Глава 14

# Дивизори. Теорема на Riemann. Род на крива.

Определение 14.1. *Нека $F$ е функционално поле на една променлива, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете на еквивалентност на дискретните нормирания на $F$. Тогава $\mathbb{Z}$-линейните комбинации*

$$D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v, \quad n_v \in \mathbb{Z}$$

*с краен носител се наричат дивизори на $F$.*

Множеството $Div(F)$ на дивизорите на $F$ е $\mathbb{Z}$-модул или абелева група.

Определение 14.2. *Дивизорът $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ е ефективен, ако $n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$.*

Определение 14.3. *Степента на дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ е*

$$\deg(D) = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v \deg(v),$$

*където $\deg(v) = [\mathcal{O}_v / \mathfrak{M}_v : k]$ са степените на класовете дискретни нормирания $v$ на $F$.*

Степента на дивизор е хомоморфизъм на $\mathbb{Z}$-модули, защото

$$\deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v + \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v\right) = \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} (n_v + m_v) v\right) = \sum_{v \in \mathcal{P}} (n_v + m_v) \deg(v) =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v \deg(v) + \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v \deg(v) = \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v\right) + \deg\left(\sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v\right).$$

Множеството $Div^0(F) = \ker(\deg)$ на дивизорите от степен 0 е $\mathbb{Z}$-подмодул на $Div(F)$.
Дивизорът на нулите на $x \in F$ е

$$(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x) v,$$

а дивизорът на полюсите е

$$(x)_\infty = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) < 0} [-v(x)] v.$$

Лема 14.4. *Ако $F$ е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи $k$ и $x \in F \setminus k$, то*

$$\deg(x)_0 \leq [F : k(x)].$$

**Доказателство:** Елементът $x \in F \setminus k$ е трансцендентен над $k$, съгласно алгебричната затвореност на $k$ в $F$. Следователно разширението $F \supseteq k(x)$ е крайно и можем да означим с $n = [F : k(x)]$ степента му. Да допуснем, че

$$n < \deg(x)_0 = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x)v.$$

Тогава съществува крайна сума

$$\sum_{j=1}^{r} v_j(x) \deg(v_j) > n, \tag{14.1}$$

защото ако всички крайни суми са $\leq n$, то и границата им е $\leq n$. Съгласно Апроксимационната Теорема 8, за $\forall 1 \leq j \leq r$ съществува $y_j \in F$, така че

$$v_j(y_j) = -1, \quad v_i(y_j) = 0 \quad \text{за} \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{j\}.$$

Тогава $t_j = y_j^{-1}$ са локални параметри на пръстените $\mathcal{O}_{v_j}$ на класовете дискретни нормирания $v_j$ и $v_i(t_j) = 0$ за $\forall i \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{j\}$. Избираме базиси

$$\{\alpha_{js} + \mathfrak{M}_{v_j} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j) = \dim_k \mathcal{O}_{v_j}/\mathfrak{M}_{v_j}\}$$

на полетата от остатъци $\mathcal{O}_{v_j}/\mathfrak{M}_{v_j}$ над $k$ с $\alpha_{js} \in \mathcal{O}$ за сечението $\mathcal{O} = \cap_{j=1}^{r} \mathcal{O}_{v_j}$. За целта трябва да проверим, че за всяко $\beta \in \mathcal{O}_{v_j}$ съществува $\alpha \in \mathcal{O}$ с $\beta - \alpha \in \mathfrak{M}_{v_j}$. Това следва от Апроксимационната Теорема 8, съгласно която за произволен елемент $\beta \in \mathcal{O}_{v_j}$ съществува $\alpha \in F$ с

$$v_j(\alpha - \beta) \geq 1 \quad \text{и} \quad v_i(\alpha) \geq 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq r, \quad i \neq j.$$

Достатъчно е да докажем линейната независимост на

$$\{\alpha_{js} t_j^{-i} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j), \quad 1 \leq i \leq v_j(x), \quad 1 \leq j \leq r\}$$

над $k(x)$, за да получим $\sum\limits_{j=1}^{r} v_j(x) \deg(v_j) \leq [F : k(x)]$, противно на (14.1). Да допуснем, че съществуват $h_{j,i,s}(x) \in k(x)$ с

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} \sum_{i=1}^{v_j(x)} h_{j,i,s}(x) \alpha_{js} t_j^{-i} = 0 \tag{14.2}$$

и поне едно $h_{j_o,i_o,s_o}(x) \neq 0$. След почленно умножение с най-малкия общ знаменател на рационалните функции $h_{j,i,s}(x)$ на $x$ можем да считаме, че $h_{j,i,s}(x) \in k[x]$ са полиноми на $x$. Представяме полиномите

$$h_{j,i,s}(x) = k_{j,i,s} + x g_{j,i,s}(x)$$

като суми на свободните им членове $k_{j,i,s} = h_{j,i,s}(0)$ и полиноми с частни $g_{j,i,s}(x)$ при деление с $x$. Разбиваме (14.2) в две суми

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{v_j(x)} \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} k_{j,i,s} \alpha_{js} t_j^{-i} + x \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{v_j(x)} \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} g_{j,i,s}(x) \alpha_{js} t_j^{-i} = 0. \tag{14.3}$$

От $\alpha_{j,s} \in \mathcal{O}_{v_j} \setminus \mathfrak{M}_{v_j} = \mathcal{O}_{v_j}^*$ следва

$$A_{j,i} = \sum_{s=1}^{\deg(v_j)} k_{j,i,s} \alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j}.$$

Съгласно линейната независимост на $\{\alpha_{js} + \mathfrak{M}_{v_j} \mid 1 \leq s \leq \deg(v_j)\}$ над $k$, допускането $A_{j,i} \in \mathfrak{M}_{v_j}$ води до $k_{j,i,s} = 0$ за $\forall 1 \leq s \leq \deg(v_j)$ и фиксираните

$1 \leq j \leq r$, $1 \leq i \leq v_j(x)$. От друга страна,

$$B_{j,i} = \sum_{s=1}^{\deg(v_i)} g_{j,i,s}(x)\alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j},$$

защото $\alpha_{js} \in \mathcal{O}_{v_j}$ и $g_{j,i,s}(x) \in k[x] \subseteq \mathcal{O}_{v_j}$ за $v_j(x) > 0$. По този начин получаваме

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i}t_j^{-i} + x\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i}t_j^{-i} = 0. \tag{14.4}$$

Ако всички $A_{j,i} = 0$, то делим на подходяща степен на $x$ и получаваме (14.4) с поне едно $A_{j_o,i_o} \neq 0$ и $A_{j,i} \in \mathcal{O}_{v_j}^*$ за $\forall A_{j,i} \neq 0$. Тогава $v_j\left(A_{j,i}t_j^{-i}\right) = -i$ за $\forall A_{j,i} \neq 0$ и прилагайки неравенството на триъгълника с равенство за ненулевите събираеми на $\sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} A_{j_o,i}t_{j_o}^{-i}$ получаваме $v_{j_o}\left(\sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} A_{j_o,i}t_{j_o}^{-i}\right) = -i_1 < 0$ за максималното естествено $i_1$ с $A_{j_o,i_1} \neq 0$. Неравенството на триъгълника за останалите събираеми в лявата сума от (14.4) дава

$$v_{j_o}\left(\sum_{j\neq j_o}\sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i}t_j^{-i}\right) \geq 0,$$

съгласно $A_{j,i} \in \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{v_{j_o}}$ и $v_{j_o}(t_j) = 0$ за $\forall j \neq j_o$. Общо, стойността на $v_{j_o}$ върху лявата сума от (14.4) е

$$v_{j_o}\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i}t_j^{-i}\right) = -i_1 < 0,$$

съгласно неравенството на триъгълника с равенство. По-нататък, за всички $1 \leq i \leq v_{j_o}(x)$ имаме $v_{j_o}(xt_{j_o}^{-i}) = v_{j_o}(x) - i \geq 0$ и $v_{j_o}(B_{j_o,i}) \geq 0$, откъдето

$$v_{j_o}\left(x\sum_{i=1}^{v_{j_o}(x)} B_{j_o,i}t_{j_o}^{-i}\right) \geq 0.$$

За произволно $j \in \{1,\dots,r\} \setminus \{j_o\}$ е в сила $v_{j_o}(t_j^{-i}) = 0$, откъдето

$$v_{j_o}(xB_{j,i}t_j^{-i}) = v_{j_o}(x) + v_{j_o}(B_{j,i}) > 0,$$

съгласно $v_{j_o}(x) > 0$ и $v_{j_o}(B_{j,i}) \geq 0$. Прилагайки неравенството на триъгълника получаваме

$$v_{j_o}\left(x\sum_{j\neq j_o}\sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i}t_j^{-i}\right) > 0 \quad \text{и} \quad v_{j_o}\left(x\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i}t_j^{-i}\right) \geq 0.$$

Сега

$$0 > -i_1 = v_{j_o}\left(\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i}t_j^{-i}\right) = v_{j_o}\left(-\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} A_{j,i}t_j^{-i}\right) =$$

$$= v_{j_o}\left(x\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{v_j(x)} B_{j,i}t_j^{-i}\right) \geq 0$$

е противоречие, доказващо линейната независимост на

$$\{\alpha_{js}t_j^{-i} \;\mid\; 1 \leq s \leq \deg(v_j),\ \ 1 \leq i \leq v_j(x),\ \ 1 \leq j \leq r\},$$

Q.E.D.

Следствие 14.5. *Ако $F$ е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи $k$, то всеки елемент $x \in F \setminus k$ има най-много краен брой нули $v \in \mathcal{P}$, $v(x) > 0$ и най-много краен брой полюси $v \in \mathcal{P}$, $v(x) < 0$.*

**Доказателство:** От

$$\sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x) \deg(v) = \deg(x)_0 \leq [F : k(x)] = n$$

следва, че класовете дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ с $v(x) > 0$ са не повече от $n$, защото степените $\deg(v)$ са естествени числа. Вземайки предвид, че $v\left(\frac{1}{x}\right) = -v(x) > 0$ точно когато $v(x) < 0$, стигаме до извода, че полюсите $v \in \mathcal{P}$ на $x$ са точно нулите на $\frac{1}{x}$. От

$$\sum_{v \in \mathcal{P}, v\left(\frac{1}{x}\right) > 0} v\left(\frac{1}{x}\right) \deg(v) = \deg\left(\frac{1}{x}\right)_0 \leq \left[F : k\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

получаваме, че $v \in \mathcal{P}$ с $v(x) < 0$ са краен брой или полюсите на $x$ са краен брой, Q.E.D.

Следствие 14.6. *Ако $F$ е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи $k$, то всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс и поне една нула.*
*Затова изображението*

$$div : F^* \longrightarrow Div(F),$$

$$div(x) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v = \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) > 0} v(x)v - \sum_{v \in \mathcal{P}, v(x) < 0} (-v(x))v = (x)_0 - (x)_\infty$$

*е хомоморфизъм на групи с ядро* $\ker(div) = k^*$.

**Доказателство:** Достатъчно е да проверим, че всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс, защото тогава $\frac{1}{x} \in F \setminus k$ ще има поне един полюс и $x \in F \setminus k$ ще има поне една нула. Да допуснем, че $x \in F \setminus k$ няма полюси, т.е. $v(x) \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Тогава за всички класове дискретни нормирания $w$ на $F * \overline{k}$ е в сила $w(x) \geq 0$, защото $w|_F = v$. Класовете дискретни нормирания $w$ на $F * \overline{k}$ са във взаимно еднозначно съответствие с точките $p$ на гладка проективна крива $C$ с функционално поле $F$. Следователно $x \in \cap_{p \in C} \mathcal{O}_p(C) = \mathcal{O}_C(C)$. Разглеждаме проективния морфизъм

$$\Phi_x : C \longrightarrow \mathbb{P}^1(\overline{k}),$$

$$\Phi_x(p) = [x(p) : 1].$$

Съгласно Теорема **??**, образът $\Phi_x(C)$ е затворено подмножество на $\mathbb{P}^1(\overline{k})$. Вземайки предвид неприводимостта на $\Phi_x(C)$, получаваме, че $\Phi_x(C) = \mathbb{P}^1(\overline{k})$ или $\Phi_x(C)$ е точка. От $[1 : 0] \not\in \Phi_x(C)$ става ясно, че $\Phi_x(C) = \{[c : 1]\}$ е точка и $x \equiv c \in k$. Противоречието доказва, че всеки елемент $x \in F \setminus k$ има поне един полюс.
Изображението $div : F^* \to Div(F)$ е хомоморфизъм на групи, защото

$$div(xy) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(xy)v = \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(x)+v(y))v = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} v(y)v = div(x) + div(y).$$

Елементите на $k^*$ нямат нито нули, нито полюси, така че $k^* \subseteq \ker(div)$. Ако допуснем, че съществува $x \in \ker(div) \setminus k^*$, то $x \in F \setminus k$ и $x$ има както нула $v \in \mathcal{P}$, $v(x) > 0$, така и полюс $w \in \mathcal{P}$, $w(x) < 0$. В резултат, $div(x) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(x)v \neq 0$, противно на $x \in \ker(div)$. Това доказва, че $\ker(div) = k^*$, Q.E.D.
Дивизорите върху проективни многообразия са асоциирани с линейни разслоения. Преди да опишем това съответствие да напомним, че векторно разслоение $E$ над многообразие $M$ е фамилия $E = \cup_{x \in M} E_x$ от линейни пространства

$E_x \simeq \overline{k}^r$, параматризирана от точките $x$ на $M$. Тази фамилия има регулярна проекция $\pi : E \to M$, изобразяваща $E_x$ в $x$ и за всяка точка $x_o \in M$ съществуват отворена околност $U$ на $x_o$ върху $M$ и тривиализация $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \overline{k}^r$ на $E$ върху $U$ с $\varphi_U(E_x) = \{x\} \times \overline{k}^r$. Векторното разслоение $E \to M$ е от ранг $r$, ако $E_x \simeq \overline{k}^r$ за $\forall x \in M$. Векторните разслоения от ранг 1 се наримат линейни. Ако $\varphi_U$ и $\varphi_V$ са тривиализации на векторното разслоение $E$ над пресичащи се отворени подмножества $U$ и $V$ на $M$, то изображението $g_{UV} = \varphi_U \varphi_V^{-1} : U \cap V \to GL(r, \overline{k})$ се нарича функция на прехода на от $V$ към $U$. Функциите на прехода изпълняват тъждествата

$$g_{UV}(x) g_{VU}(x) = E_r \quad \text{за} \quad \forall x \in U \cap V \quad \text{и} \tag{14.5}$$

$$g_{UV}(x) g_{VW}(x) g_{WU}(x) = E_r \quad \text{за} \quad \forall x \in U \cap V \cap W, \tag{14.6}$$

където $E_r$ е единичната матрица от ред $r$. Обратно, нека $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено покритие на $M$ с изображения $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r, \overline{k})$, изпълняващи равенствата (14.5) и (14.6). Твърдим, че съществува единствено векторно разслоение $E \to M$ то ранг $r$ с функции на прехода $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$. За целта разглеждаме обединението $\cup_{\alpha \in A}(U_\alpha \times \overline{k}^r)$. Отъждествяваме $(x, v) \in U_\beta \times \overline{k}^r$ с $(x, g_{\alpha,\beta}(x)v) \in U_\alpha \times \overline{k}^r$ за $\forall \alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq \beta$ и означаваме полученото пространство с $E$. Непоследствено се проверява, че $E$ е векторно разслоение от ранг $r$ върху $M$ с функции на прехода $g_{\alpha,\beta}$.

Нека $\pi : L \to M$ е линейно разслоение с тривиализации $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \overline{k}$ за $\alpha \in A$. Произволни неанулиращи се регулярни функции $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ задават тривиализации $\varphi'_\alpha = f_\alpha \varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \overline{k}$ с функции на прехода $g'_{\alpha,\beta} = \left(\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right) g_{\alpha,\beta}$. Обратно, произволни тривиализации $\varphi''_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \overline{k}$ на $\pi : L \to M$ имат частни $\frac{\varphi''_\alpha}{\varphi_\alpha} \in \overline{k}^*$, така че функциите на прехода $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ и $\{g'_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ определят едно и също линейно разслоение тогава и само тогава, когато съществуват функции $f_\alpha \in \mathcal{O}^*(U_\alpha)$ с $g'_{\alpha,\beta} = \left(\frac{f_\alpha}{f_\beta}\right) g_{\alpha,\beta}$.

Нека $C$ е крива, определена над крайно поле $\mathbb{F}_q$. Съгласно Теорема 18, класовете дискретни нормирания $v$ на функционалното поле $F = \mathbb{F}_q(C)$ на $C$ над $\mathbb{F}_q$ са във взаимно еднозначно съответствие с $\mathbb{F}_q$-затворените точки $Orb(p) = Orb_{Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)}(p)$, $p \in C$. Произволен дивизор $D = \sum\limits_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ върху $C$ може да се интерпретира като $\mathbb{Z}$-линейна комбинация на $\mathbb{F}_q$-затворени точки

$$D = \sum_{p \in C} n_p Orb(p),$$

където сумирането е по краен брой представители на $Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$-орбити върху $C$. В резултат, съществува отворено покритие $C = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, така че $U_\alpha \cap D = div(f_\alpha)$ са главни дивизори. Локалните уравнения $f_\alpha$ на $D$ върху $U_\alpha$ имат неанулиращи се регулярни частни

$$g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Непосредствено се проверява, че $g_{\alpha,\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta}\Big|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ изпълняват тъждествата (14.5) и (14.6), така че $\{g_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta \in A}$ са функции на прехода на линейно разслоение над $C$. Това линейно разслоение се бележи с $L_D$ и се нарича асоцирано с дивизора $D$. Ако $\pi : L_D \to C$ е проекцията на линейното разслоение, асоцирано с дивизора $D$, то изображенията $s : C \to L_D$ с $\pi s = \mathrm{Id}_C$ се наричат глобални сечения на $L_D$. Нека $s_o : C \to L_D$ е глобално рационално сечение с дивизор

$div(s_o) = D$, а $\Gamma(C, L_D)$ е множеството на глобалните регуларни сечения на $L_D$. Тогава

$$\Gamma(C, L_D) = s_o\mathcal{L}(D) \quad \text{за} \quad \mathcal{L}(D) = \{f \in k(C)^* \mid div(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Множеството $\mathcal{L}(D)$ от рационални функции върху $C$ е линейно пространство над $k$. Наистина, условието $\alpha f \in \mathcal{L}(D)$ за $\forall f \in \mathcal{L}(D)$ и $\forall \alpha \in k$ е ясно. Нека $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ с $n_v \in \mathbb{Z}$, а $f, g \in \mathcal{L}(D)$. Условието

$$div(f) + D = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v = \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(f) + n_v)v \geq 0$$

е еквивалентно на $v(f) + n_v \geq 0$ за всички класове дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$. Аналогично, $v(g) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$, съгласно $div(g) + D \geq 0$. За да установим, че $f + g \in \mathcal{L}(D)$ за произволни $f, g \in \mathcal{L}(D)$, оценяваме

$$div(f+g) + D = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f+g)v + \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{P}} (v(f+g) + n_v)v \geq \sum_{v \in \mathcal{P}} [\min(v(f), v(g)) + n_v]v \geq 0$$

с помощта на неравенството на триъгълника $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$ за произволен клас дискретни нормирания $v$.
С известна неточност ще отъждествяваме множеството $\Gamma(C, L_D) = s_o\mathcal{L}(D)$ на глобалните регулярни сечения на $L_D$ с $k$-линейното пространство $\mathcal{L}(D)$, което го параметризира.

Определение 14.7. *Линейната система $|D|$ на дивизор $D$ върху крива $C$, определена над съвършено поле $k$ е множеството*

$$|D| = \{E \in Div(C) \mid E = div(f) + D \geq 0, \quad f \in k(C)^*\}$$

*на ефективните дивизори върху $C$, които са линейно еквивалентни с $D$.*

Ефективните дивизори $E = div(f) + D \geq 0$ върху $C$, които са линейно еквивалентни с $D$ са във взаимно еднозначно съответствие с дивизорите $E - D = div(f)$ на рационалните функции $f \in \mathcal{L}(D)$. Затова имаме изоморфизъм на множества

$$|D| \simeq \{div(f) \mid f \in k(C)^*, \quad div(f) + D \geq 0\}.$$

Рационалните функции $f, g \in k(C)^*$ имат един и същи дивизор $div(f) = div(g)$ точно когато

$$div\left(\frac{f}{g}\right) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v\left(\frac{f}{g}\right)v = \sum_{v \in \mathcal{P}} [v(f) - v(g)]v =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{P}} v(f)v - \sum_{v \in \mathcal{P}} v(g)v = div(f) - div(g) = 0.$$

Последното е еквивалентно на $\frac{f}{g} \in k^*$, съгласно Следствие 14.6. Следователно линейната система

$$|D| \simeq \{div(f) \mid f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}\} = \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}/k^* = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$$

на дивизор $D$ върху $C$ е изоморфна на проективизацията на пространството $\mathcal{L}(D)$, параметризиращо глобалните регулярни сечения на асоциираното линейно разслоение $L_D$ на $D$.
В следващата лема са събрани някои свойства на линейните пространства $\mathcal{L}(D)$.

ЛЕМА 14.8. *(i) За произволни дивизори $G \geq D$ върху крива $C$, $\mathcal{L}(D)$ е подпространство на $\mathcal{L}(G)$.*
*(ii) За произволни дивизори $G \geq D$ е в сила*

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D)\right) \leq \deg(G) - \deg(D).$$

*(iii) $\mathcal{L}(0) = k$.*
*(iv) За произволен ефективен дивизор $D \geq 0$, размерността*

$$l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \geq 1.$$

*(v) За произволен дивизор $D$ размерността $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) < \infty$ е крайна.*
*(vi) За произволен дивизор $D$ и произволна рационална функция $x \in F = k(C)$ е в сила $l(D) = l(D + div(x))$.*

**Доказателство:** (i) По определение, ако $x \in \mathcal{L}(D)$, то $div(x)+D \geq 0$, откъдето $div(x)+G = div(x)+D+(G-D) \geq 0$, защото дивизорът $G-D \geq 0$ е ефективен.
(ii) Достатъчно е да докажем, че

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(D+v)/\mathcal{L}(D)\right) \leq deg(v) \quad \text{за} \quad \forall v \in \mathcal{P}. \tag{14.7}$$

Тогава с индукция по броя на събираемите в $G - D \geq 0$, ако $G = G' + v$ и допуснем, че

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(G')/\mathcal{L}(D)\right) \leq \deg(G') - \deg(D) \quad \text{за} \quad G' \geq D, \quad \text{то}$$

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(G'+v)/\mathcal{L}(G')\right) \leq \deg(v) \quad \text{дава}$$

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(G'+v)/\mathcal{L}(D)\right) \leq [\deg(G') + \deg(v)] - \deg(D).$$

Тук използваме, че ако $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ са крайномерни линейни пространства над поле $k$, то $\dim_k(A_3/A_1) = \dim_k(A_3/A_2) + \dim_k(A_2/A_1)$. За да проверим (14.7) за $D = \sum\limits_{w \in \mathcal{P}} n_w w$ избираме $u \in F$ с $v(u) = n_v+1$. Тогава всяко $x \in \mathcal{L}(D+v)$ има регулярно във $v$ произведение $xu \in \mathcal{O}_v$, защото $v(xu) = v(x) + v(u) = v(x) + n_v + 1 \geq 0$. Това ни дава възможност да разгледаме изображението

$$\psi : \mathcal{L}(D+v) \longrightarrow \mathcal{O}_v/\mathfrak{M}_v,$$

$$\psi(x) = xu + \mathfrak{M}_v.$$

Съгласно $\psi(x_1+x_2) = (x_1+x_2)u+\mathfrak{M}_v = (x_1u+\mathfrak{M}_v)+(x_2u+\mathfrak{M}_v) = \psi(x_1)+\psi(x_2)$ за $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}(D+v)$ и $\psi(\lambda x) = \lambda xu + \mathfrak{M}_v = \lambda(xu + \mathfrak{M}_v) = \lambda\psi(x)$ за $\forall \lambda \in k$, $\forall x \in \mathcal{L}(D+v)$, изображението $\psi$ е $k$-линейно. Ядрото

$$\ker(\psi) = \{x \in \mathcal{L}(D+v) \ \mid \ xu \in \mathfrak{M}_v\} =$$

$$= \{x \in \mathcal{L}(D+v) \ \mid \ v(x) + v(u) = v(x) + n_v + 1 \geq 1\} =$$

$$= \{x \in \mathcal{L}(D+v) \ \mid \ v(x) + n_v \geq 0\} = \mathcal{L}(D).$$

Следователно образът $\mathcal{L}(D+V)/\mathcal{L}(D) \simeq \operatorname{im}(\psi)$ има размерност

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(D+v)/\mathcal{L}(D)\right) = \dim_k \operatorname{im}(\psi) \leq \dim_k \left(\mathcal{O}_v/\mathfrak{M}_v\right) = \deg(v).$$

(iii) По определение,

$$\mathcal{L}(0) = \{x \in k(C)^* \ \mid \ div(x) \geq 0\} \cup \{0\} = k^* \cup \{0\} = k,$$

защото единствените рационални функции $x \in k(C)^*$ без полюси са константите от $k^*$.
(iv) Ако $D \geq 0$, то съгласно (i) и (iii) имаме $\mathcal{L}(D) \supseteq \mathcal{L}(0) = k$, токъдето $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \geq 1$.
(v) Ако дивизорът $D \geq 0$ е ефективен, то съгласно (ii) имаме

$$\dim_k \left(\mathcal{L}(D)/\mathcal{L}(0)\right) = \dim_k \left(\mathcal{L}(D)/k\right) \leq \deg(D),$$

откъдето $l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) \leq \deg(D) + 1 < \infty$.

В общия случай избираме ефективен дивизор $G \geq 0$, който доминира $D$, т.е. $G \geq 0$, $G \geq D$. Тогава $l(G) < \infty$. Прилагайки (i) получаваме, че $l(D) \leq l(G) < \infty$.

(vi) За произволен дивизор $D$ и произволна рационална функция $x \in k(C)$ твърдим, че $x\mathcal{L}(D + div(x)) = \mathcal{L}(D)$. Наистина, ако $y \in \mathcal{L}(D + div(x))$, то $div(y) + div(x) + D = div(xy) + D \geq 0$ и $xy \in \mathcal{L}(D)$. Обратно, ако $z \in \mathcal{L}(D)$, то $y = \frac{z}{x} \in \mathcal{L}(D + div(x))$, защото $div\left(\frac{z}{x}\right) + div(x) + D = div(z) + D \geq 0$. Оттук

$$l(D) = \dim_k \mathcal{L}(D) = \dim_k \mathcal{L}(D + div(x)) = l(D + div(x)),$$

Q.E.D.

Твърдение 14.9. *Нека $F$ е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи $k$ и $x \in F \setminus k$. Тогава броят на нулите*

$$\deg(x)_0 = [F : k(x)]$$

*на $x$ съвпада със степента на функционалното поле $F$ над чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на $k$ чрез $x$.*

**Доказателство:** Вече доказахме, че $n = [F : k(x)] \geq \deg(x)_0$. За $n \leq \deg(x)_0$ избираме базис $y_1, \dots y_n$ на $F$ над $k(x)$ и разглеждаме ефективния дивизор $E = \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j)_\infty$. За $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall 0 \leq i \leq m$ и $\forall 1 \leq j \leq n$, рационалните функции $x^{-i} y_j \in \mathcal{L}(m(x)_0 + E)$, защото

$$div(x^{-i}y_j) + m(x)_0 + E = -i(x)_0 + i(x)_\infty + (y_j)_0 - (y_j)_\infty + m(x)_0 + \sum_{j=1}^{n} (y_j)_\infty \geq 0,$$

съгласно $(m - i)(x)_0 \geq 0$, $E - (y_j)_\infty = \sum\limits_{i \neq j} (y_i)_\infty$, $i(x)_\infty \geq 0$ и $(y_i)_0 \geq 0$. Освен това, $\{x^{-i}y_j \mid 0 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n\}$ са линейно независими над $k$, защото $y_1, \dots, y_n$ са линейно независими над чисто трансцендентното разширение $k(x)$ на $k$ чрез $x$. Следователно броят на тези рационални функции

$$(m + 1)n \leq l(m(x)_0 + E) \tag{14.8}$$

не надминава размерността на $\mathcal{L}(m(x)_0 + E)$ над $k$. Прилагаме Лема 14.8(ii) към дивизорите $m(x)_0 + E \geq 0$ и получаваме

$$l(m(x)_0 + E) - 1 = \dim_k(\mathcal{L}(m(x)_0 + E)/\mathcal{L}(0)) \leq m \deg(x)_0 + \deg(E).$$

Комбинирането с 14.8 дава

$$mn + n \leq m \deg(x)_0 + \deg(E) + 1.$$

Оттук $m[\deg(x)_0 - n] \geq n - \deg(E) - 1$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. Следователно коефициентът $\deg(x)_0 - n \geq 0$ на $m$ е неотрицателен и $\deg(x)_0 = n$, Q.E.D.

Следствие 14.10. *Ако $F$ е функционално поле на една променливя със съвършено поле от константи $k$ и $x \in F \setminus k$, то*

$$\deg(x)_\infty = \deg(x)_0 = [F : k(x)].$$

*В частност,* $\deg(div(x)) = 0$ *за* $\forall x \in F$.

**Докзателство:** Съгласно $k(x) = k\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$\deg(x)_0 = [F : k(x)] = \left[F : k\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \deg\left(\frac{1}{x}\right)_0 = \deg(x)_\infty,$$

Q.E.D.

Следствие 14.11. *Ако $D$ е дивизор от степен* $\deg(D) < 0$, *то* $\mathcal{L}(D) = \{0\}$.

**Доказателство:** При допускане на противното съществува $x \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$ с $div(x) + D \geq 0$. Оттук $\deg(D) = \deg(div(x)) + \deg(D) \geq 0$, противно на предположението $\deg(D) < 0$. Това доказва $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ за $\deg(D) < 0$, Q.E.D.
Дивизорите $div(x)$ на рационални функции $x \in F = k(C)$ се наричат главин дивизори и образуват подгрупа на свободната абелева група $Div(F)$ на всички дивизори на функционалното поле $F$ на една променлива. Групата $div(F)$ на главните дивизори е подгрупа на дивизорите $Div^0(F)$ от степен 0. Фактор-групата $Div(F)/div(F)$ се нарича група на класовете дивизори.

Теорема 19. (Теорема на Riemann) *За произволно функционално поле $F$ на една променлива съществува цяла константа $g \geq 0$, наречена род на $F$, така че*

$$l(D) \geq \deg(D) - g + 1$$

*за всички дивизори $D \in Div(F)$.*

**Доказателство:** Разглеждаме функцията

$$s : Div(F) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

$$s(D) = \deg(D) - l(D) + 1.$$

Твърдим съществуването на цяла константа $g \geq 0$, така че $s(D) \leq g$ за всички дивизори $D \in Div(F)$. Избираме $x \in F \setminus k$ и базис $y_1, \ldots, y_n$ на $F$ над $k(x)$. По аналогия с доказателството на $[F : k(x)] \leq \deg(x)_0$ фиксираме ефективния дивизор $E = \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j)_\infty$. За произволно естествено $m \in \mathbb{N}$ рационалните функции $\{x^{-i}y_j \ \ | \ \ 0 \leq i \leq m, \ \ 1 \leq j \leq n\}$ образуват линейно независимо над $k$ подмножество на $\mathcal{L}(m(x)_0 + E)$. Оттук следва (14.8). Прилагаме 14.8(ii) към $m(x)_0 + E \geq m(x)_0$ и получаваме, че

$$l(m(x)_0 + E) - l(m(x)_0) \leq \deg(E).$$

Комбинирайки последното неравенство с (14.8) извеждаме

$$mn + n \leq l(m(x)_0) + \deg(E).$$

В резултат,

$$s(m(x)_0) = \deg(m(x)_0) - l(m(x)_0) + 1 = mn - l(m(x)_0) + 1 \leq \deg(E) - n + 1,$$

съгласно $\deg(x)_0 = n$. Следователно редицата $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре и можем да изберем

$$g := \sup_{m \in \mathbb{N}} s(m(x)_0).$$

Супремумът $g$ на редицата $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^{\infty}$ се достига, защото $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Z}$ е дискретна редица.
За произволен дивизор $D \in Div(F)$ съществува ефективен дивизор $H \in Div(F)$, $H \geq 0$, който доминира $D \leq H$. Прилагаме Лема 14.8(ii) към $m(x)_0 \geq m(x)_0 - H$ и получаваме

$$l(m(x)_0) - l(m(x)_0 - H) \leq \deg(H). \tag{14.9}$$

От $s(m(x)_0) = \deg(m(x)_0) - l(m(x)_0) + 1 \leq g$ следва $l(m(x)_0) \geq m \deg((x)_0) - g + 1$. Комбинирайки с (14.9) получаваме

$$l(m(x)_0 - H) \geq l(m(x)_0) - \deg(H) \geq m \deg((x)_0) - g + 1 - \deg(H) = mn - g + 1 - \deg(H).$$

За достатъчно големи $n = \deg(x)_0 \in \mathbb{N}$ имаме $mn - g + 1 - \deg(H) > 0$, откъдето $l(m(x)_0 - H) > 0$. За такива $n \in \mathbb{N}$ съществува $z \in \mathcal{L}(m(x)_0 - H) \setminus \{0\}$ с $div(z) + m(x)_0 - H \geq 0$. Оттук

$$m(x)_0 \geq H - div(z).$$

Ако $D_1 \leq D_2$ за дивизори $D_1, D_2 \in Div(F)$, то

$$s(D_2) - s(D_1) = [\deg(D_2) - \deg(D_1)] - [l(D_2) - l(D_1)] \geq 0$$

съгласно Лема 14.8(ii). Освен това,

$$s(D + div(y)) = \deg(D) - l(D) + 1 = s(D),$$

защото $\deg(div(y)) = 0$ и $l(D + div(y)) = l(D)$ по Лема 14.8(vi). В резултат,

$$g \geq s(m(x)_0) \geq s(H - div(z)) = s(H) \geq s(D),$$

поради $m(x)_0 \geq H - div(z)$ и $H \geq D$. За $D = 0$, доказаната Теорема на Riemann дава

$$1 = l(0) \geq \deg(0) - g + 1 = 1 - g,$$

откъдето $g \geq 0$, Q.E.D.

Следствие 14.12. *Ако дивизорът $D \in Div(F)$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$, то всеки дивизор $G \geq D$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство, $l(G) = \deg(G) - g + 1$.*

**Доказателство:** Прилагаме Лема 14.8(ii) към $G \geq D$ и получаваме

$$l(G) - l(D) \leq \deg(G) - \deg(D).$$

Съгласно Теоремата на Riemann $l(D) = \deg(D) - g + 1$ за $D$ с равенство, оттук следва $l(G) \leq \deg(G) - g + 1$. Заедно с Теоремата на Riemann $l(G) \geq \deg(G) - g + 1$ за $G$, това дава $l(G) = \deg(G) - g + 1$, Q.E.D.

Следствие 14.13. *За произволно функционално поле $F$ на една променлива със съвършено поле от константи $k$ съществува цяло число $r$, така че Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за всички дивизори $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$.*

**Доказателство:** Както в доказателството на Теоремата на Riemann 19 избираме $x \in F \setminus k$ и такова $\mu \in \mathbb{N}$, че $s(\mu(x)_0) = \deg(\mu(x)_0) - l(\mu(x)_0) + 1 = g$ достига точната горна граница $g$ на $\{s(m(x)_0)\}_{m=1}^{\infty}$. Полагаме

$$r := g + \deg(\mu(x)_0).$$

Тогава за всеки дивизор $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$ дивизорът $D - \mu(x)_0 \in Div(F)$ е от степен $\deg(D - \mu(x)_0) \geq g$. По Теоремата на Riemann за $D - \mu(x)_0$ имаме

$$l(D - \mu(x)_0) \geq \deg(D - \mu(x)_0) - g + 1 \geq 1.$$

Следователно съществува $z \in \mathcal{L}(D - \mu(x)_0) \setminus \{0\}$ с $div(z) + D - \mu(x)_0 \geq 0$. С други думи, $D + div(z) \geq \mu(x)_0$ и съгласно Следствие 14.12, дивизорът $D + div(z)$ изпълнява Теоремата на Riemann с равенство $s(D + div(z)) = g$. Комбинирайки с $s(D + div(z)) = s(D)$ получаваме Теоремата на Riemann с равенство $s(D) = g$ за всеки дивизор $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$, Q.E.D.

Следствие 14.14. *Функционалното поле $F$ на една променлива е полето $k(x)$ на рационалните функции на проективната права $\mathbb{P}^1(\overline{k})$ тогава и само тогава, когато родът на $F$ е $g = 0$ и съществува клас от дискретни нормирания $v$ от степен $\deg(v) = 1$.*

**Доказателство:** Ако $F = k(x) = k(\mathbb{P}^1(\overline{k}))$ е функционалното поле на $\mathbb{P}^1(\overline{k})$, то $F = k(x)$ е чисто трансцендентно разширение на $k$ от степен 1. Твърдим, че ако $v_\infty$ е нормирането, отговарящо на безкрайната точка, то

$$\mathcal{L}(nv_\infty) = k^{(n+1)}[x]$$

се състои от полиномите на $x$ от степен $\leq n$. По-точно, всеки елемент на $F = k(x)$ е от вида $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ с $f_1(x), f_2(x) \in k[x]$. По определение, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in \mathcal{L}(nv_\infty)$ тогава и само тогава, когато

$$div(f_1) - div(f_2) + nv_\infty \geq 0. \tag{14.10}$$

Дискретните нормирания на $F = k(x)$ са $v_\infty$ и $v_{p(x)}$ за неразложимите над $k$ полиноми $p(x) \in k[x]$. От (14.10) следва $v_{p(x)}(f_1) - v_{p(x)}(f_2) \geq 0$ за произволен неразложим над $k$ полином $p(x) \in k[x]$. Да напомним, че в пръстена $k[x]$ на полиномите на $x$ с коефициенти от поле $k$ имаме разлагане в произведение на неразложими над $k$ множители, което е еднозначно с точност до мултипликативни константи от полето на коефициентите. Без ограничение на общността можем да считаме, че дробта $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \in k(x) = F$ е несъкратима. Ако съществува неразложим над $k$ делител $p(x) \in k[x]$ на $f_2(x)$, то $p(x)$ не дели $f_1(x)$, така че $v_{p(x)}(f_1) = 0$ и

$$v_{p(x)}\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) = v_{p(x)}(f_1) - v_{p(x)}(f_2) = -v_{p(x)}(f_2) < 0.$$

Това противоречи на (14.10) и доказва, че $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \in k[x]$ е полином на $x$ с коефициенти от $k$. Условието (14.10) дава

$$v_\infty(f_1) + n = -\deg(f) + n \geq 0,$$

т.е. $\deg(f_1) \leq n$. В резултат, Теоремата на Riemann за $D = nv_\infty$ приема вида

$$n + 1 = l(nv_\infty) \geq n - g + 1.$$

За достатъчно големи $\deg(nv_\infty) = n \geq r$, Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство, така че родът на $F$ е $g = 0$.

Обратно, ако родът на функционалното поле $F$ на една променлива е $g = 0$ и съществува клас дискретни нормирания $v$ от степен 1, то Теоремата на Riemann за $D = v$ дава

$$l(v) \geq \deg(v) - g + 1 = 2.$$

Прилагаме Лема 14.8(ii) към $v \geq 0$ и полечявяме

$$l(v) - 1 \leq \deg(v) - 0 = 1,$$

откъдето $l(v) \leq 2$ и $l(v) = 2$. Избираме $x \in \mathcal{L}(v) \setminus k$. Тогава $div(x) + v = (x)_0 - (x)_\infty + v \geq 0$ изисква $v \geq (x)_\infty \neq 0$, отъкдето $(x)_\infty = v$. Следователно

$$[F : k(x)] = \deg(x)_0 = \deg(x)_\infty = \deg(v) = 1$$

и $F = k(x) = k(\mathbb{P}^1(\overline{k}))$, Q.E.D.