Турнир по елементарна математика "Проф. Борислав Боянов"
Втори кръг, 14 март 2010

Задача 1. Между градовете A и B има денонощна автобусна линия. На всеки час потегля автобус от A към B и, едновременно, от B към A. Всички автобуси се движат с една и съща постоянна скорост.

Половин час след потеглянето на поредния автобус, от A към B потеглил автомобил, който настигнал движещия се пред него автобус един час след тръгването си и след още 3 часа и 40 минути пристигнал в B. Колко автобуса, движещи се от B към A, е срещнал автомобилът?

Задача 2. Да се реши системата:

$$\left| \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right. .$$

Задача 3. Нека a, b, $c \in \mathbb{N}$ са такива, че $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \in \mathbb{N}$.
Да се докаже, че $abc = k^3$ за $k \in \mathbb{N}$.

Задача 4. Ако уравнението

$$x^4 - a\,x^3 + 2\,x^2 - b\,x + 1 = 0$$

има реален корен, да се докаже, че $a^2 + b^2 \geq 8$.

Задача 5. Сред триъгълниците, с дължини на страните цели числа и отношение на мерките на двата по-малки ъгъла 2 : 1, да се намерят дължините на страните на онзи, чийто периметър е най-малък.