Глава 15

Аделна форма на Теоремата на Riemann-Roch

Определение 15.1. *Нека F е функционално поле на една променлива, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете дискретни нормирания на F. Тогава множеството*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_F = \{\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F \ \mid \ \alpha_v \in \mathcal{O}_v \ \text{ с изключение на краен брой } v \in \mathcal{P}\}$$

се нарича аделно пространство на F.

Аделното пространство $\mathcal{A}$ е линейно пространство над полето от константи k на F, защото за произволни $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ имаме $\alpha_v, \beta_v \in \mathcal{O}_v$ за всички $v \in \mathcal{P}$ с изключение на краен брой. В резултат, $\alpha_v + \beta_v \in \mathcal{O}_v$ и $\alpha + \beta \in \mathcal{A}$. Аналогично, за $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\lambda \in k$ с $\alpha_v \in \mathcal{O}_v$ следва $\lambda\alpha_v \in \mathcal{O}_v$, откъдето$\lambda\alpha \in \mathcal{A}$.

Определение 15.2. *Аделната система на дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v \in Div(F)$ е множеството*

$$\mathcal{A}(D) = \{\alpha \in \mathcal{A} \ \mid \ v(\alpha_v) + n_v \geq 0 \quad \textit{за} \quad \forall v \in \mathcal{P}\}.$$

Аделната система на дивизор $D \in Div(F)$ е линейно пространство над полето от константи k на F. Наистина, за произволни $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(D)$ е изпълнено

$$v(\alpha_v + \beta_v) + n_v \geq \min(v(\alpha_v), v(\beta_v)) + n_v \geq 0,$$

съгласно $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$, $v(\beta_v) + n_v \geq 0$. Следователно $\alpha + \beta \in \mathcal{A}(D)$. От $v(0) = \infty$ следва $0 \in \mathcal{A}(D)$. От $v(\lambda\alpha_v) = v(\alpha_v)$ за $\lambda \in k^*$ получаваме $\lambda\alpha \in \mathcal{A}(D)$ за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D)$, $\forall \lambda \in k^*$.
Функционалното поле F има диагонално влагане

$$\Delta : F \longrightarrow \mathcal{A},$$

$$\Delta(x) = (x)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F.$$

Твърдим, че $\mathcal{A}(D) \cap \Delta(F) = \Delta(\mathcal{L}(D))$. Наистина, ако $x \in \mathcal{L}(D)$ за $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$, то $div(x) + D \geq 0$, откъдето $v(x) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$ и $\Delta(x) \in \mathcal{A}(D)$. Обратно, ако $\Delta(x) \in \mathcal{A}(D)$, то $v(x) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$, откъдето $div(x) + D \geq 0$ и $x \in \mathcal{L}(D)$.

Твърдение 15.3. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, а $G \geq D$ са дивизори на F. Тогава аделното пространство $\mathcal{A}(D)$ на D е подпространство на аделното пространство $\mathcal{A}(G)$ на G и*

$$\dim_k (\mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D)) = \deg(G) - \deg(D). \tag{15.1}$$

Доказателство: Ако $G = \sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v$, $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$, то $G \geq D$ е еквивалентно на $m_v \geq n_v$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Оттук следва включването $\mathcal{A}(D) \subseteq \mathcal{A}(G)$, защото от $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$ получаваме $v(\alpha_v) + m_v = v(\alpha_v) + n_v + (m_v - n_v) \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$.

Достатъчно е да докажем 15.1 за $G = D + w$ с $w \in \mathcal{P}$, защото тогава с индукция по броя на събираемите w на $G - D \geq 0$, от

$$\dim_k (\mathcal{A}(G')/\mathcal{A}(D)) = \deg(G') - \deg(D) \quad \text{и} \quad \dim_k (\mathcal{A}(G'+w)/\mathcal{A}(G')) = \deg(w)$$

следва

$$\dim_k (\mathcal{A}(G'+w)/\mathcal{A}(D)) =$$
$$= \dim_k (\mathcal{A}(G'+w)/\mathcal{A}(G')) + \dim_k (\mathcal{A}(G')/\mathcal{A}(D)) = \deg(G'+w) - \deg(D).$$

За да проверим $\dim_k (\mathcal{A}(D+w)/\mathcal{A}(D)) = \deg(w)$ за $D = \sum\limits_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ избираме $u \in F$ с $w(u) = n_w + 1$. Тогава за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D+w)$ произведението $\alpha_w u \in \mathcal{O}_w$, защото $w(\alpha_w u) = w(\alpha_w) + w(u) = w(\alpha_w) + n_w + 1 \geq 0$. Това дава възможност да разгледаме изображението

$$\psi : \mathcal{A}(D+w) \longrightarrow \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w,$$
$$\psi(\alpha) = \alpha_w u + \mathfrak{M}_w.$$

Непосредствено се проверява, че ψ е k-линейно и ядрото

$$\ker(\psi) = \{\alpha \in \mathcal{A}(D) \ \mid \ w(\alpha_w u) \geq 1\} =$$
$$= \{\alpha \in \mathcal{A}(D+w) \ \mid \ w(\alpha_w) + n_w \geq 0, \ \ v(\alpha_v) + n_v \geq 0 \quad \text{за} \quad \forall v \in \mathcal{P} \setminus \{w\}\} = \mathcal{A}(D).$$

Твърдим, че образът $\mathrm{im}(\psi) = \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$. По-точно, за $\forall x + \mathfrak{M}_w \in \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$ трябва да докажем, че съществува $\alpha \in \mathcal{A}(D+w)$ с $\alpha_w u - x \in \mathfrak{M}_w$. За целта избираме $\alpha_w = \frac{x}{u} \in F$ и проверяваме, че $w(\alpha_w) + n_w + 1 = w(x) - w(u) + n_w + 1 = w(x) \geq 0$. За $\forall v \in \mathcal{P} \setminus \{w\}$ вземаме такова $\alpha_v \in F$, че $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$. В резултат, получаваме $\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \mathcal{A}(D+w)$ с $\alpha_w u - x = 0 \in \mathfrak{M}_w$. Изоморфизмът

$$\mathcal{A}(D+w)/\mathcal{A}(D) \simeq \mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w$$

на k-линейни пространства доказва, че

$$\dim_k (\mathcal{A}(D+w)/\mathcal{A}(D)) = \dim_k (\mathcal{O}_w/\mathfrak{M}_w) = \deg(w),$$

Q.E.D.

Твърдение 15.4. *За произволни дивизори $G \geq D$ на функционално поле F на една променлива със съвършено поле от константи k е в сила точната редица*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F) \longrightarrow 0$$

от k-линейни пространства.
Оттук,

$$\dim_k (\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = (\deg(G) - \deg(D)) - (l(G) - l(D)).$$

Доказателство: Диагоналното влагане $\Delta : F \to \mathcal{A}$ се ограничава до k-линейно влагане $\Delta : \mathcal{L}(G) \to \mathcal{A}(G)$ и индуцира k-линейно изображение

$$\varphi' : \mathcal{L}(G) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D),$$
$$\varphi'(x) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathcal{L}(G).$$

Ядрото

$$\ker(\varphi') = \{x \in \mathcal{L}(G) \ \mid \ \Delta(x) \in \mathcal{A}(D) \cap \Delta(F) = \Delta(\mathcal{L}(D))\} = \mathcal{L}(D),$$

така че φ' индуцира k-линейно влагане

$$\varphi : \mathcal{L}(G)/\mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D),$$
$$\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) \quad \text{за} \quad \forall x \in \mathcal{L}(G).$$

Разглеждаме изображението

$$\psi' : \mathcal{A}(G) \longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F),$$

$$\psi'(\alpha) = \alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(G).$$

Понеже ядрото $\ker(\psi') \supseteq \mathcal{A}(D)$ съдържа аделната система $\mathcal{A}(D)$ на D, можем да индуцираме k-линейно изображение

$$\psi : \mathcal{A}(G)/\mathcal{A}(D) \longrightarrow \mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F),$$

$$\psi(\alpha + \mathcal{A}(D)) = \alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}(D),$$

което не винаги е влагане.

Твърдим, че $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$, защото

$$\psi\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \psi(\Delta(x) + \mathcal{A}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$$

за $\forall x \in \mathcal{L}(G)$. За включването $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ забелязваме, че ядрото $\ker(\psi)$ на ψ се състои от $\alpha + \mathcal{A}(D)$ с $\alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Това изисква $\alpha \in \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$ или съществуване на $\beta \in \mathcal{A}(D)$ и $x \in F$ с $\alpha = \beta + \Delta(x)$. Тогава

$$\varphi(x + \mathcal{L}(D)) = \Delta(x) + \mathcal{A}(D) = \alpha - \beta + \mathcal{A}(D) = \alpha + \mathcal{A}(D)$$

е от образа на φ. Това доказва $\ker(\psi) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ и $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$.

Изображението ψ е върху $\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)$, защото за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(G)$ имаме $\alpha + \mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \psi(\alpha + \mathcal{A}(D))$, Q.E.D.

Лема 15.5. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, а r е такова естествено число, че Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство $l(D) = \deg(D) - g + 1$ за всеки дивизор $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$. Тогава*

$$\mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A} \quad \text{за} \quad \forall D \in Div(F), \quad \deg(D) \geq r.$$

Доказателство: Твърдим, че за $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ съществува дивизор $G \geq D$ с $\alpha \in \mathcal{A}(G)$. По-точно, ако $D = \sum\limits_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ и $\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}}$, то за всеки клас $v \in \mathcal{P}$ от дискретни нормирания твърдим съществуването на цяло число $m_v \geq n_v$ с $v(\alpha_v) + m_v \geq 0$. За целта е достатъчно да изберем $m_v \geq \max(-v(\alpha_v), n_v)$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Съгласно Твърдение 15.4,

$$\dim_k \left(\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)\right) = (\deg(G) - \deg(D)) - (l(G) - l(D)). \quad (15.2)$$

По предположение, Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за D, т.е. $l(D) = \deg(D) - g + 1$. Следователно за всички $G \geq D$ е изпълнено $l(G) = \deg(G) - g + 1$. Оттук $l(D) - \deg(D) = l(G) - \deg(G)$ и (15.2) приема вида

$$\dim_k \left(\mathcal{A}(G) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)\right) = 0.$$

В резултат, $\mathcal{A}(G) + \Delta(F) = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$ и $\alpha \in \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Това доказва включването $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$. Комбинирайки с $\mathcal{A}(D) + \Delta(F) \subseteq \mathcal{A}$ получаваме $\mathcal{A}(D) + \Delta(F) = \mathcal{A}$ за всеки дивизор $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) \geq r$, Q.E.D.

Теорема 20. (Теорема на Riemann-Roch в аделна форма) *Ако $D \in Div(F)$ е дивизор на функционално поле F на една променлива със съвършено поле от константи k, то*

$$l(D) = \deg(D) - g + 1 + \dim_k \left(\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)\right).$$

Доказателство: Избираме дивизор $D_0 \geq D$ от степен $\deg(D_0) \geq r$. Тогава Теоремата на Riemann е изпълнена с равенство за D_0, $l(D_0) = \deg(D_0) - g + 1$ и $\mathcal{A}(D_0) + \Delta(F) = \mathcal{A}$ по Лема 15.5. Съгласно Твърдение 15.4 имаме

$$\dim_k \left(\mathcal{A}(D_0) + \Delta(F)/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)\right) = [\deg(D_0) - l(D_0)] - [\deg(D) - l(D)].$$

Следователно

$$\dim_k \left(\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)\right) = l(D) - \deg(D) + g - 1,$$

Q.E.D.