СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ „ТУРНИР НА ДЕКАНА НА ФМИ“

22 март 2009 г.

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

Зад. 1. Да се реши уравнението в зависимост от стойностите на реалния параметър a

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=a\sqrt{2}.$$

Решение. Даденото уравнение има смисъл при $x \in [-1,1]$. При $a<0$ то няма решение. Нека $a \geq 0$. Тогава уравнението е равносилно с:

$$(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2=2a^2, \quad 2+2\sqrt{1-x^2}=2a^2, \quad \sqrt{1-x^2}=a^2-1.$$

При $a<1$ последното уравнение няма решение. Нека $a \geq 1$. Тогава:

$$\sqrt{1-x^2}=a^2-1 \Leftrightarrow 1-x^2=(a^2-1)^2 \Leftrightarrow x^2=a^2(2-a^2).$$

При $a>\sqrt{2}$ полученото уравнение няма решение. Нека $a \in [1,\sqrt{2}]$. Тогава решенията му са $x=\pm a\sqrt{2-a^2}$. При това от $1-x^2=(a^2-1)^2$ следва $1-x^2 \geq 0$ и условието $x \in [-1,1]$ е изпълнено.

Окончателно: при $a \in (-\infty,1) \cup (\sqrt{2},+\infty)$ даденото уравнение няма решение, а при $a \in [1,\sqrt{2}]$ решенията му са $x=\pm a\sqrt{2-a^2}$.

Зад. 2. Нека M е произволна точка във вътрешността на равностранния триъгълник ABC със страна 1 и R_a, R_b, R_c са дължините на радиусите на окръжностите, описани съответно около триъгълниците MBC, MAC, MAB. Да се докажат неравенствата:

а) $\dfrac{1}{R_a}+\dfrac{1}{R_b}+\dfrac{1}{R_c} \leq 3\sqrt{3}$;

б) $R_a+R_b+R_c \geq \sqrt{3}$.

Решение. Да означим $\sphericalangle BMC=\alpha$, $\sphericalangle AMC=\beta$, $\sphericalangle AMB=\gamma$. Ще използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично за положителните числа $\dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\dfrac{1}{\sin\beta}$, $\dfrac{1}{\sin\gamma}$, както и за $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$:

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}, \tag{1}$$

$$\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} \leq \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}. \tag{2}$$

Ще използваме и неравенството на Йенсен за функцията $\sin x$, $x \in (0,\pi)$:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3}$$

От синусовата теорема за $\triangle BMC$ имаме $R_a = \dfrac{1}{2\sin\alpha}$. Аналогично $R_b = \dfrac{1}{2\sin\beta}$, $R_c = \dfrac{1}{2\sin\gamma}$.

а) Използвайки (3), имаме

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = 2(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq 2\frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

б) Прилагайки последователно (1), (2) и (3), получаваме

$$R_a + R_b + R_c = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} + \frac{1}{\sin\gamma}\right) \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}} \geq$$

$$\geq \frac{3}{2\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3}} \geq \frac{3}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3},$$

което и трябваше да се докаже.

Зад. 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което съществуват n числа x_1, x_2, ..., x_n в интервала $[-1, 1]$, които удовлетворяват равенствата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \dfrac{n}{3} \\ x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 0 \end{array} \right. .$$

Решение. Нека $\alpha_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ са такива, че $x_i = \cos\alpha_i$. Тогава

$$\begin{aligned} 0 &= 4(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3) = 4(\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \cdots + \cos^3\alpha_n) = \\ &= (\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \cdots + \cos 3\alpha_n) + 3(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n) = \\ &= (\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \cdots + \cos 3\alpha_n) + n. \end{aligned}$$

Тогава $\cos 3\alpha_i = -1$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, n$ и последователно получаваме

$$3\alpha_i = (2k_i + 1)\pi \ (k_i \in \mathbb{Z}), \quad \alpha_i = \frac{\pi}{3} \text{ или } \alpha_i = \pi, \quad x_i = \frac{1}{2} \text{ или } x_i = -1.$$

Нека p от числата са равни на $\dfrac{1}{2}$ и q от тях са равни на -1. От условието получаваме $\dfrac{p}{2} - q = \dfrac{n}{3}$ и $\dfrac{p}{8} - q = 0$ или $p = 8q$ и $n = 9q$. Следователно n трябва да се дели на 9 и най-малкото такова число е 9. Ясно е, че числата $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = \dfrac{1}{2}$ и $x_9 = -1$ са решение на задачата при $n = 9$.

Зад. 4. За кои стойности на естественото число n съществува n-ъгълна пирамида, за която са изпълнени следните условия:

1. около пирамидата може да се опише сфера;
2. съществува сфера, която се допира до всички ръбове на пирамидата;
3. двете сфери имат общ център?

Решение. Нека $MA_1A_2\ldots A_n$ е пирамида, притежаваща свойствата от условието на задачата. Разглеждайки сеченията на коя да е стена на пирамидата с двете сфери, установяваме, че около тази стена може да се опише окръжност и в нея може да се впише окръжност. При това лесно се вижда, че ортогоналната проекция на общия център O върху тази стена съвпада както с центъра на описаната окръжност, така и с центъра на вписаната окръжност. Оттук следва, че околните стени на пирамидата са равностранни триъгълници, откъдето пък следва, че всички ръбове на пирамидата (околни и основни) са равни помежду си. Освен това основата $A_1A_2\dots A_n$ е правилен n-ъгълник, защото точките A_1, A_2,…, A_n лежат на една окръжност и $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_nA_1$. Така $MA_1A_2\dots A_n$ е правилна пирамида, като всичките ѝ ръбове са равни помежду си. Да наречем такава пирамида „суперправилна“.

Ще докажем, че „суперправилна“ n-ъгълна пирамида съществува само при $n = 3, 4$ и 5.

Нека $MA_1A_2\dots A_n$ е „суперправилна“ пирамида и H е центърът на правилния n-ъгълник $A_1A_2\dots A_n$. При $n \geq 6$ имаме $\angle A_1HA_2 = \dfrac{2\pi}{n} \leq \dfrac{\pi}{3}$. Оттук следва (разглеждайки равнобедрения $\triangle A_1A_2H$), че $HA_1 \geq A_1A_2$. Но (от правоъгълния $\triangle A_1HM$) $MA_1 > HA_1 \geq A_1A_2$, следователно пирамидата не е „суперправилна“. Така $n < 6$.

Нека $n = 3, 4$ или 5 и $MA_1A_2\dots A_n$ е правилна пирамида, като правилният n-ъгълник $A_1A_2\dots A_n$ е със страна 1. Сега имаме $\sphericalangle A_1HA_2 = \dfrac{2\pi}{n} > \dfrac{\pi}{3}$ и тогава (отново от $\triangle A_1A_2H$) $HA_1 < A_1A_2 = 1$. Нека височината на пирамидата е $MH = \sqrt{1 - HA_1^2} > 0$. Тогава $MA_1 = \sqrt{MH^2 + HA_1^2} = 1$ и пирамидата е „суперправилна“.

И така, всяка n-ъгълна пирамида, удовлетворяваща условието на задачата, трябва да бъде „суперправилна“, като $n = 3, 4$ или 5. Остава да видим, че всяка „суперправилна“ пирамида удовлетворява условието на задачата.

Нека $MA_1A_2\dots A_n$ е „суперправилна“ пирамида (всичките ръбове на която са равни на 1) и R е дължината на радиуса на описаната около пирамидата сфера, а O е центърът на сферата. Нека XY е кой да е ръб на пирамидата (околен или основен). Триъгълникът XYO е равнобедрен ($XY = 1$, $XO = YO = R$) и разстоянието от точката O до XY е равно на $\sqrt{XO^2 - \left(\dfrac{XY}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{1}{4}}$. Тогава сферата с център O и радиус с дължина $\sqrt{R^2 - \dfrac{1}{4}}$ се допира до всички ръбове на пирамидата. Следователно пирамидата удовлетворява условията на задачата.

Окончателно, търсените стойности на n са $n = 3, 4$ и 5.

Зад. 5. Да се намерят всички полиноми $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $g(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$ с цели коефициенти ($n \in \mathbb{N}$), ако b_1, b_2, …, b_n са корените на полинома $f(x)$ и a_1, a_2, …, a_n са корените на полинома $g(x)$.

Решение. Нека

$$f = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n),$$
$$g = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n = (x - a_1)(x - a_2)\dots(a - a_n)$$

I. Първо ще разгледаме случая, когато $a_n \neq 0$. Тогава $b_n \neq 0$ и

$$\begin{aligned} a_1a_2\dots a_{n-1}a_n &= (-1)^n b_n,\\ b_1b_2\dots b_{n-1}b_n &= (-1)^n a_n \end{aligned} \tag{1}$$

(формули на Виет или разглеждаме $f(0)$ и $g(0)$). Като умножим двете равенства, получаваме $a_1a_2\dots a_{n-1}b_1b_2\dots b_{n-1}=1$, откъдето a_1, a_2, …, a_{n-1} и b_1, b_2, …, b_{n-1} са равни на ±1, $a_1a_2\dots a_{n-1}=b_1b_2\dots b_{n-1}$ и $|a_n|=|b_n|$.

1. Нека $n=1$. Тогава $f=x+a$ и $g=x-a$, където a е произволно цяло число.

2. Нека $n=2$. От следствията на равенствата (1) имаме, че $a_1=b_1=\pm1$. Но $0=f(b_1)=a_2+2$ и $0=g(a_1)=b_2+2$. Оттук и равенствата (1) окончателно получаваме $f=g=x^2+x-2$.

3. Нека $n\geq 3$. От формулите на Виет имаме, че $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=a_1^2-2a_2=1-2a_2=3$ (лявата страна е неотрицателна). Но $b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=n-1+b_n^2$ и следователно $b_n^2=4-n$. Единствената възможност е $n=3$ и $a_n,b_n=\pm1$. Тогава f и g са полиноми от трета степен с коефициенти ±1 и корени ±1. С директна проверка се вижда, че единственото решение е $f=g=(x-1)(x+1)^2=x^3+x^2-x-1$.

II. Нека сега $a_n=0$. Тогава и $b_n=0$. Нека k е най-малкото естествено число, за което $a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots a_n=b_{k+1}=b_{k+2}=\cdots=b_n=0$ и $a_k\neq 0$ или $b_k\neq 0$. Ясно е, че $a_kb_k\neq 0$ и тогава полиномите $f_1=x^{n-k}+a_1x^{n-k-1}+\cdots+a_k$ и $g_1=x^{n-k}+b_1x^{n-k-1}+\cdots+b_k$ удовлетворяват условието на задачата ($f=x^kf_1$ и $g=x^kg_1$). От първата част на решението имаме $n-k\leq 3$. Окончателно получаваме

$$
\begin{aligned}
&1)\ f=x^{n-1}(x+a),\ g=x^{n-1}(x-a),\ a\in\mathbb{Z},\\
&2)\ f=g=x^{n-2}(x^2+x-2),\\
&3)\ f=g=x^{n-3}(x^3+x^2-x-1).
\end{aligned}
$$