Глава 11

Размерност. Лема на Noether за нормализация.

1. Базис и степен на трансцендентност на крайно породено разширение

Нека $F = k(a_1, \ldots, a_n) \supseteq k$ е крайно породено разширение на k. Твърдим, че $a_1, \ldots, a_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $a_1, \ldots, a_n$ тогава и само отгава, когато $a_1, \ldots, a_d$ са трансцендентни над k и $F = k(a_1, \ldots, a_n) \supseteq k(a_1, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. По-точно, ако $a_1, \ldots, a_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $a_1, \ldots, a_n$, то за $\forall d+1 \leq i \leq n$ съществува полином $f_i(a_1, \ldots, a_d, x) \in k[a_1, \ldots, a_d, x] \setminus \{0\}$ с $f_i(a_1, \ldots, a_d, a_i) = 0$. Съгласно трансцендентността на $a_1, \ldots, a_d$ над k, f_i зависи от x и задава алгебрична зависимост на a_i над $k(a_1, \ldots, a_d)$. Следователно $F = k(a_1, \ldots, a_d)(a_{d+1}, \ldots, a_n)$ е крано породено разширение на $k(a_1, \ldots, a_d)$ чрез алгебрични над $k(a_1, \ldots, a_d)$ елементи $a_{d+1}, \ldots, a_+n$ и $F \supseteq k(a_1, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. Обратно, нека $a_1, \ldots, a_d$ са трансцендентни над k и $F = k(a_1, \ldots, a_n) \supseteq k(a_1, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. Оттук, за $\forall d+1 \leq i \leq n$ съществува полином $g_i(x) \in k(a_1, \ldots, a_d)[x] \setminus k(a_1, \ldots, a_d)$ с $g_i(a_i) = 0$. Ако $h_i \in k[a_1, \ldots, a_d]$ е общо кратно на знаменателите на коефициентите на g_i, то $f_i(x) := h_i g_i \in k[a_1, \ldots, a_d, x] \setminus k[a_1, \ldots, a_d]$ е полином с $f_i(a_i) = 0$ и $a_1, \ldots, a_d, a_i$ са алгебрично зависими за $\forall d+1 \leq i \leq n$. Това доказва, че $a_1, \ldots, a_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $a_1, \ldots, a_n$.

Лема-Определение 11.1. *Нека $F = k(a_1, \ldots, a_n) \supset k$ е крайно породено разширение на поле k и $a_1, \ldots, a_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $a_1, \ldots, a_n$. Тогава всяко трансцендентно над k подмножество $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq F$ има $r \leq d$ елемента и всяко максимално трансцендентно над k подмножество $\{c_1, \ldots, c_s\} \subseteq F$ има $s = d$ елемента.*
Произволно максимално трансцендентно над k подмножество $\{c_1, \ldots, c_s\} \subseteq F$ се нарича базис на трансцендентност на F над k.
Броят на елементите в един, а оттам и всеки един базис на трансцендентност на F над k е степента на трансцендентност на F над k и се бележи с $\mathrm{trdeg}_k F$.

Доказателство: С индукция по $1 \leq i \leq \min(r, d)$ ще докажем, че съществува наредба на $a_1, \ldots, a_d$, така че $b_1, \ldots, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_d$ са трансцендентни над k и $F \supset k(b_1, \ldots, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. Тогава допускането $r > d$ води до $[F : k(b_1, \ldots, b_d)] < \infty$ и изисква алгебричността на $b_{d+1}, \ldots, b_r$ над $k(b_1, \ldots, b_d)$. Това противоречи на трансцендентността на $b_1, \ldots, b_r$ над k. В частност, всяко максимално трансцендентно над k подмножество $\{c_1, \ldots, c_s\} \subset F$ има $s \leq d$ елемента. Ако $s < d$, то трансцендентността на $c_1, \ldots, c_s, a_{s+1}, \ldots, a_d$ води до противоречие с максималността на трансцендентното рад k подмножество $\{c_1, \ldots, c_s\} \subseteq F$.
За $i = 1$ твърдим, че съществува наредба на $a_1, \ldots, a_d$, така че $b_1, a_2, \ldots, a_d$ са трансцендентни над k и $F \supseteq k(b_1, a_2, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. За целта използваме, че $a_1, \ldots, a_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $a_1, \ldots, a_n$, така че $F \supseteq k(a_1, \ldots, a_d)$ е крайно разширение. Следователно $b_1 \in F$

е алгебричен над $k(a_1, \dots, a_d)$ и съществува полином $f_1 \in k[a_1, \dots, a_d, x]$ с корен $x = b_1$. Полиномът f_1 зависи от поне едно a_i поради трансцендентността на b_1 над k. След евентуална преномерация на $a_1, \dots, a_d$ можем да считаме, че f_1 зависи от a_1. Тогава f_1 е алгебрична зависимост на a_1 над $k(b_1, a_2, \dots, a_d)$ и $k(b_1, a_1, a_2, \dots, a_d) \supseteq k(b_1, a_2, \dots, a_d)$ е крайно разширение. Полето F е крайно разширение на $k(a_1, \dots, a_d)$, а оттам и на $k(b_1, a_1, \dots, a_d)$, така че

$$[F : k(b_1, a_2, \dots, a_d)] =$$

$$= [F : k(b_1, a_1, \dots, a_d)][k(b_1, a_1, \dots, a_d) : k(b_1, a_2, \dots, a_d)] < \infty.$$

Ако допуснем, че $b_1, a_2, \dots, a_d$ са алгебрично зависими и съществува полином $h_1 \in k[y_1, \dots y_d]$ с $h_1(b_1, a_2, \dots, a_d) = 0$, то h_1 зависи от b_1 поради трансцендентността на $a_2, \dots, a_d$ над k. Следователно $k(b_1, a_2, \dots, a_d) \supseteq k(a_2, \dots, a_d)$ е крайно разширение и

$$[F : k(a_2, \dots, a_d)] = [F : k(b_1, a_2, \dots, a_d)][k(b_1, a_2, \dots, a_d) : k(a_2, \dots, a_d)].$$

Това противоречи на трансцендентността на $a_1, a_2, \dots, a_d$ над k и доказва трансцендентността на $b_1, a_2, \dots, a_d$ над k.

Да допуснем, че сме доказали трансцендентността на $b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d$ над k и крайността на разширението $F \supseteq k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d)$. Тогава елементът $b_i \in F$ е алгебричен над $k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d)$ и съществува полином $f_i \in k[b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d, x]$ с корен $x = b_i$. Този полином зависи от поне едно a_j с $i \leq j \leq d$, съгласно трансцендентността на $b_1, \dots, b_{i-1}$ над k. След евентуална пермутация на $a_i, \dots, a_d$ можем да считаме, че f_i зависи от a_i. Това позволява да разглеждаме f_i като алгебрична зависимост на a_i над $k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d)$ и да получим, че $k(b_1, \dots, b_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_d) \supseteq k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d)$ е крайно разширение. В резултат, степента

$$[F : k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d)] =$$

$$= [F : k(b_1, \dots, b_i, a_i, \dots, a_d)][k(b_1, \dots, b_i, a_i, \dots, a_d) : k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d)]$$

е крайна, защото $k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d) \subseteq k(b_1, \dots, b_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_d)$ и

$$[F : k(b_1, \dots, b_i, a_i, a_{i+1}, \dots, a_d)] \leq [F : k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, \dots, a_d)] < \infty.$$

Ако допуснем, че $b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d$ са алгебрично зависими над k и анулират полином $h_i \in k[b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d]$, то h_i зависи от b_i поради трансцендентността на $\{b_1, \dots, b_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d\} \subseteq \{b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_d\}$ над k. Следователно $k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d) \supseteq k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d)$ е крайно разширение и степента

$$[F : k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d)] =$$

$$= [F : k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d)][k(b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d) : k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d)]$$

е крайна. В резултат, елементът $a_i \in F$ е алгебричен над $k(b_1, \dots, b_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_d)$, противно на индукционното предположение за трансцендентност на елементите $b_1, \dots, b_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_d$ над k. Това доказва трансцендентността на елементите $b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_d$ над k и твърдението, Q.E.D.

2. Размерност на афинно многообразие

Определение 11.2. *Размерността на квази-афинно или квази-проективно многообразие X е степента на трансцендентност*

$$\dim X = \operatorname{tr}\deg_{\overline{k}} \ \overline{k}(X)$$

на полето на рационалните функции $\overline{k}(X)$ на X.

След евентуално преминаване към афинно Зариски отворено подмножество виждаме, че функционалното поле $\overline{k}(X)$ е крайно породено разширение на $\overline{k}$, така че размерността на многообразие е естествено число.
Интуитивно, размерността на афинно многообразие е броят на алгебрично независимите променливи, параметризиращи това многообразие. Едномерните многообразия се наричат криви, а двумерните - повърхнини.

Твърдение 11.3. *Нека X е афинно или проективно многообразие, $\emptyset \neq Y \subseteq X$ е непразно подмногообразие, т.е. Y е неприводимо Зариски затворено подмножество на X. В такъв случай,* $\dim(Y) \leq \dim(X)$ *с равенство* $\dim(Y) = \dim(X)$ *тогава и само тогава, когато $Y = X$.*

Доказателство: В следващите разглеждания считаме, че X и Y са определени над k. Достатъчно е да докажем твърдението за афинно многообразие X. Тогава за произволно проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ и произволно стандартно афинно Зариски отворено подмножество $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $Y \cap U_i \neq \emptyset$ имаме $X \cap U_i \neq \emptyset$, откъдето $k(Y) = k(Y \cap U_i)$, $k(X) = k(X \cap U_i)$. В резултат, $\dim(X) = \mathrm{tr\ deg}_k k(X) = \mathrm{tr\ deg}_k k(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i)$, $\dim(Y) = \dim(Y \cap U_i)$, откъдето

$$\dim(Y) = \dim(Y \cap U_i) \leq \dim(X \cap U_i) = \dim(X).$$

В случая на равенство $\dim Y = \dim X$ получаваме $Y \cap U_i = X \cap U_i$. Оттук следва съвпадението $Y = \overline{Y \cap U_i} = \overline{X \cap U_i} = X$ на съответните Зариски затворени обвивки.
Отсега нататък предполагаме, че $\emptyset \neq Y \subseteq X \subseteq k^n$ са афинни многообразия. Тъждественото влагане $\mathrm{Id} : Y \hookrightarrow X$ индуцира обратното включване $I(X) \subseteq I(Y)$ на идеалите на тези афинни многообразия в $k[x_1, \ldots, x_n]$. В резултат получаваме епиморфизъм $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ на афинните координатни пръстени с ядро $I(Y)/I(X)$. Класовете на афинните координати пораждат афинния координатен пръстен като k-алгебра и

$$\mathrm{Id}^* : k[X] = k[x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)] \longrightarrow k[x_1 + I(Y), \ldots, x_n + I(Y)] = k[Y]$$

е естественият епиморфизъм с $\mathrm{Id}^*(x_i + I(X)) = x_i + I(Y)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $\mathrm{Id}^*|_k = \mathrm{Id}_k$. След евентуална пермутация на $x_1, \ldots, x_n$ можем да считаме, че $x_1 + I(X), \ldots, x_d + (X)$ са трансцендентни над k и $x_i + I(X)$ е алгебрично над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за $\forall d + 1 \leq i \leq n$. Пропускайки произволна полиномиална зависимост на $x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X), x_i + I(X)$ над k по модул идеала $I(Y) \supseteq I(X)$ получаваме полиномиална зависимост на $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y), x_i + I(Y)$ над k. Оттук следва, че $x_i + I(Y)$ са алгебрични над $k(x_1 + I(Y), \ldots, x_n + I(Y))$ за $\forall d + 1 \leq i \leq n$. Следователно произволен базис на трансцендентност на $k(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y))$ над k е базис на трансцендентност на $k(Y)$ над k. По този начин, $\dim(Y) = \mathrm{tr\,deg}_k\, k(Y) \leq d = \dim(X)$.
Ако $\dim(Y) = \dim(X) = d$, то $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)$ са трансцендентни над k. В такъв случай е достатъчно да докажем, че

$$\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$$

е изоморфизъм на k-алгебри, за да стигнем до извода, че $\mathrm{Id} : Y \to X$ е изоморфизъм и $Y = X$. Вече видяхме, че $Im(\mathrm{Id}^*) = k[Y]$. Произволен елемент $\xi \in \ker(\mathrm{Id}^*) \subset k[X] \subset k(X)$ е алгебричен над чисто трансцендентното разширение $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ на k. Ако $g(x) \in k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))[x]$ е минималният полином на ξ над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$, то съществуват полиноми $f(x_1, \ldots, x_d, x) \in k[x_1, \ldots, x_d, x] \setminus k[x_1, \ldots, x_d]$ и $h(x_1, \ldots, x_d) \in k[x_1, \ldots, x_d]$, така че

$$g(x) = \frac{f(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X), x)}{h(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))}$$

и $f(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X), \xi) = 0$. Последното равенство има вида

$$a_m \xi^m + a_{m-1}\xi^{m-1} + \ldots + a_1 \xi + a_0 = 0 \tag{11.1}$$

за подходящи полиноми $a_m, \ldots, a_0 \in k[x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)]$. Действайки с Id^* върху (11.1) получаваме

$$a_0(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)) = 0 \in k[x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)].$$

Поради трансцендентността на $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)$ над k, това е достатъчно за $a_0(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)) = 0$. Сега

$$f(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X), x) = x \left(\sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)) x^i \right)$$

и неразложимостта на

$$g(x) = x \left(\sum_{i=0}^{m-1} \frac{a_{i+1}(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))}{h(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))} x^i \right) \in k(x_1+I(X), \ldots, x_d+I(X))[x]$$

над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ изисква

$$g(x) = x \frac{a_1(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))}{h(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))}$$

с $a_1(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)) \neq 0$. В резултат, от $g(\xi) = 0$ следва $\xi = 0$ и $\ker(\mathrm{Id}^*) = \{0\}$. Затова $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ е изоморфизъм на k-алгебри и $Y = X$, Q.E.D.

Задача 11.4. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$ е неразложим полином. Да се докаже, че афинната хиперравнина $X = V(f) \subseteq k^n$ има размерност $\dim(X) = n - 1$.*

Упътване: Ако $f(x_1, \ldots, x_n)$ зависи от x_n, то можем да разглеждаме f като алгебрична зависимост на $\overline{x_n} \in k[X]$ над разширението $k(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) = k(x_1 + I(X), \ldots, x_{n-1} + I(X))$. Следователно произволен базис на транцендентност на $k(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}})$ над k е базис на трансцендентност на $K(X) = F(k[X])$ над k. Ако допуснем, че съществува нетривиална полиномиална зависимост $g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) = 0$, то

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I(X) = IV(f) = r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle.$$

Използвайте, че всеки нетъждествено нулев полином $fh \in \langle f \rangle$ зависи от x_n.

Задача 11.5. *Да се докаже, че ако афинният координатен пръстен $k[X]$ на афинно алгебрично множество $\emptyset \neq X \subseteq k^n$ е крайномерно линейно пространство над k, то X е крайно множество.*

Упътване: Използвайте, че $x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)$ са цели над k.

Задача 11.6. *Да се докаже, че ако съществува доминантно рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$ на квази-афинните или квази-проективните многообразия X, Y, то $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Ако $\mathcal{D}$ е областта на регулярност на доминантното рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$, то слоят на φ над обща точка на $\varphi(\mathcal{D})$ е краен тогава и само тогава, когато $\dim(X) = \dim(Y)$.*

3. Бирационалност на многообразие с афинно пространство или афинна хиперповърхнина

Следващата теорема представя произволно крайно породено разширение F на чисто трансцендентно разширение $k(x_1, \ldots, x_d)$ на алгебрично затворено поле k като просто разширение $F = k(x_1, \ldots, x_d, \theta)$ чрез сепарабелен над $k(x_1, \ldots, x_d)$ елемент θ.

Теорема 12. *Нека k е алгебрично затворено поле, $F = k(a_1, \ldots, a_n)$ е крайно породено разширение на k с $\mathrm{trdeg}_k k(a_1, \ldots, a_n) < n$ над k. Тогава съществува базис на трансцендентност $b_1, \ldots, b_d$ на F над k и сепарабелен над $k(b_1, \ldots, b_d)$ елемент $\theta \in F$, така че $F = k(b_1, \ldots, b_d, \theta)$ и минималният полином $g \in k(b_1, \ldots, b_d)[x]$ на θ над $k(b_1, \ldots, b_d)$ е от вида $g = f\frac{h'}{h''}$ за неразложим над k и над $k(b_1, \ldots, b_d)$ полином $f \in k[b_1, \ldots, b_d, x]$, $h', h'' \in k[b_1, \ldots, b_d]$, $h''(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$.*

Доказателство: Ако $d = \mathrm{trdeg}_k F$ е степента на трансцендентност на F над k, то работим с индукция по $n - d \geq 1$.
В случая $n - d = 1$ можем да считаме, че $a_1, \ldots, a_d$ е базис на трансцендентност на $F = k(a_1, \ldots, a_d, a_{d+1})$ над k и a_{d+1} е алгебричен над $F_0 := k(a_1, \ldots, a_d)$. Твърдим, че минималният полином $g \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$ на a_{d+1} над $k(a_1, \ldots, a_d)$ е от вида $g = f\frac{h'}{h''}$ за неразложим над k и над $k(a_1, \ldots, a_d)$ полином $f \in k[a_1, \ldots, a_d, a_{d+1}]$ и $h', h'' \in k[a_1, \ldots, a_d]$, $h''(a_1, \ldots, a_d) = 0$. По-точно, $g = \frac{g'}{h''}$ за $g' \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$, $h'' \in k[a_1, \ldots, a_d]$ с $h''(a_1, \ldots, a_d) \neq 0$. Разлагаме $g' = f_1 \ldots f_s$ в неразложими над k множители $f_1, \ldots, f_s \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$. Тогава $g = f_1 f_2 \ldots f_{s-1} \frac{f_s}{h''}$ е разлагане на g над $k(a_1, \ldots, a_d)$. След евентуална пермутация на $f_1, \ldots, f_s$ можем да считаме, че $f_2, \ldots, f_s \in k[a_1, \ldots, a_d]$, така че $g = f_1 \frac{h'}{h''}$ за неразложим над k полином $f := f_1 \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ и $h' := f_2 \ldots f_s \in k[a_1, \ldots, a_d]$. Ако допуснем, че $f = g_1 g_2$ за $g_i \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$, то съществуват $g'_i \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ и $h'_i \in k[a_1, \ldots, a_d]$ с $g_i = \frac{g'_i}{h'_i}$. Следователно $h'_1 h'_2 f = g'_1 g'_2$ е равенство на полиноми от $k[a_1, \ldots, a_d, x]$. Неразложимият над k полином $f \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ дели g'_1 след евентуална пермутация на g'_1 и g'_2. Всички останали неразложими над k делители на g'_1, както и g'_2 са полиноми от $k[a_1, \ldots, a_d]$. Следователно $g_2 = \frac{g'_2}{h'_2} \in k(a_1, \ldots, a_d)$ и $f \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ е неразложим над $k(a_1, \ldots, a_d)$.
Ако минималният полином $g \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$ на a_{d+1} над $k(a_1, \ldots, a_d)$ е сепарабелен, то теоремата е доказана в случая $n - d = 1$. Ако $g \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$ не е сепарабелен, то $g \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$ и $\frac{\partial g}{\partial x} \in k(a_1, \ldots, a_d)[x]$ имат общ корен, откъдето и общ делител, зависещ от x. Съгласно неразложимостта на g над $k(a_1, \ldots, a_d)$, най-големият общ делител $k(a_1, \ldots, a_d)[x] \ni GCD\left(g, \frac{\partial g}{\partial x}\right) = g$. Вземайки предвид $g = f\frac{h'}{h''}$ за неразложим над k полином $f \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ и $h', h'' \in k[a_1, \ldots, a_d]$, получаваме $k[a_1, \ldots, a_d, x] \ni GCD\left(f, \frac{\partial f}{\partial x}\right) = f(x)$. От $\deg_x \frac{\partial f}{\partial x} < \deg_x f$ следва $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0 \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$.
Твърдим, че съществува $1 \leq i \leq d$, така че $\frac{\partial f}{\partial a_i} \not\equiv 0 \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$. В противен случай, степенните показатели на всички променливи $a_1, \ldots, a_d, x$ в мономите на полинома $f \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ с ненулеви коефициенти c_α се делят на характеристиката $\mathrm{char}(k) = \mathrm{char}(F) = p$. В алгебрично затвореното поле k съществува p-ти корен $\sqrt[p]{c_\alpha} \in k$ от всяко $c_\alpha \in k$, така че $f(a_1, \ldots, a_d, x) = f_0(a_1, \ldots, a_d, x)^p$ за някакъв полином $f_0 \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$. Това противоречи на неразложимостта на $f \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$ над k и доказва съществуването на $1 \leq i \leq d$ с $\frac{\partial f}{\partial a_i} \not\equiv 0 \in k[a_1, \ldots, a_d, x]$.
Да означим $F_1 = k(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_d, a_{d+1})$ и да забележим, че a_i е алгебричен над F_1, съгласно $\frac{\partial f}{\partial a_i} \not\equiv 0$. Твърдим, че $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_d, a_{d+1}$ са трансцендентни над k. При допускане на противното, $\mathrm{trdeg}_k F_1 < d$. Вземайки предвид, че $F = F_1(a_i)$ е крайно разширение на F_1, получаваме $\mathrm{trdeg}_k F = \mathrm{trdeg}_k F_1 < d$. Това противоречи на $\mathrm{trdeg}_k F = d$ и доказва трансцендентността на $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_d, a_{d+1}$ над k. Вече доказахме, че минималният полином g_i на a_i над F_1 е от вида $g_i = f_i \frac{h'_i}{h''_i}$ за неразложим над k и F_1 полином

$f_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_d, a_{d+1}, x]$ и $h'_i, h''_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$. Полиномите $f_i \equiv f$ съвпадат, защото

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}) \in F_1[x]$$

има корен a_i и се дели на g_i над F_1. Ако $f = g_i h_i = \frac{g'_i h'_i}{g''_i h''_i}$ за полиноми $g'_i, h'_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$, $g''_i, h''_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$, то $f g''_i h''_i = g'_i h'_i$. Всеки полином от $k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$ има единствено с точност до множители от k^* разлагане в крайно произведение от неразложими над k множители. В случая, $g'_i = f h'''_i$ за $h'''_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$ и $h'_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$, откъдето $g_i = \frac{g'_i}{g''_i} = f \frac{h'''_i}{g''_i} = f_i \frac{h'_i}{h''_i}$. Сега от $f h'''_i h''_i = f_i h'_i g''_i$ следва $f = f_i \in k[a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{d+1}]$ поради неразложимостта на f и f_i над k, тяхната зависимост от x и независимостта на $h'''_i, h''_i, h'_i, g''_i$ от x. Предположението $\frac{\partial f}{\partial a_i} \not\equiv 0$ гарантира сепарабелността на a_i над чисто трансцендентното разширение $F_1 \supset k$ и доказва случая $n - d = 1$.
В общия случай с $n - d \geq 2$ можем да предполагаме, че a_n е алгебрично над $k(a_1, \ldots, a_{n-1})$. По индукционно предположение съществува базис на трансцендентност $c_1, \ldots, c_d$ на $k(a_1, \ldots, a_{n-1})$ над k и сепарабелен над $k(c_1, \ldots, c_d)$ елемент θ_1, така че $k(a_1, \ldots, a_{n-1}) = k(c_1, \ldots, c_d, \theta_1)$. За разширението $F = k(c_1, \ldots, c_d, \theta_1, a_n)$ със сепарабелен над $k(c_1, \ldots, c_d)$ елемент θ_1 и алгебричен над $k(c_1, \ldots, c_d)$ елемент a_n съществува примитивен елемент $\theta_2 \in F$ над $k(c_1, \ldots, c_d)$, така че $F = k(c_1, \ldots, c_d, \theta_2)$. Повтаряйки разглежданията от случая $n - d = 1$ получаваме базис на трансцендентност $b_1, \ldots, b_d$ на F над k и сепарабелен над $k(b_1, \ldots, b_d)$ елемент $\theta \in F$, така че $F = k(b_1, \ldots, b_d, \theta)$ и минималният полином $g \in k(b_1, \ldots, b_d)[x]$ на θ над $k(b_1, \ldots, b_d)$ е от вида $g = f \frac{h'}{h''}$ за неразложим над k и над $k(b_1, \ldots, b_d)$ полином $f \in k[b_1, \ldots, b_d, x]$ и $h', h'' \in k[b_1, \ldots, b_d]$, $h''(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$, Q.E.D.
Сега ще реализираме разширенията $F = k(b_1, \ldots, b_d, \theta) \supset k$ с базис на трансцендентност $b_1, \ldots, b_d$ над k и сепарабелен над $k(b_1, \ldots, b_d)$ елемент θ като функционално поле на неприводима афинна хиперповърхнина.

Следствие 11.7. *Нека k е алгебрично затворено поле, $F = k(b_1, \ldots, b_d, \theta)$ за трансцендентни над k елементи $b_1, \ldots, b_d$ и сеапрабелен над $k(b_1, \ldots, b_d)$ елемент θ, чийто минимален полином над $k(b_1, \ldots, b_d)$ е от вида $g = f \frac{h'}{h''}$ за неразложим над k и над $k(b_1, \ldots, b_d)$ полином $f \in k[b_1, \ldots, b_d, x]$ и $h', h'' \in k[b_1, \ldots, b_d]$, $h''(b_1, \ldots, b_d) \neq 0$. Тогава $Z(f) \subset k^{d+1}$ е неприводима афинна хиперповърхнина с функционално поле $k(Z(f)) \simeq F$.*

Доказателство: Алгебричната структура на полето

$$F = k(b_1, \ldots, b_d)(\theta) = k(b_1, \ldots, b_d)[\theta] = l_{k(b_1, \ldots, b_d)}(1, \theta, \ldots, \theta^{m-1})$$

за $m = \deg_x g = \deg_x f$ се определя напълно от полинома $f \in k[b_1, \ldots, b_d, x]$. По-точно, събирането в $F = k(b_1, \ldots, b_d)[\theta]$ се определя напълно от събирането в чисто трансцендентното над k разширение $k(b_1, \ldots, b_d)$. Умножението в $F = k(b_1, \ldots, b_d)[\theta]$ се индуцира от умножението на полиноми на θ с коефициенти от $k(b_1, \ldots, b_d)$. С помощта на f представяме $\theta^l \in l_{k(b_1, \ldots, b_d)}(1, \theta, \ldots, \theta^{m-1})$ за всички $l \geq m$.
По Теоремата на Hilbert за нулите, идеалът $IZ(f) = r(\langle f \rangle)$. Неразложимият над k полином f поражда прост идеал $\langle f \rangle \triangleleft k[b_1, \ldots, b_d, x]$, така че радикалът $r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ и $IZ(f) = \langle f \rangle$ е прост идеал. Това е необходимо и достатъчно условие за неприводимостта на $Z(f) \subset k^{d+1}$.
Функционалното поле $k(Z(f)) = k(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}, \overline{x_{d+1}})$ се поражда от елементите си $\overline{x_i} = x_i + IZ(f) \in k(Z(f))$, $1 \leq i \leq d+1$ над k. Твърдим, че $\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_d}$ са трансцендентни над k. В противен случай съществува нетъждествено нулев

полином $g(x_1,\dots,x_d) \in IZ(f) = \langle f \rangle$. Но полиномът $f \in k[x_1,\dots,x_d,x_{d+1}]$, зависещ от x_{d+1} не може да дели полинома $g(x_1,\dots,x_d)$, който не зависи от x_{d+1}. Това доказва трансцендентността на $\overline{x_1},\dots,\overline{x_d}$ над k. Полиномът f задава алгебрична зависимост на $\overline{x_{d+1}}$ над $k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_d})$. Следователно

$$k(Z(f)) = k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_d})(\overline{x_{d+1}}) = k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_d})[\overline{x_{d+1}}] =$$
$$= l_{k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_d})}(1,\overline{x_{d+1}},\dots,\overline{x_{d+1}}^{m-1}).$$

Събирането и умножението в $k(Z(f))$ се определят напълно от полинома $f \in k[x_1,\dots,x_d,x_{d+1}]$ и съвпадат със съответните операции в F. Следователно полетата F и $k(Z(f))$ са изоморфни, Q.E.D.

Следствие 11.8. *Всяко квази-афинно или квази-проективно многообразие X над алгебрично затворено поле k е бирационално на афинно пространство k^d, $d = \dim(X)$ или на неприводима хиперповърхнина $V(f) \subset k^{d+1}$ в афинно пространство.*

Доказателство: Можем да заменим X с квази-афинно Зариски отворено подмножество X_o, без да променяме функционалното поле $k(X) = k(X_o)$. Ако $X_o \subseteq k^n$, то $k(X_o) = k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ е крайно породено разширение на k.
При $\mathrm{trdeg}_k k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}) = n$ полето $k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ съвпада с функционалното поле на афинното пространство k^n. Следователно X и X_o са бирационални на k^n.
За $\mathrm{trdeg}_k k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}) = d < n$ прилагаме Теорема 12 и получаваме базис на трансцендентност $b_1,\dots,b_d$ на $k(X_o) = k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$ над k, както и трансцендентен над k елемент $\theta \in k(X_o)$, така че $k(X_o) = k(b_1,\dots,b_d,\theta)$ и минималният полином g на θ над $K(b_1,\dots,b_d)$ е от вида $g = f\frac{h'}{h''}$ за неразложим над k и над $k(b_1,\dots,b_d)$ полином $f \in k[b_1,\dots,b_d,x]$ и $h',h'' \in k[b_1,\dots,b_d]$, $h''(b_1,\dots,b_d) \neq 0$. Съгласна Лема 11.7, $Z(f) \subset k^{d+1}$ е неприводима хиперповърхнина с функционално поле $k(Z(f)) = k(b_1,\dots,b_d,\theta) = k(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n}) = k(X_o)$. В резултат, X_o и X са бирационални на $Z(f)$, Q.E.D.

4. Цяла зависимост

Определение 11.9. *Комутативният пръстен с единица S е цял над своя подпръстен с единица R, ако всеки елемент $s \in S$ е цял над R, т.е. за $\forall s \in S$ съществуват $n \in \mathbb{N}$ и $r_0,r_1,\dots,r_{n-1} \in R$, така че*

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \ldots + r_1 s + r_0 = 0.$$

Твърдение 11.10. *Нека R е подпръстен с единица на комутативен пръстен с единица S, а s е елемент на S. Тогава следните условия са еквивалентни:*
(i) s е цял над R;
(ii) подпръстенът $R[s]$ на S е крайно породен R-модул;
(iii) подпръстенът $R[s]$ на S се съдържа в подпръстен с единица S_o на S, който е крайно породен R-модул $S_o = Rs_1 + \ldots + Rs_n$.

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$ Ако s е цял над R, то

$$s^n = \sum_{i=0}^{n-1}(-r_i)s^i \in R1_S + Rs + \ldots Rs^{n-1} = R^{(n)}[s]$$

принадлежи на R-модула $R^{(n)}[s]$ на полиномите на s от степен $\leq n-1$ с коефициенти от R. С индукция по $m \geq n$, ако $s^m = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\rho_{m,j}s^j \in R^{(n)}[s]$, то

$$s^{m+1} = \sum_{j=0}^{n-2}\rho_{m,j}s^{j+1} + \rho_{m,n-1}s^n = \sum_{i=1}^{n-1}\rho_{m,i-1}s^i + \rho_{m,n-1}\left[\sum_{i=0}^{n-1}(-r_i)s^i\right] =$$

$$= -\rho_{m,n-1}r_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(\rho_{m,i-1} - \rho_{m,n-1}r_i)s^i \in R^{(n)}[s],$$

така че $R[s] = \sum\limits_{j=0}^{\infty} Rs^j \subseteq R^{(n)}[s] = R1_S + Rs + \ldots + Rs^{n-1} \subseteq R[s]$ и $R[s] = R^{(n)}[s]$ е крайно породен R-модул.

Импликацията $(ii) \Rightarrow (iii)$ е тривиална с $S_o := R[s]$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Нека S_o е подпръстен с единица на S, съдържащ $R[s]$, който е крайно породен R-модул, $S_o = Rs_1 + \ldots + Rs_m$. Тогава умножението с s е изображение $\mu_s : S_o \to S_o$, $\mu_s(\sigma) = s\sigma$ на S_o в себе си. Още повече, μ_s е хомоморфизъм на R-модули, защото

$$\mu_s(\sigma + \tau) = s(\sigma + \tau) = s\sigma + s\tau = \mu_s(\sigma) + \mu_s(\tau) \quad \text{и}$$

$$\mu_s(r\sigma) = s(r\sigma) = (sr)\sigma = (rs)\sigma = r(s\sigma) = r\mu_s(\sigma) \quad \text{за} \quad \forall \sigma, \tau \in S_o, \quad \forall r \in R.$$

Да забележим, че μ_s се определя еднозначно от образите $\mu_s(s_1), \ldots, \mu_s(s_m)$ на пораждащите на S_o като R-модул. За $\forall 1 \leq i \leq m$ съществуват $r_{i,j} \in R$, така че $S_o \ni \mu_s(s_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} r_{i,j}s_j$. Образуваме $m \times m$-матрицата $\mu_s E_m$ и $m \times m$-матрицата $M_o = (r_{i,j})_{i,j=1}^m$. Забелязваме, че

$$(\mu_s E_m - M_o)\begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_i \\ \ldots \\ s_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_s(s_1) - \sum\limits_{j=1}^{m} r_{1,j}s_j \\ \ldots \\ \mu_s(s_i) - \sum\limits_{j=1}^{m} r_{i,j}s_j \\ \ldots \\ \mu_s(s_m) - \sum\limits_{j=1}^{m} r_{m,j}s_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нека $(\mu_s E_m - M_o)^*$ е $m \times m$-матрицата, която в i-ти ред и j-ти стълб съдържа адюнгираното количество на (j,i)-тия елемент на $\mu_s E_m - M_o$. Тогава произведението $(\mu_s E_m - M_o)^*(\mu_s E_m - M_o) = \det(\mu_s E_m - M_o)E_m$ е скаларна матрица и

$$\begin{pmatrix} \det(\mu_s E_m - M_o)s_1 \\ \ldots \\ \det(\mu_s E_m - M_o)s_i \\ \ldots \\ \det(\mu_s E_m - M_o)s_m \end{pmatrix} = (\mu_s E_m - M_o)^*(\mu_s E_m - M_o)\begin{pmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_i \\ \ldots \\ s_m \end{pmatrix} =$$

$$= (\mu_s E_m - M_o)^*\begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полиномът

$$\det(\mu_s E_m - M_o) = \mu_s^m - \left(\sum_{i=1}^{m} r_{i,i}\right)\mu_s^{m-1} + c_2\mu_s^{m-2} + \ldots + c_{m-1}\mu_s + (-1)^m \det(M_o) \tag{11.2}$$

на μ_s с коефициенти $c_i \in R$ е хомоморфизъм $\det(\mu_s E_m - M_o) : S_o \to S_o$ на R-модули, действащ по правилото

$$\det(\mu_s E_m - M_o)(\sigma) = \left(\sum_{i=0}^{m} c_i \mu_s^{m-i}\right)(\sigma) = \sum_{i=0}^{m} c_i s^{m-i}\sigma$$

върху $\forall \sigma \in S_o$. Да отбележим, че $\det(\mu_s E_m - M_o)$ се анулира тъждествено върху S_o, защото се анулира върху всеки от пораждащите $s_1, \ldots, s_m$ на S_o като R-модул. В частност, стойността на $\det(\mu_s E_m - M_o)$ върху единицата $1_S = 1_R$ е

$$s^m - \left(\sum_{i=1}^{m} r_{i,i} \right) s^{m-1} + c_2 s^{m-2} + \ldots + c_{m-1} s + (-1)^m \det(M_o) = 0.$$

По определение, това означава, че $s \in S$ е цял над R, Q.E.D.

Следствие 11.11. *Нека R е комутативен подпръстен с единица на комутативен пръстен с единица S, а $s_1, \ldots, s_n \in S$ са елементи на S. В такъв случай, крайно породената R-алгебра $R[s_1, \ldots, s_n]$ е крайно породен R-модул тогава и само тогава, когато $s_1, \ldots, s_n$ са цели над R.*

Доказателство: Ако R е комутативен подпръстен с единица на комутативен пръстен с единица S, то S е R-алгебра. Да предположим, че крайно породената R-алгебра $R[s_1, \ldots, s_n]$ е крайно породен R-модул. Тогава съгласно Твърдение 11.10, всяко s_i е цяло над R, защото подпръстенът $R[s_i]$ на S се съдържа в подпръстена с единица $R[s_1, \ldots, s_n] \subseteq S$, който е крайно породен R-модул.
Ако $s_1, \ldots, s_n$ са цели над R, то с индукция по $1 \leq i \leq n$ ще докажем, че $A_i = R[s_1, \ldots, s_i]$ е крайно породен R-модул. По Твърдение 11.10, $A_1 = R[s_1]$ е крайно породен R-модул. Да допуснем, че $A_{i-1} := R[s_1, \ldots, s_{i-1}]$ е крайно породен R-модул. Тогава съществуват полиноми $f_j(s_1, \ldots, s_{i-1}) \in R[s_1, \ldots, s_{i-1}] = A_{i-1}$, така че $A_{i-1} = \sum\limits_{j=1}^{m} R f_j$. Разглеждаме

$$A_i := R[s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i] = R[s_1, \ldots, s_{i-1}][s_i] = A_{i-1}[s_i]$$

като A_{i-1}-алгебра. Понеже R е подпръстен на A_{i-1}, елементът $s_i \in S$ е цял над A_{i-1}. Съгласно Твърдение 11.10, пръстенът $A_i = A_{i-1}[s_i]$ е крайно породен A_{i-1}-модул. С други думи, съществуват полиноми $g_s(s_1, \ldots, s_i) \in A_{i-1}[s_i] = R[s_1, \ldots, s_i]$, така че

$$A_i = \sum_{s=1}^{p} A_{i-1} g_s = \sum_{s=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{m} f_j R \right) g_s = \sum_{s=1}^{p} \sum_{j=1}^{m} (f_j g_s) R$$

се поражда като R-модул от pm полиноми $f_j g_s$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq s \leq p$. В частност, $A_n = R[s_1, \ldots, s_n]$ е крайно породен R-модул, Q.E.D.

Определение 11.12. *Нека S е пръстен с единица, R е подпръстен с единица на S. Тогава S е цял над R, ако всеки елемент $s \in S$ е цял над R.*

От Твърдени 11.10 и Следствие 11.11 непосредствено се получава следното

Следствие 11.13. *Нека S е комутативен пръстен с единица, R е подпростен с единица на S и $s_1, \ldots, s_n \in S$. Тогава следните условия са еквивалентни на крайно породената R-алгебра $R[s_1, \ldots, s_n]$:*
(i) пръстенът $R[s_1, \ldots, s_n]$ е цял над R;
(ii) $R[s_1, \ldots, s_n]$ е крайно породен R-модул;
(iii) пораждащите $s_1, \ldots, s_n$ на $R[s_1, \ldots, s_n]$ като R-алгебра са цели над R.

Лема 11.14. *Нека T е комутативен пръстен с единица, S е подпръстен с единица на T, а R е подпръстен с единица на S. Ако T е цял над S и S е цял над R, то T е цял над R.*

Доказателство: За $\forall t \in T$ съществуват $n \in \mathbb{N}$ и $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$, така че

$$t^n + s_{n-1} t^{n-1} + \ldots + s_1 t + s_0 = 0.$$

Това позволява разглеждането на t като цял над $R[s_0, \ldots, s_{n-1}]$ елемент на T. Следователно $R[s_0, \ldots, s_{n-1}][t] = \sum_{j=1}^{p} R[s_0, \ldots, s_{n-1}]\mu_j$ е крайно породен модул над $R[s_0, \ldots, s_{n-1}]$, съгласно Твърдение 11.10. По предположение, $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$ са цели над R, така че $R[s_0, \ldots, s_{n-1}] = \sum_{i=1}^{q} R\lambda_i$ е крайно породен R-модул по Следствие 11.11. Оттук $R[s_0, \ldots, s_{n-1}, t] = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} R\lambda_i\mu_j$ е подпръстен с единица на T, който е крайно породен R-модул. Сега от $R[t] \subseteq R[s_0, \ldots, s_{n-1}, t]$ получаваме, че t е цял над R, прилагайки Твърдение 11.10. Това доказва, че пръстенът T е цял над своя подпръстен с единица R, Q.E.D.

5. Лема на Noether за нормализация

ТЕОРЕМА 13. (Лема на Noether за нормализация) *Нека k е поле, $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата, която не е крайномерно линейно пространство над k, а F е полето от частни на A. Ако F е от степен на трансцендентност $\operatorname{tr}\deg_k(F) = d$ над k, то съществува базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in A$ на F над k, така че k-алгебрата $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ е цяла над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$.*

Доказателство: Степента на трансцендентност d на F над k е максималният брой на трансцендентните над k елементи $\eta_1, \ldots, \eta_d$ на пораждащото множество $\eta_1, \ldots, \eta_n$ на $F = k(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ над k. Оттук, $d \leq n$. Ако $d = n$, то $\eta_1, \ldots, \eta_n$ е базис на трансцендентност на F над k с необходимите свойства.
Отсега нататък ще предполагаме, че $n > d$. Ще работим с индукция по броя на пораждащите n на A като k-алгебра. Съгласно алгебричността на $\eta_1, \ldots, \eta_n$ над k, съществува полином $0 \not\equiv f(t_1, \ldots, t_n) \in k[t_1, \ldots, t_n]$ с

$$0 = f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_n^{\alpha_n},$$

където $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и сумата е крайна.
Твърдим, че $\operatorname{tr}\deg_k(F) = d \geq 1$, защото в противен случай $[F : k] < \infty$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n \in A \subseteq F$ са алгебрични, а оттам и цели над полето k. Тогава по Следствие 11.11, крайно породената k-алгебра $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ е крайномерно линейно пространство над полето k, противно на предположението. Това доказва, че $\operatorname{tr}\deg_k(F) \geq 1$.
Избираме достатъчно голямо естествено число N, така че $N > \alpha_i$ за $\forall \alpha$ с $c_\alpha \neq 0$ и $\forall 1 \leq i \leq n$. Полагаме

$$\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}} \quad \text{за } \forall 2 \leq i \leq n.$$

Представяме

$$0 = f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}\right) = f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right) + f_o(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

чрез полином f_o на $\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, чиито всички мономи са кратни на поне един от елементите $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Въвеждаме лексикографската наредба на мономи $x^\alpha > x^\beta$ с $x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1$. По-точно, $x^\alpha > x^\beta$ точно когато, съществува $1 \leq i \leq n$, така че $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, $\ldots$, $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$, $\alpha_i > \beta_i$.
Нека $c_\gamma \eta^\gamma$ е максималният относно обратната лексикографска наредба моном на f с ненулев коефициент $c_\gamma \neq 0$. Твърдим, че мономът $c_\gamma \eta_1^{\gamma_1 + \gamma_2 N + \ldots + \gamma_n N^{n-1}}$ е старши член на полинома

$$f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right) = \sum_{\alpha} c_\alpha \eta_1^{\alpha_1 + \alpha_2 N + \ldots + \alpha_n N^{n-1}},$$

т.е. степенният му показател е строго по-голям от степенните показатели на всички останали мономи с ненулев коефициент. По-точно, ако $x^\alpha < x^\gamma$, то съществува $1 \leq i \leq n$, така че $\alpha_n = \gamma_n$, $\alpha_{n-1} = \gamma_{n-1}$, ..., $\alpha_{i+1} = \gamma_{i+1}$, $\alpha_i < \gamma_i$. Неравенството

$$\gamma_1 + \gamma_2 N + \ldots + \gamma_i N^{i-1} + \gamma_{i+1} N^i + \ldots + \gamma_n N^{n-1} >$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 N + \ldots + \alpha_i N^{i-1} + \alpha_{i+1} N^i + \ldots + \alpha_n N^{n-1}$$

е равносилно на

$$(\gamma_1 - \alpha_1) + (\gamma_2 - \alpha_2)N + \ldots + (\gamma_{i-1} - \alpha_{i-1})N^{i-2} + (\gamma_i - \alpha_i)N^{i-1} > 0.$$

По предположение, $\alpha_s \leq N-1$ и $\gamma_s \geq 0$, така че $\gamma_s - \alpha_s \geq 1-N$ за $\forall 1 \leq s \leq i-1$. Комбинирайки с $\gamma_i - \alpha_i \geq 1$ получаваме

$$(\gamma_1 - \alpha_1) + (\gamma_2 - \alpha_2)N + \ldots + (\gamma_{i-1} - \alpha_{i-1})N^{i-2} + (\gamma_i - \alpha_i)N^{i-1} \geq$$
$$(1-N)(1+N\ldots+N^{i-2}) + N^{i-1} = (1-N^{i-1}) + N^{i-1} = 1 > 0$$

и доказваме, че $c_\gamma \eta_1^{\gamma_1+\gamma_2 N+\ldots+\gamma_n N^{n-1}}$ е старшият моном на $f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right)$. Степенните показатели на η_1 в мономите на $f_o(\eta_1, \zeta_2, \ldots\ldots, \zeta_n)$ са строго по-малки от $\gamma_1 + \gamma_2 N + \ldots + \gamma_n N^{n-1}$, така че можем да разглеждаме полинома $f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}\right) = 0$ като цяла зависимост на η_1 над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ след деление с $c_\gamma \in k^*$.

Да отбележим, че $k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] = k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$, съгласно $\eta_i = \zeta_i + \eta_1^{N^{i-1}} \in k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ за $\forall 2 \leq i \leq n$ и $\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}} \in k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. В резултат, $F = k(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ съвпада с полето от частни на $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$.

Предположенията $n > d \geq 1$ водят до $n \geq 2$. Ако $F = k(\eta_1, \zeta_2)$ е от степен на трансцендентност 1 над k и η_1 е цял над $k[\zeta_2]$, то η_1 е алгебричен над $k(\zeta_2)$ и $\zeta_2 \in k[\zeta_2] \subset k[\eta_1, \zeta_2] = A$ е базис на трансцендентност на F над k. Елементът $\eta_1 \in A = k[\eta_1, \zeta_2]$ е цял над $k[\zeta_2]$, така че пръстенът $A = k[\zeta_2][\eta_1]$ е цял над $k[\zeta_2]$ и Лемата на Noether за нормализация е в сила за $n = 2$ и $d = 1$.

В общия случай, по индукционно предположение имаме базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ на $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ над k, така че $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Твърдим, че $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n] \subset k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е базис на трансцендентност на F над k и $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Наистина, η_1 е алгебричен над $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, така че $[F = k(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) : k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)] < \infty$. От това, че $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ над k имаме $[k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) : k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] < \infty$. Следователно

$$[F : k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] = [F : k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)][k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) : k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] < \infty$$

и $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на F над k. Пораждащият η_1 на $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n] = k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n][\eta_1]$ като $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$-алгебра е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$, така че целият пръстен $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$. Поради транзитивността на цялата зависимост и това, че $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ получаваме, че $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, Q.E.D.

Лемата на Noehter за нормализация дава геометрична интерпретация на размерността на алгебрично многообразие. С нейна помощ се установява независимостта на степента на трансцендентност на функционалното поле от полето на константите.

Лема 11.15. *Ако X/k е квази-афинно или квази-проективно многообразие, определено над съвършено поле k, то степените на трансцендентност*

$$\mathrm{trdeg}_{\overline{k}} \ \ \overline{k}(X) = \mathrm{trdeg}_k \ \ k(X)$$

съвпадат.

Доказателство: След евентуално преминаване към афинно Зариски отворено подмножество можем да считаме, че $X \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие. Да означим с $I(X,k) := I(X) \cap k[x_1,\ldots,x_n]$ идеала на X над k. Тогава афинният координатен пръстен $A = k[X] = l[x_1 + I(X,k),\ldots,x_n + I(X,k)]$ на X над k е крайно породена k-алгебра без делители на нулата. Ако A е крайномерно пространство над k, то $x_i + I(X,k)$ са цели над k, а оттам и над $\overline{k}$. Следователно крайно породените разширения $k(X) = k(x_1 + I(X,k),\ldots,x_n + I(X,k)) \supseteq k$ и $\overline{k}(X) = \overline{k}(x_1 + I(X),\ldots,x_n + I(X)) \supseteq \overline{k}$ са алгебрични от степен на трансцендентност $\mathrm{trdeg}_k\ k(X) = \mathrm{trdeg}_{\overline{k}}\ \overline{k}(X) = 0$.
Отсега нататък ще предполагаме, че размерността на A над k е безкрайна и полето от частни $k(X)$ на A е от степен на трансцендентност $\delta = \mathrm{trdeg}_k\ k(X)$ над k. По Лемата на Noehter за нормализация съществува базис на трансценденост $\psi_1,\ldots,\psi_\delta \in A = k[X]$ на $k(X)$ над k, така че

$$A = k[X] = k[x_1 + I(X,k),\ldots,x_n + I(X,k)]$$

е цял над $A_o = k[\psi_1,\ldots,\psi_\delta]$. Следователно $A = \varphi_1 A_o + \ldots + \varphi_m A_o$ е крайно породен A_o-модул.
Влагането $k[x_1,\ldots,x_n] \hookrightarrow \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]$ индуцира влагане

$$k[X] = k[x_1,\ldots,x_n]/I(X) \cap k[x_1,\ldots,x_n] \hookrightarrow \overline{k}[x_1,\ldots,x_n]/I(X) = \overline{k}[X]$$

в афинния координатен пръстен $A_1 = \overline{k}[X] = \overline{k}[x_1 + I(X),\ldots,x_n + I(X)]$. Да напомним, че $A_1 = \overline{k}[X]$ съвпада с $\overline{k}$-линейната обвивка на $A = k[X]$, $A_1 = l_{\overline{k}}(A)$. Ако $A_2 := l_{\overline{k}}(A_o)$ е $\overline{k}$-линейната обвивка на A_o, то

$$A_1 = l_{\overline{k}}A = \varphi_1 l_{\overline{k}}A_o + \ldots + \varphi_m l_{\overline{k}}A_o = \varphi_1 A_2 + \ldots + \varphi_m A_2$$

е крайно породен A_2-модул, така че A_1 е цял над A_2. Следователно всеки пораждащ $x_i + I(X)$ на $A_1 = \overline{k}[x_1 + I(X),\ldots,x_n + I(X)]$ като $\overline{k}$-алгебра е алгебричен над полето от частни $\overline{k}(\psi_1,\ldots,\psi_\delta)$ на $A_2 = \overline{k}[\psi_1,\ldots,\psi_\delta]$. Функционалното поле $\overline{k}(X) = \overline{k}(x_1 + I(X),\ldots,x_n + I(X)) = F(A_1)$ съвпада с полето от частни на A_1 и е крайно разширение на $\overline{k}(\psi_1,\ldots,\psi_\delta)$. Остава да докажем, че $\psi_1,\ldots,\psi_\delta$ са трансцендентни над $\overline{k}$, за да получим, че $\psi_1,\ldots,\psi_\delta$ е базис на трансцендентност на $\overline{k}(X)$ над $\overline{k}$ и

$$\mathrm{trdeg}_{\overline{k}}\overline{k}(X) = \delta = \mathrm{trdeg}_k k(X).$$

Да допуснем, че съществува $g \in \overline{k}[y_1,\ldots,y_\delta] \setminus \{0\}$ с $g(\psi_1,\ldots,\psi_\delta) = 0$. Нека $E \supseteq k$ е крайно разширение на Galois, съдържащо всички коефициенти на g. Тогава $g \in E[y_1,\ldots,y_\delta]$ и

$$g_o := \prod_{\sigma \in Gal(E/k)} \sigma(g(y_1,\ldots,y_\delta)) \in \overline{k}[y_1,\ldots,y_\delta]^{Gal(E.k)} =$$

$$= \overline{k}[y_1,\ldots,y_\delta]^{Gal(\overline{k}/k)} = k[y_1,\ldots,y_\delta]$$

е ненулев полином с коефициенти от k и $g_o(\psi_1,\ldots,\psi_\delta) = 0$. Това противоречи на трансцендентността на $\psi_1,\ldots,\psi_\delta$ над k и доказва тяхната трансцендентност над $\overline{k}$, Q.E.D.

Следствие 11.16. *Нека $X/k \subseteq \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие с положителна размерност $\dim X \geq 1$, определено над съвършено поле k.*
(i) Размерността на X е онова неотрицателно цяло d, за което съществува краен доминантен k-морфизъм $f = (f_1,\ldots,f_d) : X \to \overline{k}^d$, зададен от елементи $f_1,\ldots,f_d \in k[X]$.
(ii) Размерността на X е максималното неотрицателно цяло d, за което съществува доминантен k-морфизъм $f = (f_1,\ldots,f_d) : X \to \overline{k}^d$, зададен от елементи $f_1,\ldots,f_d \in k[X]$.

Доказателство: Съгласно Лемата на Noehter за нормализация и Лема 11.15, съществува базис на трансцендентност $f_1, \dots, f_d \in k[X]$ на $k(X)$ над k, така че $k[X]$ е цял над $k[f_1, \dots, f_d]$. За произволно естествено число $s \leq d$, влагането $k(f_1, \dots, f_d) \subseteq k(X)$ отговаря на доминантно рационално изображение $(f_1, \dots, f_s) : X \dashrightarrow \overline{k}^s$. Това изображение е k-морфизъм, защото $f_1, \dots, f_s \in k[X]$. В случая $s = d$, разширението $k(X) \supseteq k(f_1, \dots, f_d)$ е крайно, така че доминантният k-морфизъм $f = (f_1, \dots, f_d) : X \to \overline{k}^d$ е краен.
Да допуснем, че съществува доминантен k-морфизъм $\varphi : X \to \overline{k}^s$ за някакво естествено $s > d$. Тогава φ индуцира влагане $\varphi : \overline{k}(x_1, \dots, x_s) \hookrightarrow \overline{k}(X)$ на чисто трансцендентното разширение $\overline{k}(x_1, \dots, x_s)$ на $\overline{k}$. В резултат, $d = \mathrm{trdeg}_{\overline{k}} \overline{k}(X) \geq s > d$, щом $\overline{k}(X)$ съдържа трансцендентните над $\overline{k}$ елементи $x_1, \dots, x_s \in \overline{k}(x_1, \dots, x_s) \subseteq \overline{k}(X)$. Противоречието доказва, че $d = \dim X$ е максималното естествено число, за което съществува доминантен k-морфизъм $X \to \overline{k}^d$, Q.E.D.

Задача 11.17. *Да се докаже, че ако квази-афинно или квази-прективно многообразие X има крайно доминантно рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow k^d$, то X е с размерност d.*

Задача 11.18. *Нека X е квази-проективно многообразие с размерност $\dim(X) = d$. Да се докаже, че съществува крайно доминантно рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^d(k)$.*

6. Повдигане и спускане на идеали

Нека R е подпръстен с единица на комутативния пръстен с единица S, $\mathfrak{p} \triangleleft R$, $\mathfrak{q} \triangleleft S$ са идеали. Ако $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$, то казваме, че $\mathfrak{q}$ лежи над $\mathfrak{p}$.
Непосредствено се вижда, че ако $\mathfrak{q}$ е прост идеал в S, то $\mathfrak{q} \cap R$ е прост идеал в R. По-точно, хомоморфизмът на пръстени $\pi : R \to S/\mathfrak{q}$, $\pi(a) = a + \mathfrak{q}$ има ядро $\ker(\pi) = R \cap \mathfrak{q}$, така че образът $\mathrm{im}(\pi) \simeq R/\ker(\pi) = R/R \cap \mathfrak{q}$ е подпръстен на областта $S/\mathfrak{q}$ и няма делители на нулата. Оттук идеалът $\mathfrak{q} \cap R \triangleleft R$ е прост.

Лема 11.19. *Нека R е подпръстен с единица на комутативната област с единица S, а $\mathfrak{p} \triangleleft R$ е прост идеал. В такъв случай, S съдържа прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$, лежащ над $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$, тогава и само тогава, когато $\mathfrak{p}S$ лежи над $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$.*

Доказателство: Ако $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е прост идеал, лежащ над $\mathfrak{p}$, то от

$$\mathfrak{p}S \cap R \subseteq \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}S \cap R$$

следва $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$.
Обратно, нека $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$. Допълнението $R \setminus \mathfrak{p}$ на простия идеал $\mathfrak{p}$ е мултипликативно затворено подмножество на S, така че можем да образуваме локализацията $S_{\mathfrak{p}} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} S$ на S. От $\mathfrak{p}S \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ следва, че $1 \notin \mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$, защото в противен случай съществува $r \in R \setminus \mathfrak{p}$ с $r = r.1 \in \mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}} \cap (R \setminus \mathfrak{p})$. Следователно съществува максимален идеал $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{M} \triangleleft S_{\mathfrak{p}}$. Нека $\mathfrak{q} = \mathfrak{M} \cap S$. Тогава $S/\mathfrak{q} = S/(\mathfrak{M} \cap S)$ е подпръстен на полето $S_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{M}$, така че $S/\mathfrak{q}$ е област на цялост и идеалът $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е прост.
От $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M}$ следва $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M} \cap R = (\mathfrak{M} \cap S) \cap R = \mathfrak{q} \cap R$. От друга страна, максималният идеал $\mathfrak{M} \triangleleft S_{\mathfrak{p}}$ е собствен и не пресича множеството $R \setminus \mathfrak{p}$ на обратимите елементи на $S_{\mathfrak{p}}$. В резултат, $\mathfrak{q} \cap R = (\mathfrak{M} \cap S) \cap R = \mathfrak{M} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$, така че $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ и простият идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ лежи над простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$, Q.E.D.

Лема 11.20. *Нека S е комутативен пръстен с единица, R е подпръстен с единица на S, S е цял над R и $\mathfrak{q}$ е прост идеал в S. В такъв случай, идеалът $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е максимален тогава и само тогава, когато идеалът $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ е максимален.*

Доказателство: Ще докажем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле тогава и само тогава, когато $S/\mathfrak{q}$ е поле. За целта да забележим, че фактор-пръстенът $S/\mathfrak{q}$ е цял над фактор-пръстена $R/\mathfrak{p}$. По-точно, за $\forall s \in S$ с цяла зависимост

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

над $R \ni a_1, \ldots, a_n$ получаваме равенството

$$(s+\mathfrak{q})^n + (a_1+\mathfrak{q})(s+\mathfrak{q})^{n-1} + \ldots + (a_{n-1}+\mathfrak{q})(s+\mathfrak{q}) + (a_n+\mathfrak{q}) = 0. \quad (11.3)$$

Понеже $R/\mathfrak{p} = R/\mathfrak{q} \cap R$ е подпръстен на $S/\mathfrak{q}$, можем да отъждествим $a_i + \mathfrak{q}$ с $a_i + \mathfrak{p}$ за $a_i \in R$ и да разглеждаме (11.3) като цяла зависимост на $s+\mathfrak{q}$ над $R/\mathfrak{p}$. Да допуснем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле и да разгледаме произволен ненулев елемент $y \in (S/\mathfrak{q}) \setminus \{\mathfrak{q}\}$. Ако

$$y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}y + \alpha_n = 0$$

е цялата зависимост на y над $R/\mathfrak{p} \ni \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ от минимална степен, то почленното умножение с $\alpha_n^{-1}y^{-1}$ за $\alpha_n^{-1} \in R/\mathfrak{p}$ дава

$$y^{-1} = -\alpha_n^{-1}(y^{n-1} + \alpha_1 y^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}) \in S/\mathfrak{q}.$$

Следователно y е обратим в $S/\mathfrak{q}$ и $S/\mathfrak{q}$ е поле.
Обратно, ако $S/\mathfrak{q}$ е поле и $x \in (R/\mathfrak{p}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ е произволен ненулев елемент, то съществува $x^{-1} \in S/\mathfrak{q}$. Нека

$$x^{-m} + c_1 x^{-m+1} + \ldots + c_{m-1}x^{-1} + c_m = 0$$

е цяла зависимост на x^{-1} над $R/\mathfrak{p} \ni c_1, \ldots, c_m$. Умножавайки почленно с x^{m-1} получаваме

$$x^{-1} = -(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) \in R/\mathfrak{p}.$$

Това доказва, че x е обратим в $R/\mathfrak{p}$ и $R/\mathfrak{p}$ е поле, Q.E.D.

ЛЕМА 11.21. *Нека S е комутативна област с единица, R е подпръстен с единица на S, S е цял над R и $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ са различни прости идеали в S. Тогава*

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R \subsetneq \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$$

са различни прости идеали в R.

Доказателство: Да допуснем, че $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}$ за различни прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ в S. Локализацията

$$S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{s}{r} \;\middle|\; s \in S, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

относно $\mathfrak{p}$ или $R \setminus \mathfrak{p}$ е цяла над локализацията

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \;\middle|\; r_1 \in R, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\},$$

защото произволна цяла зависимост

$$s^m + r_1 s^{m-1} + \ldots + r_{m-1}s + r_m = 0$$

на $s \in S$ над $R \ni r_1, \ldots, r_m$ индуцира цяла зависимост

$$\left(\frac{s}{r}\right)^m + \rho_1 \left(\frac{s}{r}\right)^{m-1} + \ldots + \rho_{m-1}\left(\frac{s}{r}\right) + \rho_m = 0$$

на $\frac{s}{r}$ над $R_{\mathfrak{p}} \ni \rho_1, \ldots, \rho_m$ след почленно умножение с r^{-m} за $r \in R \setminus \mathfrak{p}$.
Твърдим, че локализациите $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{q}_j \lhd S$ относно $\mathfrak{p}$ са прости идеали, лежащи над локализацията $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \lhd R_{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{p} \lhd R$ относно $\mathfrak{p}$. За простотата на $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ да предположим, че $\frac{s_1}{r_1}\frac{s_2}{r_2} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ с $s_1, s_2 \in S$, $r_1, r_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$. Тогава от $s_1 s_2 \in \mathfrak{q}_j$ следва $s_1 \in \mathfrak{q}_j$ или $s_2 \in \mathfrak{q}_j$. В резултат, $\frac{s_1}{r_1} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ или $\frac{s_2}{r_2} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ и идеалът $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ е прост. Относно $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ забелязваме, че от $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_j \cap R \subseteq \mathfrak{q}_j$ следва $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$. Включванията $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ и $R_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$ дават $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$, а оттам и $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap S_{\mathfrak{p}}$. Обратно, ако $\frac{s}{r_1} = \frac{r_2}{r_3} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}}$ с $s \in \mathfrak{q}_j$, $r_1, r_3 \in R \setminus \mathfrak{p}$, $r_2 \in R$,

то $x := sr_3 = r_1r_2 \in \mathfrak{q}_j \cap R = \mathfrak{p}$. В резултат, $\frac{r_2}{r_3} = \frac{x}{r_1r_3} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ и $(\mathfrak{q}_j)_\mathfrak{p} \cap R_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Това доказва, че $(\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p} \cap R_\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{p} \cap R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ за простите идеали $(\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p}$, $(\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{p}$ в $S_\mathfrak{p}$.
Пръстенът $R_\mathfrak{p}$ е локален с единствен максимален идеал $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$. Съгласно Лема 11.20, простите идеали $(\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p} \subseteq (\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{p}$ над $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ са максимални идеали в $S_\mathfrak{p}$, защото $S_\mathfrak{p}$ е цял над $R_\mathfrak{p}$. Следователно $(\mathfrak{q}_1)_\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}_2)_\mathfrak{p}$ съвпадат. Сега за произволно $s_2 \in \mathfrak{q}_2 \setminus \mathfrak{q}_1$ съществуват $s_1 \in \mathfrak{q}_1$ и $r \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че $s_2 = \frac{s_1}{r}$. Оттук, $s_2 r = s_1 \in \mathfrak{q}_1$ за простия идеал $\mathfrak{q}_1 \triangleleft S$ с $s_2 \not\in \mathfrak{q}_1$ и $r \in R \setminus \mathfrak{p} \subseteq S \setminus \mathfrak{q}_1$ е противоречие, доказващо $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ за $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$, Q.E.D.
Ако S е комутативна област с единица, R подпръстен с единица на S и $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R, то локализацията $S_\mathfrak{p} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} S$ на S относно $\mathfrak{p}$ не винаги е локален пръстен. Следващата задача дава геометричен пример за това.

Задача 11.22. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f \in k[x_1]$ е полином от нечетна степен,*

$$X = \{(x_1, x_2) \in k^2 \mid x_2^2 = f(x_1)\},$$

$f(0) = a^2$ за някое $a \in k^* = k \setminus \{0\}$. Да се докаже, че:
(i) X е афинно многообразие;
(ii) афинният координатен пръстен $k[X]$ на X е цял над полиномиалния пръстен $k[x_1]$;
(iii) подпръстенът

$$k[X]_{\langle x_1 \rangle} = \left\{ \frac{g(\overline{x_1}, \overline{x_2})}{t(\overline{x_1})} \;\middle|\; g \in k[x_1, x_2], \quad h \in k[x_1], \quad h(0) \neq 0, \quad \overline{x_i} = x_i + I(X) \right\}$$

на функционалното поле

$$k(X) = \left\{ \frac{g(\overline{x_1}, \overline{x_2})}{h(\overline{x_1}, \overline{x_2})} \;\middle|\; g, h \in k[x_1, x_2], \quad \overline{x_i} = x_i + I(X) \right\}$$

не е локален. По-точно, ако $I_X((0,a)) \triangleleft k[X]$ и $I_X((0,-a)) \triangleleft k[X]$ са максималните идеали на точките $(0,a), (0,-a) \in X$, то $\mathfrak{M}_1 := (k[x_1] \setminus \langle x_1 \rangle)^{-1} I_X((0,a))$ и $\mathfrak{M}_2 := (k[x_1] \setminus \langle x_1 \rangle)^{-1} I_X((0,-a))$ са различни максимални идеали в $k[X]_{\langle x_1 \rangle}$.

Твърдение 11.23. *Нека комутативната област с единица S е цял над своя подпръстен с единица R, а $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R. Тогава съществува прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ над $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.*

Доказателство: Локализацията $S_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{s}{r} \;\middle|\; s \in S, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на S относно $\mathfrak{p}$ е цяла над локализацията $R_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{r_1}{r} \;\middle|\; r_1 \in R, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на R, съгласно доказателството на Лема 11.21. Разглеждаме комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & S \arrow[d, "\beta"] \\ R_\mathfrak{p} \arrow[r] & S_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

от влагания на области. Произволен максимален идеал $\mathfrak{N} \triangleleft S_\mathfrak{p}$ лежи над максимален идеал $\mathfrak{N} \cap R_\mathfrak{p} \triangleleft R_\mathfrak{p}$, съгласно Лема 11.20. Пръстенът $R_\mathfrak{p}$ е локален, така че

$$\mathfrak{N} \cap R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{r_1}{r} \;\middle|\; r_1 \in \mathfrak{p}, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

съвпада с единствения максимален идеал $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ на $R_\mathfrak{p}$.
Твърдим, че $\mathfrak{q} := \mathfrak{N} \cap S$ е прост идеал в S, защото фактор-пръстенът $S/\mathfrak{q}$ е подпръстен на полето $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{N}$. Остава да проверим, че $\mathfrak{q} \triangleleft S$ лежи над $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p} \triangleleft R$. Ако $r \in \mathfrak{N} \cap R \subseteq \mathfrak{N} \cap R_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$, то съществуват $r_1 \in \mathfrak{p}$ и $r_0 \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че

$r = \frac{r_1}{r_0}$. В резултат, $r_1 = rr_0 \in \mathfrak{p}$ с $r_0 \not\in \mathfrak{p}$ дава $r \in \mathfrak{p}$ за простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$. Това доказва включването $\mathfrak{N} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$. За обратното включване използваме, че $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{p} \subseteq R$. Това доказва $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{N} \cap R$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{N} \cap R = \mathfrak{q} \cap R$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 11.24. *Нека комутативната област с единица S е цяла над своя подпръстен с единица R и $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ е редица от прости идеали в R. Тогава съществува редица от прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ в S, така че $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$.*

Доказателство: Твърдение 11.23 дава съществуването на прост идеал $\mathfrak{q}_1 \triangleleft S$ над $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$. В доказателството на Лема 11.20 проверихме, че комутативната област с единица $S/\mathfrak{q}_1$ е цяла над комутативната област с единица $R/\mathfrak{p}_1$. Влагането на $R/\mathfrak{p}_1$ в $S/\mathfrak{q}_1$ е по правилото

$$R/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1,$$

$$r + \mathfrak{p}_1 \mapsto r + \mathfrak{q}_1 \quad \text{за} \quad \forall r \in R.$$

Следователно съществува прост идеал $\overline{\mathfrak{q}_2} \triangleleft S/\mathfrak{q}_1$ над $\overline{\mathfrak{q}_2} \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$. Идеалът $\overline{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$ е фактор на прост идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft S$, съдържащ $\mathfrak{q}_1$. Твърдим, че от $(\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$ следва $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Наистина, за $\forall x \in \mathfrak{p}_2$ имаме $x + \mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$, така че съществува $y \in \mathfrak{q}_2$ с $x + \mathfrak{q}_1 = y + \mathfrak{q}_1$. От $x - y \in \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ и $y \in \mathfrak{q}_2$ следва $x \in \mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{q}_2 \cap R$. Обратно, $\forall r \in \mathfrak{q}_2 \cap R$ индуцира елемент $r + \mathfrak{q}_1 \in (\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$. Следователно съществува $r_o \in \mathfrak{p}_2$ с $r + \mathfrak{q}_1 = r_o + \mathfrak{q}_1$. Оттук $r - r_o \in \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ и $r \in \mathfrak{p}_2$. Това доказва $\mathfrak{q}_2 \cap R \subseteq \mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Простият идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft S$ съдържа строго простия идеал $\mathfrak{q}_1 \triangleleft S$, защото от $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ следва $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Продължавайки по същия начин повдигаме строго растящата редица $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ от прости идеали в R до строго растяща редица $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ от прости идеали в S с $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, Q.E.D.

7. Топологична размерност. Размерност на Krull.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.25. *Размерността на неприводимо топологично пространство X е супремумът на неотрицателните цели n, за които съществува строго растяща редица*

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n = X$$

от непразни, неприводими, затворени подмножества $Z_i \subseteq X$.
Ако топологичното пространство $X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ е обединение на неприводими подпространства X_α, то размерността на X е супремумът

$$\dim(X) = \sup_{\alpha \in A} \dim(X_\alpha)$$

на размерностите на неприводимите компоненти α.

Размерността на афинно или проективно алгебрично множество X относно топологията на Зариски се нарича топологична размерност на X и се бележи с $\dim_{Zar}(X)$. Ще докажем, че над алгебрично затворено поле k, размерността $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg_k(k(X))$ на афинно или проективно многообразие X съвпада с топологичната размерност $\dim_{Zar}(X)$.
Твърдим, че всяко афинно или проективно многообразие X има топологична размерност $\tau = \dim_{Zar}(X) \leq \dim(X) = d$ и съществува строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\tau = X$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества с дължина $\tau + 1$. По-точно, по Твърдение 11.3, всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_m = X \tag{11.4}$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества $Z_i \subseteq X$ има строго растяща редица от размерности

$$0 \leq \dim(Z_0) < \dim(Z_1) < \ldots < \dim(Z_{m-1}) < \dim(X).$$

Сега от $\dim(Z_i) \in \{0, 1, \ldots, d\}$ за $\forall 0 \leq i \leq m$ следва $m + 1 \leq d + 1$ и $d \geq \tau = \dim_{Zar}(X)$. Ако допуснем, че не съществува строго растяща редица (11.4) с $m + 1 = \tau + 1$ члена, то всички редици от вида (11.4) са с дължина $\leq \tau$ и $\dim_{Zar}(X) \leq \tau - 1$, противно на избора на $\tau = \dim_{Zar}(X)$. Следователно съществува редица (11.4) с $\tau + 1$ члена. Всяка такава редица е неуплътняема и в нея Z_0 е точка.

Размерността на афинно или проективно алгебрично множество X относно топологията на Zariski е крайна, защото $X = X_1 \cup \ldots \cup X_l$ е обединение на краен брой неприводими компоненти X_i с крайни топологични размерности $\dim_{Zar}(X_i) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

За да докажем равенството $\dim(X) = \dim_{Zar}(X)$ ще преминем към афинно Зариски отворено подмножество $X_o \subseteq X$, за да сравним $\dim(X_o)$ и $\dim_{Zar}(X_o)$ с размерността на Krull на афинния координатен пръстен $k[X_o]$ на X_o.

Определение 11.26. *Размерността на Krull $\dim_{Krull}(R)$ на комутативен пръстен с единица R е супремъмът на неотрицателните цели числа n, за които съществува строго растяща редица*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m \tag{11.5}$$

от прости идеали $\mathfrak{p}_i \lhd R$.

Лема 11.27. *Ако $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, то топологичната размерност*

$$\dim_{Zar}(X) = \dim_{Krull}(k[X])$$

на X съвпада с размерността на Krull на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X. В частност, $k[X]$ има крайна размерност на Krull.

Доказателство: Да означим $\tau = \dim_{Zar}(X)$, $\kappa = \dim_{Krull}(k[X])$ и да разгледами някаква строго растяща редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m \tag{11.6}$$

от прости идеали в афинния координатен пръстен $k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$. Всеки идеал $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i/I(X)$ в $k[X]$ се повдига до идеал $\mathfrak{q}_i \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащ идеала $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ на X. Идеалите $\mathfrak{q}_i \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ са прости, защото фактор-пръстените

$$k[X]/\mathfrak{p}_i = \{k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)\}/\{\mathfrak{q}_i/I(X)\} \simeq k[x_1, \ldots, x_x]/\mathfrak{q}_i$$

са изоморфни. Афинните алгебрични множества $Y_i := Z(\mathfrak{q}_i)$, определени от $\mathfrak{q}_i$ имат идеали $I(Y_i) = IZ(\mathfrak{q}_i) = r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{q}_i$ и са неприводими.

Твърдим, че простите полиномиални идеали $\mathfrak{q}_i$ образуват строго растяща редица

$$I(X) \subseteq \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m.$$

По-точно, от включванията $\mathfrak{q}_i/I(X) = \mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1} = \mathfrak{q}_{i+1}/I(X)$ получаваме, че за всеки елемент $s_i \in \mathfrak{q}_i$ съществува $s_{i+1} \in \mathfrak{q}_{i+1}$, така че $s_i + I(X) = s_{i+1} + I(X)$. Това е в сила точно когато можем да намерим $\alpha \in I(X) \subset \mathfrak{q}_{i+1}$, така че $s_i = s_{i+1} + \alpha \in \mathfrak{q}_{i+1}$. С това проверихме, че $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{q}_{i+1}$. Допускането $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{q}_{i+1}$ води до съвпадение на факторите $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{q}_i/I(X) = \mathfrak{q}_{i+1}/I(X) = \mathfrak{p}_{i+1}$.

Да отбележим, че афинните многообразия $Y_i := Z(\mathfrak{q}_i)$ образуват строго намаляваща редица

$$X \supseteq X \cap Y_0 \supsetneq X \cap Y_1 \supsetneq \ldots \supsetneq X \cap Y_m \neq \emptyset \tag{11.7}$$

от непразни, неприводими, относително затворени подмножества на X. За целта да напомним, че от включванията $\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{q}_{i+1}$ следват обратните включвания $Y_i = Z(\mathfrak{q}_i) \supset Z(\mathfrak{q}_{i+1}) = Y_{i+1}$ на съответните афинни многообразия. Допускането $Y_i = Y_{i+1}$ води до съвпадение на идеалите $\mathfrak{q}_i = r(\mathfrak{q}_i) = IZ(\mathfrak{q}_i) = I(Y_i) = I(Y_{i+1}) = IZ(\mathfrak{q}_{i+1}) = r(\mathfrak{q}_{i+1}) = \mathfrak{q}_{i+1}$, което е противорие, доказващо строгостта на включванията в (11.7). От наличието на строго намаляващата редица (11.7) от непразни, неприводими Зариски затворени подмножества на X следва, че $m \leq \tau$. Твърдим, че $\kappa \leq \tau$. В противен случай, съпремумът на неотрицателните цели m, за които съществува (11.6) не надминава τ и е строго по-малък от κ. При това, съществува строго растяща редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\kappa \tag{11.8}$$

от $\kappa + 1$ прости идеала в $k[X]$, защото в противен случай, супремумът на $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, за които съществува (11.6) не надминава $\kappa - 1$. Редицата (11.8) е неуплътняема.
Нека

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_m = X \tag{11.9}$$

е строго растяща редица от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества на X. Полиномиалните идеали на тези подмножества образуват строго намаляваща редица

$$I(Z_0) \supsetneq I(Z_1) \supsetneq \ldots \supsetneq I(Z_{m-1}) \supsetneq I(Z_m) = I(X)$$

от прости идеали, съдържащи $I(X)$. Тук използваме, че от $Z_i \subset Z_{i+1}$ следва $I(Z_i) \supset I(Z_{i+1})$. Ако предположим, че $I(Z_i) = I(Z_{i+1})$, то $Z_i = ZI(Z_i) = ZI(Z_{i+})$, съгласно затвореността на Z_j. Факторите

$$I(Z_0)/I(X) \supsetneq I(Z_1)/I(X) \supsetneq \ldots \supsetneq I(Z_{m-1})/I(X) \supsetneq \{0\}$$

образуват строго намаляваща редица от прости идеали в афинния координатен пръстен $k[X]$ на X, така че $m \leq \kappa$. По-точно, изеалите $I(Z_i)/I(X) \triangleleft k[X]$ са прости, защото факторите им $k[X]/\{I(Z_i)/I(X)\} \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/I(Z_i)$ са области на цялост. Да допуснем, че $I(Z_i)/I(X) = I(Z_{i+1})/I(X)$ и да изберем елемент $s_i \in I(Z_i) \setminus I(Z_{i+1})$. Тогава съществува $s_{i+1} \in I(Z_{i+1})$, така че $s_i + I(X) = s_{i+1} + I(X)$. В резултат, можем да намерим $\alpha \in I(X) \subseteq I(Z_{i+1})$, така че $s_i = s_{i+1} + \alpha \in I(Z_{i+1})$, противно на избора на $s_i \notin I(Z_{i+1})$. Това доказва строгостта на включванията $I(Z_i)/I(X) \supsetneq I(Z_{i+1})/I(X)$. От неравенството $m \leq \kappa$ следва неравенството $\tau \leq \kappa$ и $\tau = \kappa$, защото супремумът τ на $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, за които съществува (11.9) не надминава горната граница κ на тези m, Q.E.D.
Нека R е комутативен пръстен с единица и размерност на Krull κ. Тогава във всяка неуплътняема строго растяща редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_\kappa$$

от $\kappa + 1$ прости идеали, последният идеал $\mathfrak{p}_\kappa$ е максимален. Още повече, ако R е комутативна област с единица, то първият идеал $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ е нулевият.

Лема 11.28. *Нека $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие над алгебрично затворено поле k. Тогава размерността*

$$\dim(X) = \dim_{Krull}(k[X])$$

на X съвпада с размерността на Krull на $k[X]$.

Доказателство: Нека $\dim X = \mathrm{trdeg}_k k(X) = d$. Съгласно Следствие 11.16 от Лемата на Noehter за нормализация, съществува краен доминантен морфизъм

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_d) : X \longrightarrow k^d,$$

зададен от полиноми $\varphi_1, \ldots, \varphi_d \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Функционалното поле $k(k^d) = k(x_1, \ldots, x_d)$ на афинното пространство k^d е чисто трансцендентно разширение на k от степен d. Достатъчно е да докажем, че

$$\dim_{Krull}(k[X]) = \dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d,$$

за да установим верността на лемата.
За целта да отбележим, че идеалите $\mathfrak{p}_i = \langle x_1, \ldots, x_i \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_d]$ са прости за $\forall 1 \leq i \leq d$, защото съответните им афинни алгебрични подмножества $V(\mathfrak{p}_i) = k^{d-i}$ в k^d са неприводими. Твърдим, че строго растящата редица

$$\{0\} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 = \langle x_1 \rangle \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle \subsetneq k[x_1, \ldots, x_d] \qquad (11.10)$$

от $d+1$ прости идеала в полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_d]$ е неуплътняема и $\dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d$. В противен случай съществува прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_d]$, така че $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ за някое $0 \leq i \leq d-1$. Съответните афинни алгебрични подмножества в k^d изпълняват строгите включвания

$$Z(\mathfrak{p}_{i+1}) = k^{d-i-1} \subsetneq Z(\mathfrak{p}) \subsetneq Z(\mathfrak{p}_i) = k^{d-i}.$$

По Твърдение 11.3, размерностите на тези многообразия образуват строго растяща редица $d-i-1 < \dim Z(\mathfrak{p}) < d-i$. Това противоречи на $\dim(Z(\mathfrak{p}) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и доказва неуплътняемостта на редицата от прости идеали (11.10), а оттам и равенството $\dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d$.
За $\dim_{Krull}(k[X]) = \dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d])$ да отбележим, че комутативната област с единица $k[X]$ е цяла над своя подпръстен с единица $k[x_1, \ldots, x_d]$, съгласно доказателството на Следствие 11.16. Неуплътняемата строго растяща редица (11.10) от прости идеали в $k[x_1, \ldots, x_d]$ се повдига до строго растяща редица

$$\{0\} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d$$

от прости идеали в $k[X]$ с $\mathfrak{q}_i \cap k[x_1, \ldots, x_d] = \mathfrak{p}_i$. Следователно $d \leq \tau = \dim_{Krull}(k[X])$. Вече споменахме, че $\tau = \dim_{Krull}(k[X]) \leq \dim(X) = d$. В резултат, $\dim_{Krull}(k[X]) = \tau = d$, Q.E.D.

Теорема 14. *Ако X е афинно или проективно многообразие над алгебрично затворено поле k, то размерността*

$$\dim(X) = \dim_{Zar}(X)$$

на X съвпада с топологичната размерност $\dim_{Zar}(X)$ на X.

Доказателство: Достатъчно е да докажем теоремата за афинно многобразие. По-точно, произволно проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ има афинно отворено подмножество $X \cap U_i$ със същото функционално поле $k(X \cap U_i) = k(X)$, което е афинно многообразие в $U_i \simeq k^n$. Оттук $\dim(X) = \dim(X \cap U_i)$. Твърдим, че топологичните размерности $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$ съвпадат. Означаваме $\tau = \dim_{Zar}(X)$, $\tau_o = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$. Съгласно Твърдение 6.32(i), всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_{\tau_o} = X \cap U_i$$

от непразни, неприводими, относително затворени подмножества $W_j \subseteq X \cap U_i$ индуцира строго растяща редица

$$\emptyset \neq \overline{W_0} \subsetneq \overline{W_1} \subsetneq \ldots \subsetneq \overline{W_{\tau_o}} = X$$

от подмногообразия на X, така че $\tau_o \leq \tau$. По Твърдение 6.32(ii), всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\tau = X$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества на X пресича някакво стандартно афинно отворено подмножество U_i, т.е. съществува $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $Z_0 \cap U_i \neq \emptyset$. Тогава

$$\emptyset \neq Z_0 \cap U_i \subsetneq Z_1 \cap U_i \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\tau \cap U_i = X \cap U_i$$

е строго растяща редица от подмногообразия на $X \cap U_i$, така че $\tau \leq \tau_o$. Следователно $\tau = \tau_o$, т.е. $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$.
За афинно многообразие $X \cap U_i \subseteq U_i \simeq k^n$ над алгебрично затворено поле k знаем, че

$$\dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim_{Krull}(k[X \cap U_i])$$

по Лема 11.27 и

$$\dim_{Krull}(k[X]) = \dim(X \cap U_i)$$

по Лема 11.28. Следователно

$$\dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i),$$

откъдето $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i) = \dim(X)$, Q.E.D.

Задача 11.29. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие, $Y \subseteq X$ е подмногообразие. Да се докаже, че локалният пръстен $\mathcal{O}_Y(X)$ на Y в X има размерност на Krull $\dim_{Krull} \mathcal{O}_Y(X) \geq \dim(X) - \dim(Y)$.*

Упътване: Да означим $d = \dim(Y)$, $d + k = \dim(X)$. Тогава $\dim_{Krull} k[Y] = d$ и съществува неуплътняема строго растяща редица от $d + 1$ прости идеала

$$\mathfrak{q}_0 = I(Y) \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n],$$

съдържащи полиномиалния идеал $I(Y)$ на Y. От $Y \subseteq X$ следва $I(X) \subseteq I(Y)$. Нека

$$I(X) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m = I(Y)$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали, съдържащи $I(X)$ и съдържащи се в $I(Y)$. Тогава

$$I(X) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m = I(Y) = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащи $I(X)$. Съгласно $\dim_{Krull} k[X] = \dim(X) = d + k$, в тази редица участват точно $m + 1 + d = d + k + 1$ идеала. Следователно $m = k$.
Ако $I(X) \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq I(Y)$ е прост идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащ строго $I(X)$ и съдържащ се в $I(Y)$, то локализацията

$$J = (\mathfrak{p}/I(X))_{I_X(Y)} = (k[X] \setminus I_X(Y))^{-1}(\mathfrak{p}/I(X))$$

на фактора $\mathfrak{p}/I(X)$ е прост идеал в $k[X]_{I_X(Y)} = \mathcal{O}_Y(X)$. По-точно, ако $r_1, r_2 \in k[X]$, $s_1, s_2 \in k[X] \setminus I_X(Y)$ и $\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \in J$, то съществуват елементи $r \in \mathfrak{p}/I(X)$ и $s \in k[X] \setminus I_X(Y)$ с $\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r}{s}$. Оттук $r_1 r_2 s = r s_1 s_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$ за простия идеал $\mathfrak{p}/I(X) \triangleleft k[X]$. Ако допуснем, че $s \in \mathfrak{p}/I(X)$, то $s \in I(Y)/IX() = I_X(Y)$, противно на избора на s. Следователно $r_1 r_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$, откъдето $r_1 \in \mathfrak{p}/I(X)$ или $r_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$. С това установихме, че J е прост идеал в $\mathcal{O}_Y(X)$.
Може да се докаже, че всеки идеал в локализацията $k[X]_{I_X(Y)}$ на $k[X]$ по простия идеал $I_X(Y)$ е локализация на прост идеал в $k[X]$, съдържащ се в $I_X(Y)$. Оттук следва, че $\dim_{Krull}(\mathcal{O}_Y(X)) = \dim(X) - \dim(Y)$.

Задача 11.30. *Нека k е алгебрично затворено поле, $k[a_1, \dots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност на Krull*

$$\dim_{Krull}(k[a_1, \dots, a_n]) = d,$$

а $\mathfrak{M} \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ е максимален идеал в $k[a_1, \dots, a_n]$. Да се докаже, че съществува строго растяща редица

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \mathfrak{q}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$$

от прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ с $\mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$.

Упътване: По Лемата на Noether за нормализация, съществува базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_d \in k[a_1, \dots, a_n]$ на полето от частни

$$k(a_1, \dots, a_n) = F(k[a_1, \dots, a_n])$$

на областта $k[a_1, \dots, a_n]$, така че $k[a_1, \dots, a_n]$ е цял над полиномиалния пръстен $k[b_1, \dots, b_d] \simeq k[x_1, \dots, x_d]$. Идеалът $\mathfrak{N} := \mathfrak{M} \cap k[b_1, \dots, b_d]$ е максимален. Поточно, фактор-пръстенът $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N}$ е подпръстен на полето

$$k[a_1, \dots, a_n]/\mathfrak{M} \simeq k.$$

Но $k \simeq k + \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ е подпръстен на $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N}$, така че $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N} = k$ и $\mathfrak{N} \triangleleft k[b_1, \dots, b_d]$ е максимален идеал. Нека $\mathfrak{N} = \langle b_1 - s_1, \dots, b_d - s_d \rangle_{k[b_1, \dots, b_d]}$ се поражда от $b_i - s_i$ за някакви $s_i \in k$, $1 \leq i \leq d$. Тогава

$$\mathfrak{p}_i := \langle b_1 - s_1, \dots, b_i - s_i \rangle_{k[b_1, \dots, b_d]} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

образуват строго растяща редица

$$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap k[b_1, \dots, b_d]$$

от прости идеали в $k[b_1, \dots, b_d]$. Разгледайте редицата

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$$

от повдигания на $\mathfrak{p}_i \triangleleft k[x_1, \dots, x_d]$ до прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$.

Задача 11.31. *Нека k е алгебрично затворено поле, а $X \subseteq k^n$ е d-мерно афинно многообразие над k. Да се докаже, че всяка точка $a \in X$ се съдържа в строго растяща редица*

$$\{a\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_{d-1} \subsetneq Z_d = X$$

от подмногообразия $Z_i \subseteq X$ с размерност $\dim(Z_i) = i$ за $1 \leq i \leq d-1$.

Задача 11.32. *Нека k е поле, $k[a_1, \dots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност ан Krull $\dim_{Krull}(k[a_1, \dots, a_n]) = d$, а $\mathfrak{q}_1$ е минимален ненулев прост идеал в $k[a_1, \dots, a_n]$, т.е. не съществува прост идеал $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_1$ в $k[a_1, \dots, a_n]$. Да се докаже, че $\mathfrak{q}_1$ се влага в строго растяща редица*

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_d \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$$

от прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$.

Упътване: Ако $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_s \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[a_1, \dots, a_n]$, то

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_s \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[a_1, \dots, a_n]$.

Задача 11.33. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие с размерност $\dim(X) = d$, а $Y \subsetneq X$ е максимално собствено подмногообразие. Да се докаже, че $\dim(Y) = d-1$ и съществува строго растяща редица*

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_{d-1} = Y \subsetneq X$$

от подмногообразия $Z_i \subseteq Y$ с размерност $\dim(Z_i) = i$.

Задача 11.34. *Нека k е поле, а $k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност на Krull $\dim_{Krull}(k[a_1, \ldots, a_n]) = 1$. Да се докаже, че:*
(i) за произволен полином $f \in k[a_1, \ldots, a_n]$, пръстенът $k[a_1, \ldots, a_n]$ а $k[f]$-модул;
(ii) съществува полином $f \in k[a_1, \ldots, a_n]$, така че $k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породен $k[f]$-модул.

Ако полиномите $f_1, \ldots, f_m \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ задават неприводимо афинно алгебрично множество $X = Z(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \overline{k}^n$, то $\dim X \geq n - m$. За целта е достатъчно да проверим, че за произволно неприводимо афинно алгебрично множество $Y \subseteq \overline{k}^n$ и произволен елемент $f \in \overline{k}[Y]$ на афинния координатен пръстен, пораждащ идеал $\langle f \rangle \triangleleft \overline{k}[Y]$ с прост радикал $\mathfrak{p} = r(\langle f \rangle) \triangleleft \overline{k}[Y]$, неприводимото афинно алгебрично множество $Z = Y \cap Z(f) \subseteq \overline{k}^n$ е с размерност $\dim Z \geq \dim Y - 1$. По Лемата на Noether за нормализация, ако $\dim Y = d$, то съществува базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \overline{k}[Y]$ на $\overline{k}(Y)$ над $\overline{k}$, така че $\overline{k}[Y]$ е цял над $\overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Крайното разширение $\overline{k}(Y) \supseteq \overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ се влага в крайно разширение на Galois $E \supseteq \overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. От една страна,

$$f_o := \prod_{\sigma \in Gal(E/\overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d))} \sigma(f) \in E^{Gal(E/\overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d))} = \overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d),$$

а от друга страна, $f_o \in \overline{k}[Y]$, така че $f_o \in \overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d) \cap \overline{k}[Y] = \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ е полином на $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Твърдим, че $\mathfrak{p} \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] = r(\langle f_o \rangle)$. От една страна, $f_o \in \langle f \rangle \triangleleft \overline{k}[Y]$ дава $r(\langle f_o \rangle) \subseteq r(\langle f \rangle) = \mathfrak{p}$, откъдето $r(\langle f_o \rangle) \subseteq \mathfrak{p} \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. От друга страна, произволен елемент $g \in \mathfrak{p} \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] = r(\langle f \rangle) \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ има $g^N = fh$ за някои $h \in \overline{k}[Y]$ и $N \in \mathbb{N}$. Оттук,

$$g_o = \prod_{\sigma \in Gal(E/\overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d))} \sigma(g) \in E^{Gal(E/\overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d))} = \overline{k}(\xi_1, \ldots, \xi_d)$$

е кратен на f_o и $\mathfrak{p} \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] \subseteq r(\langle f_o \rangle) \triangleleft \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Това доказва, че

$$\mathfrak{p} \cap \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] = r(\langle f_o \rangle).$$

В резултат, композицията $\varphi : \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] \to \overline{k}[Y]/\mathfrak{p}$ на тъждественото влагане $\overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] \hookrightarrow \overline{k}[Y]$ с естествения епиморфизъм $\overline{k}[Y] \to \overline{k}[Y]/\mathfrak{p}$ индуцира такова влагане

$$\overline{\varphi} : \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]/\overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d] \cap \mathfrak{p} = \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]/r(\langle f_o \rangle) \hookrightarrow \overline{k}[Y]/\mathfrak{p}$$

в областта $\overline{k}[Y]/\mathfrak{p}$, че $\overline{k}[Y]/\mathfrak{p}$ е цял над $\overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]/r(\langle f_o \rangle)$ и размерността на Krull

$$\dim Z = \dim_{Krull} \overline{k}[Y]/\mathfrak{p} = \dim_{Krull} \overline{k}[\xi_1, \ldots, \xi_d]/r(\langle f_o \rangle) \geq d - 1.$$