Турнир по елементарна математика "Проф. Борислав Боянов"
Втори кръг, 14 март 2010

Задачи и примерни решения

Задача 1. Между градовете A и B има денонощна автобусна линия. На всеки час потегля автобус от A към B и, едновременно, от B към A. Всички автобуси се движат с една и съща постоянна скорост.

Половин час след потеглянето на поредния автобус, от A към B потеглил автомобил, който настигнал движещия се пред него автобус един час след тръгването си и след още 3 часа и 40 минути пристигнал в B. Колко автобуса, движещи се от B към A, е срещнал автомобилът?

Решение. *Отговор:* 12

За един час автомобилът изминава разстояние, което автобус изминава за час и 30 минути. Следователно скоростите им могат да се приемат за $3V$ и $2V$. Автомобилът изминава разстоянието от A до B за 4 часа и 40 минути, т.е. то е равно на $14V$, което означава, че всеки автобус изминава разстоянието от B до A за 7 часа.

В момента на потегляне на автомобила, на пътя се намират 7 автобуса — потеглили от B към A преди по-малко от 7 часа. Докато автомобилът се движи, от B към A потеглят още 5 автобуса. Следователно, автомобилът е срещнал 12 автобуса.

Задача 2. Да се реши системата:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{1}{3} \\[2ex] \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z+x} = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. .$$

Решение. *Отговор:* $\left(\dfrac{11}{3}\,;\,\dfrac{11}{2}\,;\,11\right)$

Полагаме $u = x + y + z$. Системата придобива вида:

$$\left|\begin{array}{l} 3\,u = x\,(u-x) \\ 4\,u = y\,(u-y) \\ 5\,u = z\,(u-z) \end{array}\right. .$$

След събиране на уравненията получаваме $12\,u = u^2 - \left(x^2+y^2+z^2\right) = 2\,(xy+yz+zx)$. Тогава

$$\begin{array}{lll} 3\,u = 6\,u - yz & \text{или} & yz = 3\,u \\ 4\,u = 6\,u - zx & \text{или} & zx = 2\,u \\ 5\,u = 6\,u - xy & \text{или} & xy = u\ . \end{array}$$

Понеже $xyz \neq 0$, то и $u \neq 0$. Следователно $x = 2\,t,\ y = 3\,t,\ z = 6\,t$, където $t = \dfrac{xyz}{6\,u}$. Тогава $6\,t^2 = xy = u = x+y+z = 11\,t$, откъдето $t = \dfrac{11}{6}\,,\ x = \dfrac{11}{3}\,,\ y = \dfrac{11}{2}\,,\ z = 11\,.$

Задача 3. Нека a, b, $c \in \mathbb{N}$ са такива, че $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \in \mathbb{N}$.
Да се докаже, че $abc = k^3$ за $k \in \mathbb{N}$.

Решение. Ако a, b, c имат общ делител, то той ще участва на 3-та степен в произведението abc. Следователно, можем да считаме, че a, b, c са взаимно прости.

Нека p е просто число, което дели a и $a = p^t a_1$, където $t,\ a_1 \in \mathbb{N}$ и p не дели a_1. Понеже p дели произведението abc, а то дели $S = a^2c + b^2a + c^2b$, то или p дели b, или p дели c.

Ако p дели b (и не дели c), то p^t дели b, откъдето p^{2t} дели S, и, следователно, дели и b. Допускането, че p^{2t+1} дели b, води до противоречие, защото тогава p^{2t+1} дели S, b^2a и c^2b, но не дели a^2c. Следователно, p^{3t} дели abc, а p^{3t+1} не дели abc.

Ако p дели c (и не дели b), с замяна ролите на a с c, b с a и c с b, намираме $t = 2v$ и p^{3v} дели abc, а p^{3v+1} не дели abc.

Следователно, степента на всеки прост делител на a в произведението abc се дели на 3. Понеже условието и заключението се запазват при циклична замяна, то същотото е вярно и за простите делители на b и c, с което исканото е доказано.

Задача 4. Ако уравнението

$$x^4 - a\,x^3 + 2\,x^2 - b\,x + 1 = 0$$

има реален корен, да се докаже, че $a^2 + b^2 \geq 8$.

Решение. Използваме неравенството $\left(A^2 + B^2\right)\left(C^2 + D^2\right) \geq (AC + BD)^2$ (еквивалетно на $(AC - BD)^2 \geq 0$). Ако x_0 е корен на даденото уравнение, то

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(\left(x_0^3\right)^2 + \left(x_0\right)^2\right) \geq \left(a x_0^3 + b x_0\right)^2 = \left(x_0^2 + 1\right)^4 \quad .$$

Понеже $x_0 \neq 0$, то $a^2 + b^2 \geq \dfrac{\left(x_0^2 + 1\right)^4}{x_0^2\left(x_0^4 + 1\right)}$. За $t = x_0^2 > 0$ неравенството $\dfrac{(t+1)^4}{t\left(t^2+1\right)} \geq 8\,t\left(t^2 + 1\right)$ е еквивалетно на $(t+1)^4 \geq 8\,t\left(t^2+1\right)$ и, след преобразуване, на $(t-1)^4 \geq 0$, с което исканото е доказано.

Решение на Александър Митев: Нека x_0 е корен на даденото уравнение. Тогава $x_0 \neq 0$ и

$$x_0^2 - a\,x_0 + 2 - b\,\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 0 \quad .$$

Следователно

$$\frac{a^2 + b^2 - 8}{4} = \left(x_0 - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{b}{2}\right)^2 \quad ,$$

с което исканото неравенство е доказано.

Задача 5. Сред триъгълниците, с дължини на страните цели числа и отношение на мерките на двата по-малки ъгъла 2 : 1, да се намерят дължините на страните на онзи, чийто периметър е най-малък.

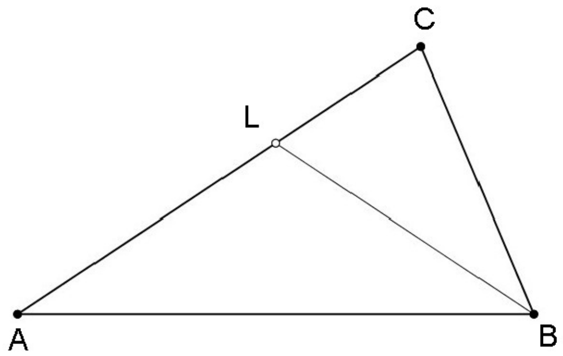
Решение. *Отговор:* 9, 15, 16

За $\triangle ABC$ използваме стандартните означения, които са избрани така, че $a < b \leq c$. По условие $\beta = 2\alpha$. Ще докажем, че $b^2 = a\,(a + c)$.

Нека BL $(L \in AC)$ е ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$. Тогава $AL = BL$ и триъгълниците ABC и BLC са подобни. Следователно

$$\frac{AL}{AB} = \frac{BL}{AB} = \frac{BC}{AC}\ , \ \text{откъдето}\ AL = \frac{ac}{b}\ \text{ и }\ CL = \frac{b^2 - ac}{b} \quad .$$

От свойството на ъглополовящата намираме $\dfrac{a}{b} = \dfrac{AL}{AB} = \dfrac{CL}{CB} = \dfrac{b^2 - ac}{ab}$, с което исканото равенство е установено.



Ясно е, че страните на триъгълника с най-малък периметър са взаимно прости числа. Ако q е просто число, делящо b, то q^2 дели $a\,(a+c)$. Ако q дели a и q дели $a+c$, то q дели a, което не е възможно. Следователно или q^2 дели a, или q^2 дели $a+c$, което означава, че $a = k^2$ и $a+c = n^2$.

Тогава $b = kn$ и $P_{ABC} = n^2 + kn$. От друга страна, $\dfrac{n}{k} = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$ и $0 < \alpha \leq 36^\circ$, защото $180^\circ - 3\,\alpha = \gamma \geq \beta = 2\,\alpha$. Търсим най-малката стойност на $n^2 + kn$ за взаимно прости k и n, удовлетворяващи неравенствата $2\cos 36^\circ \leq \dfrac{n}{k} < 2$.

От равенството $\sin\,(3.36^\circ) = \sin\,(2.36^\circ)$ намираме $4\cos^2 36^\circ\, - 1 = 2\cos 36^\circ$, откъдето $\cos 36^\circ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Неравенствата $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \dfrac{n}{1} < 2$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \dfrac{n}{2} < 2$ нямат решения в естествени числа, неравенствата $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq \dfrac{n}{3} < 2$ имат едиствено решение $n = 5$. Ако $k \geq 4$, то $n \geq 6$. Следователно P_{ABC} е минимален за $k = 3$, $n = 5$, а страните имат дължини 9, 15, 16.