin\alpha$, $AD = 2\sin\sphericalangle ABD = 2\sin(90^\circ - \alpha) = 2\cos\alpha$. Аналогично $CD = 2\sin\beta$, $AB = 2\cos\beta$. Сега $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\beta + 4\cos^2\beta = 8$.



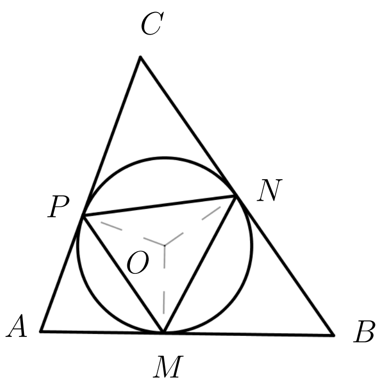
Зад. 5. Да се докаже, че ако x и y са неотрицателни реални числа и $x + y = 2$, то

$$2 \leq x^4 + y^4 \leq 16.$$

Решение. Повдигайки равенството $x + y = 2$ на квадрат, получаваме $x^2 + y^2 + 2xy = 4$ и (предвид $x^2 + y^2 \geq 2xy$) $2(x^2 + y^2) \geq 4$, $x^2 + y^2 \geq 2$. Освен това имаме $x^2 + y^2 = 4 - 2xy \leq 4$. Така $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$. Повдигаме тези неравенства на квадрат и получаваме $4 \leq x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq 16$. Сега, от една страна имаме $x^4 + y^4 \leq 16 - 2x^2y^2 \leq 16$. От друга страна (предвид $x^4 + y^4 \geq 2x^2y^2$) $4 \leq 2(x^4 + y^4)$, $2 \leq x^4 + y^4$. Така $2 \leq x^4 + y^4 \leq 16$. (Лявото равенство се достига при $x = y = 1$, а дясното — при $x = 0$, $y = 2$ или $x = 2$, $y = 0$.)

Зад. 6. Нека k е отношението на радиусите на вписаната и на описаната за триъгълника ABC окръжности и вписаната окръжност се допира до страните AB, BC и AC съответно в точките M, N и P. Да се намери отношението на лицата на триъгълниците MNP и ABC.

Решение. Нека r и R са съответно радиусите на вписаната и описаната за $\triangle ABC$ окръжности, O е центърът на вписаната окръжност и α, β, γ са ъглите на триъгълника. Като използваме формулата за лице на триъгълник по две страни и ъгъла между тях за триъгълниците OPM, ONP и OMN, а след това и синусовата теорема за $\triangle ABC$, последователно получаваме: $S_{MNP} = S_{OPM} + S_{ONP} + S_{OMN} = \dfrac{r^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \dfrac{r^2}{4R}(a+b+c) = \dfrac{2pr^2}{4R} = \dfrac{k}{2}S_{ABC}$.



Окончателно $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \dfrac{k}{2}$.

Зад. 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които системата

$$\left| \begin{array}{l} y = (x-a)^2 \\ x = (y-a)^2 \end{array} \right.$$

има единствено решение.

Решение. Нека системата има единствено решение (x, y). Очевидно (y, x) също е решение на системата и значи $x = y$. Замествайки $y = x$ в първото уравнение, получаваме, че x (както и y) е корен на квадратното уравнение $x^2 - (2a+1)x + a^2 = 0$. То трябва да има единствен корен и значи дискриминантата му $D = 4a + 1$ трябва да е равна на 0. Оттук получаваме $a = -\dfrac{1}{4}$.

Обратно, нека $a=-\dfrac{1}{4}$. От двете уравнения на системата последователно получаваме $y=\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+x\geq x$ и $x=\left(y+\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2+y\geq y$. Така $y\geq x\geq y$, така че в двете неравенства трябва да се достига равенство. Равенство се достига само при $x=y=\dfrac{1}{4}$. Така при $a=-\dfrac{1}{4}$ системата има единствено решение $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

Окончателно, търсената стойност на параметъра е $a=-\dfrac{1}{4}$.

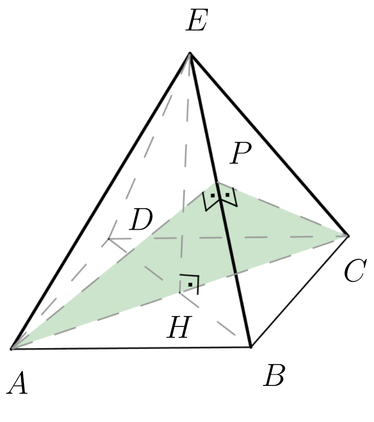
Зад. 8. Нека p и q са цели числа , такива че уравнението $x^2+px+q=0$ има реални корени x_1 и x_2. Да се докаже, че ако числата 1, x_1, x_2 в някакъв ред образуват геометрична прогресия, то q е трета степен на цяло число.

Решение. Нека x_1, 1, x_2 са последователни членове на геометрична прогресия. Тогава числото $q=x_1x_2=1$ е трета степен на числото 1. Нека сега 1, x_1, x_2 са последователни членове на геометрична прогресия (случаят x_1, x_2, 1 води до същите разсъждения). Тогава $x_1^2=1.x_2$ и $q=x_1x_2=x_1^3$.

Остава да докажем, че x_1 е цяло число. От формулите на Виет имаме $x_1+x_2=-p$ или $x_1^2+x_1=-p$ (1). Освен това x_1 е корен на даденото уравнение, т. е. $x_1^2+px_1+q=0$ или $x_1^2+px_1=-q$ (2). Като извадим равенството (1) от равенството (2), получаваме $x_1(p-1)=p-q$. Ако $p=1$, то $q=p=1$ и уравнението става $x^2+x+1=0$, но това уравнение няма реални корени. При $p\neq 1$ получаваме,че $x_1=\dfrac{p-q}{p-1}$ е рационално число. Тъй като $x_1^3=q$ е цяло число, то и x_1 е цяло число. (В този случай всички уравнения, удовлетворяващи условието на задачата са от вида $x^2-n(n+1)x+n^3=0$, където n е произволно цяло число.)

Зад. 9. Нека $ABCDE$ е четириъгълна пирамида, около която може да се опише сфера. Нека лицето на основата $ABCD$ е 8, а $\sphericalangle AEB=\sphericalangle BEC=\sphericalangle CED=\sphericalangle DEA=60^\circ$. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера, ако $AC\perp BE$ и $BD\perp AE$.

Решение. Нека $AP\perp BE$, $P\in BE$. По условие $AC\perp BE$ и тогава $(ACP)\perp BE$, откъдето и $CP\perp BE$. Тъй като $\measuredangle AEB=\measuredangle BEC=60^\circ$, триъгълниците APE и CPE са еднакви. Следователно $AE=CE$. От еднаквостта на тези триъгълници следва също, че $AP=CP$ и тогава $\triangle ABP\cong\triangle CBP$. Следователно $AB=BC$.



Аналогично получаваме $BE=DE$ и $AB=AD$.

По-нататък имаме $\triangle ABE\cong\triangle CDE$ ($AE=CE$, $BE=DE$, $\measuredangle AEB=\measuredangle CED=60^\circ$). Следователно $AB=CD$. Така $ABCD$ е ромб, около който може да се опише окръжност (защото около пирамидата може да се опише сфера), т. е. $ABCD$ е квадрат.

Нека H е ортогоналната проекция на върха E върху основата. От $AE=CE$ следва, че H лежи върху симетралата на диагонала AC, т. е. върху BD. Аналогично от $BE=DE$ следва, че H лежи върху AC и значи H е центърът на квадрата

$ABCD$. Следователно пирамидата $ABCDE$ е правилна и тъй като ъглите при върха E са равни на 60°, то всичките ръбове на пирамидата са равни помежду си. Освен това $\triangle AEC \cong \triangle ABC$ (по три страни) и значи $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ABC = 90^\circ$. Така точката H е обща среда на хипотенузите на правоъгълните триъгълници ACB, ACD и ACE. Тогава $HA = HB = HC = HD = HE$, т. е. H е центърът на описаната около пирамидата $ABCDE$ сфера. Търсеният радиус е $HA = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{S_{ABCD}}.\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{8}\sqrt{2}}{2} = 2$.

Зад. 10. Нека $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, и уравнението $f''(x) = 0$ има два различни реални корена. Ако x_0 е коренът на $f'''(x) = 0$ и точката A е с координати $(x_0, f(x_0))$, да се докаже, че допирателната в точката A към графиката на функцията $f(x)$ я пресича в още точно две точки B и C и да се намери отношението $AB : AC$.

Имаме $f'''(x) = 24ax + 6b$ и оттук $x_0 = -\dfrac{b}{4a}$. Уравнението на допирателната към графиката на $f(x)$ в точката A е $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0$ или (след опростяване)

$$g(x) = \left(\frac{b^3}{8a^2} - \frac{bc}{2a} + d\right)x + \frac{5b^4}{256a^3} - \frac{b^2c}{16a^2} + e = 0.$$

Интересуваме се от реалните корени на уравнението $f(x) = g(x)$, т. е. на $h(x) = f(x) - g(x) = 0$. Имаме

$$h(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + \left(\frac{bc}{2a} - \frac{b^3}{8a^2}\right)x + \frac{b^2c}{16a^2} - \frac{5b^4}{256a^3} =$$

$$\left(x + \frac{b}{4a}\right)^2 \left(ax^2 + \frac{b}{2}x + c - \frac{5b^2}{16a}\right).$$

Нека $h_1(x) = ax^2 + \dfrac{b}{2}x + c - \dfrac{5b^2}{16a}$. Трябва да докажем, че уравнението $h_1(x) = 0$ има два реални различни корена x_1, x_2 и $x_1 \neq -\dfrac{b}{4a}$, $x_2 \neq -\dfrac{b}{4a}$ (тогава x_1 и x_2 ще бъдат абсцисите на точките B и C). По условие квадратното уравнение $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c = 0$ има два различни реални корена. Следователно дискриминантата му $D = 12(3b^2 - 8ac)$ е положителна. Дискриминантата на квадратното уравнение $h_1(x) = 0$ е равна на $\dfrac{1}{2}(3b^2 - 8ac) = \dfrac{D}{24}$ и значи също е положителна. Така корените x_1, x_2 са реални и различни. Освен това $h_1\left(-\dfrac{b}{4a}\right) = \dfrac{8ac - 3b^2}{8a} = -\dfrac{D}{96a} \neq 0$. Това означава, че $x_1 \neq -\dfrac{b}{4a}$, $x_2 \neq -\dfrac{b}{4a}$.

Понеже $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{4a} = x_0$, то точката $A'(x_0, 0)$ е средата на отсечката с краища точките $B'(x_1, 0)$ и $C'(x_2, 0)$. Тъй като A', B', C' са проекциите съответно на A, B, C върху абсцисната ос, оттук следва, че A е средата на отсечката BC. Следователно търсеното отношение е $AB : AC = 1$.