

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ „ТУРНИР НА ДЕКАНА НА ФМИ“
22 февруари 2009 г.

Зад. 1. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x}.$$

Зад. 2. Даден е триъгълник ABC със страна $AB = 19$ и медиани $AA_1 = 12$ ($A_1 \in BC$) и $BB_1 = \frac{39}{2}$ ($B_1 \in AC$). Да се пресметне лицето на триъгълника.

Зад. 3. Да се реши уравнението

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \frac{3}{2}.$$

Зад. 4. В окръжност с радиус $R = 1$ е вписан четириъгълник $ABCD$ с взаимно перпендикулярни диагонали AC и BD . Да се пресметне сумата

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

Зад. 5. Да се докаже, че ако x и y са неотрицателни реални числа и $x + y = 2$, то

$$2 \leq x^4 + y^4 \leq 16.$$

Зад. 6. Нека k е отношението на радиусите на вписаната и описаната за триъгълника ABC окръжности и вписаната окръжност се допира до страните AB , BC и AC съответно в точките M , N и P . Да се намери отношението на лицата на триъгълниците MNP и ABC .

Зад. 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които системата

$$\begin{cases} y = (x - a)^2 \\ x = (y - a)^2 \end{cases}$$

има единствено решение.

Зад. 8. Нека p и q са цели числа, такива че уравнението $x^2 + px + q = 0$ има реални корени x_1 и x_2 . Да се докаже, че ако числата $1, x_1, x_2$ в някакъв ред образуват геометрична прогресия, то q е трета степен на цяло число.

Зад. 9. Нека $ABCDE$ е четириъгълна пирамида, около която може да се опише сфера. Нека лицето на основата $ABCD$ е 8 , а $\sphericalangle AEB = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CED = \sphericalangle DEA = 60^\circ$. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера, ако $AC \perp BE$ и $BD \perp AE$.

Зад. 10. Нека $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$, и уравнението $f''(x) = 0$ има два различни реални корена. Ако x_0 е коренът на $f'''(x) = 0$ и точката A е с координати $(x_0, f(x_0))$, да се докаже, че допирателната в точката A към графиката на функцията $f(x)$ я пресича в още точно две точки B и C и да се намери отношението $AB : AC$.

Време за работа 5 часа.

Журието Ви желае успешна работа!