

СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ „ТУРНИР НА ДЕКАНА НА ФМИ“
Втори кръг, 22 март 2009 г.

Зад. 1. Да се реши уравнението в зависимост от стойностите на реалния параметър a

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = a\sqrt{2}.$$

Зад. 2. Нека M е произволна точка във вътрешността на равностранния триъгълник ABC със страна 1 и R_a, R_b, R_c са дължините на радиусите на окръжностите, описани съответно около триъгълниците MBC, MAC, MAB . Да се докажат неравенствата:

а) $\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} \leq 3\sqrt{3};$

б) $R_a + R_b + R_c \geq \sqrt{3}.$

Зад. 3. Да се намери най-малкото естествено число n , за което съществуват n реални числа x_1, x_2, \dots, x_n в интервала $[-1, 1]$, които удовлетворяват равенствата

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{n}{3} \\ x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0 \end{cases}.$$

Зад. 4. За кои стойности на естественото число n съществува n -ъгълна пирамида, за която са изпълнени следните условия:

1. около пирамидата може да се опише сфера;
2. съществува сфера, която се допира до всички ръбове на пирамидата;
3. двете сфери имат общ център?

Зад. 5. Да се намерят всички полиноми $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ и $g(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$ с цели коефициенти ($n \in \mathbb{N}$), ако b_1, b_2, \dots, b_n са корените на полинома $f(x)$ и a_1, a_2, \dots, a_n са корените на полинома $g(x)$.

Всяка задача се оценява с 8 точки.

Време за работа 5 часа.

Журито Ви желае успешна работа!

Моля, прочетете внимателно!

1. Пишете четливо. Текст, който не се разчита, няма да бъде оценяван.
2. Изложете решението на всяка задача на отделен лист.
3. Изрично да се посочат листовите от беловата. Черновата не се оценява.
4. Условиата и решенията на задачите от втория кръг ще бъдат поместени на 22.03.2009 г. след 14 ч. на сайта на ФМИ и на <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/bojilov/turnir.html>
5. Резултатите от втория кръг на турнира ще бъдат обявени на 27.03.2009 г. на сайта на ФМИ и на <http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/bojilov/turnir.html>
6. Победителят (победителите) в турнира ще бъдат наградени по време на празника на ФМИ по случай 24 май.
7. Ако имате въпроси, можете да питате на email: turnir@fmi.uni-sofia.bg