Глава 16

Диференциални форми и диференциали на Weil

Определение 16.1. *Ако F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, то k-линейно диференциране на F е k-линейно изображение $d : F \to dF$, изпълняващо равенството*

$$d(xy) = d(x)y + xd(y) \quad \text{за} \quad \forall x, y \in F.$$

Модулът $\Omega = FdF$ над F, породен от образа dF на k-линейно диференциране d на F се нарича F-модул на k-линейните диференциали.

Ако t е локален параметър на клас дискретни нормирания v на F, то всеки елемент на F се представя с Лоранов ред с коефициенти от алгебричната обвивка $\overline{k}$ на k и $\Omega = Fdt$. Оттук $\dim_F(\Omega) = 1$.
За да определим дивизора на диференциална форма $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$, избираме локален параметър t на класа дискретни нормирания v на F и представяме $\omega = f(t)dt$ чрез Лоранов ред $f(t)$ на t. Полагаме $v(\omega) := v(f)$ и задаваме

$$div(\omega) = \sum_{v \in \mathcal{P}} v(\omega)v.$$

Лема 16.2. *Определението на $v(\omega)$ е коректно, т.е. ако t и s са локални параметри на класа дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ и $\omega \in \Omega$ се представя във вида $\omega = f(t)dt = g(s)ds$, то $v(f) = v(g)$.*

Доказателство: Ако t и s са локални параметри на v, то $s = tu$ за някое $u \in \mathcal{O}_v^*$. Оттук $ds = udt + tdu$. Замествайки в

$$\omega = g(s)ds = \left(\sum_{j \geq j_o} b_j s^j \right) ds$$

с $b_j \in \mathcal{O}_v / \mathfrak{M}_v \subset \overline{k}$, $b_{j_o} \neq 0$, $v(g) = j_o$ получаваме

$$\omega = \left(\sum_{j \geq j_o} b_j t^j u^{j+1} \right) dt + \left(\sum_{j \geq j_o} b_j t^{j+1} u^j \right) du.$$

Представяме $u \in \mathcal{O}_v^*$ като степенен ред $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ с $c_0 \neq 0$ и пресмятаме, че $du = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k t^{k-1} \right) dt$. В резултат, $\omega = f(t)dt$ с

$$f(t) = \sum_{j \geq j_o} b_j t^j u^{j+1} + \left(\sum_{j \geq j_o} b_j t^{j+1} u^j \right) \left(\sum_{k \geq 1} k c_k t^{k-1} \right),$$

откъдето $v(f) = j_o = v(g)$, Q.E.D.

Определение 16.3. *Нека t е локален параметър на класа дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$, а $\omega = \left(\sum\limits_{i \geq i_o} a_i t^i \right) dt$ е диференциална форма. Резидуумът на ω*

относно t се определя като коефициентът

$$\mathrm{res}_t(\omega) = a_{-1}$$

на t^{-1} в Лорановия ред на t, представящ ω.

Ще докажем, че резидуумите $\mathrm{res}_t(\omega) = \mathrm{res}(\omega)$ на ω относно локални параметри t и s на $v \in \mathcal{P}$ съвпадат и ще определим резидуума $\mathrm{Res}_v(\omega)$ на $\omega \in \Omega$ във $v \in \mathcal{P}$ като $\mathrm{Res}_v(\omega) = \mathrm{res}_t(\omega)$ за някой локален параметър t на F във $v \in \mathcal{P}$. За целта е необходима известна подготовка

Твърдение 16.4. *Нека F е функционално поле на една променлива над алгебричната обвивка $\overline{k}$ на съвършено поле k, $v \in \mathcal{P}$ е клас дискретни норрмирания на F, F_v е попълнението на F относно v, $\widehat{\mathcal{O}_v}$ е локалният пръстен на дискретното нормиране $v : F_v \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ и $\widehat{\mathfrak{M}_v}$ е максималният идеал на $\widehat{\mathcal{O}_v}$. Тогава*
(i) за всяко $f \in F_v$ и за $\widehat{\mathcal{O}_v}$-подмодула $\mathcal{K}_v = \cap_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}$ на $\Omega_v = F_v dF_v$ е изпълнено

$$df \equiv \frac{\partial f}{\partial t} dt (\mathrm{mod} \ \ \mathcal{K}_v);$$

(ii) $\overline{\Omega_v} = F(\Omega_v / \mathcal{K}_v)$ е едномерно линейно пространство над F_v.

Доказателство: (i) Достатъчно е да проверим, че за $\forall n \geq 0$ и $\forall f \in F_v$ е сила

$$df - \frac{\partial f}{\partial t} dt \in \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}.$$

За $f = \sum\limits_{i \geq i_o} a_i t^i$ полагаме

$$f_0 = \sum_{i=i_o}^{n} a_i t^i, \quad f_1 = (f - f_0) t^{-n-1} \in \widehat{\mathcal{O}_v}$$

и представяме $f = f_0 + t^{n+1} f_1$. В резултат,

$$df = df_0 + (n+1) t^n f_1 dt + t^{n+1} df_1$$

с $(n+1) t^n f_1 dt + t^{n+1} df_1 \in \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}$ или $df \equiv df_0 (\mathrm{mod} \ \ \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v})$. От друга страна,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + t^n g \quad \text{с} \quad g = (n+1) f_1 + t \frac{\partial f_1}{\partial t} \in \widehat{\mathcal{O}_v},$$

така че $t^n g \in \widehat{\mathfrak{M}_v}^n$. Оттук

$$df - \frac{\partial f}{\partial t} dt \equiv (df_0 - \frac{\partial f_0}{\partial t} dt) (\mathrm{mod} \ \ \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}).$$

Равенството $df_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} dt$ за крайната сума $f_0 = \sum\limits_{i=i_o}^{n} a_i t^i$ е непосредствено.

(ii) Достатъчно е да докажем, че $\overline{\Omega} \neq 0$, защото $\Omega_v / \mathcal{K}_v$ се поражда от dt. За съществуването на $\omega \in \Omega_v \setminus \mathcal{K}_v$ ще установим наличието на ненулево диференциране $D : F_v \to F_v$. Тогава за произволно $f \in F_v$ с $D(f) \neq 0$ имаме $\omega = D(f) dt \in \Omega_v \setminus \mathcal{K}_v$, защото допускането $D(f) dt \in \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}$ за $\forall n \geq 0$ води до $D(f) \in \widehat{\mathfrak{M}_v}^n$ за $\forall n \geq 0$. Това противоречи на $\cap_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{M}_v}^n = \{0\}$ и доказва, че $\omega = D(f) dt \in \Omega_v \setminus \mathcal{K}_v$. В качеството на ненулево диференциране разглеждаме

$$D = \frac{\partial}{\partial t} : F_v \to F_v \quad \text{с} \quad D(t) = 1,$$

Q.E.D.

Лема 16.5. *Нека Ω е F-модулът на $\overline{k}$-линейните диференциали, t е локален параметър на класа дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$, а F_v е попълнението на F относно v. Тогава:*
(i) резидуумът $\mathrm{res}_t : \Omega \to \overline{k}$ *относно t е $\overline{k}$-линейно изображение;*
(ii) $\mathrm{res}_t(\omega) = 0$ *за произволна регулярна диференциална форма $\omega \in \widehat{\mathcal{O}_v}dt$;*
(iii) $\mathrm{res}_t(df) = 0$ *за $\forall f \in F_v$;*
(iv) $\mathrm{res}_t\left(\frac{df}{f}\right) = v(f)$ *за $\forall f \in F_v$.*

Доказателство: (i) По определение,

$$\mathrm{res}_t\left(\sum_{j=1}^{m} b_j \left(\sum_{k_j \geq i_j} a_{k_j} t^{k_j}\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j a_{-1} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathrm{res}_t\left(\sum_{k_j \geq i_j} a_{k_j} t^{k_j}\right)$$

за всички $b_j, a_{k_j} \in \overline{k}$.

(ii) Ако диференциалната форма $\omega = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ е регулярна, то $a_{-1} = 0$.

(iii) Произволен формален степенен ред $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n$ се разбива в сума

$$f(t) = f_-(t) + a_0 + f_+(t)$$

на $f_-(t) = \sum\limits_{n \leq -1} a_n t^n$, $a_0 \in \overline{k}$ и $f_+(t) = \sum\limits_{n \geq 1} a_n t^n$. В резултат, $df = df_- + df_+$ с $df_- = \sum\limits_{n \leq -1} n a_n t^{n-1}$, $df_+ = \sum\limits_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$ има резидуум

$$\mathrm{res}_t(df) = \mathrm{res}_t(df_-) + \mathrm{res}_t(df_+) = 0.$$

(iv) Ако $v(f) = n \in \mathbb{Z}$, то $f = t^n u$ за някое $u \in \widehat{\mathcal{O}_v}^*$. Оттук $df = nt^{n-1}udt + t^n du$ с регулярна диференциална форма du и

$$\mathrm{res}_t\left(\frac{df}{f}\right) = n\mathrm{res}_t\left(\frac{dt}{t}\right) + \mathrm{res}_t\left(\frac{du}{u}\right) = n = v(f),$$

Q,E,D.

Лема 16.6. (Принцип за продължение на алгебричните тъждества:) *Ако полином $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ се анулира за произволни елементи на алгебрично затворено поле $\overline{k}$ с характеристика $char(\overline{k}) = 0$, то $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$ за произволни елементи $b_1, \ldots, b_n$ на алгебрично затворено поле $\overline{L}$ с характеристика p.*

Доказателство: Простото подполе P на полето $\overline{k}$ с характеристика 0 е изоморфно на полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа. Следователно $\mathbb{Z} \subset \overline{k}$. За произволни фиксирани $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \overline{k}$ полиномът

$$f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) =$$

$$= c_d(a_1, \ldots, a_{n-1})x_n^d + c_{d-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})x_n^{d-1} + \ldots + c_0(a_1, \ldots, a_{n-1})$$

се анулира за всички цели x_n. Следователно полиномите

$$0 = c_j(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}[a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

се анулират за $\forall a_1, \ldots, a_{n-1} \in \overline{k}$. Продължавайки по същия начин получаваме, че $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ е тъждествено нулев, Q.E.D.

Лема-Определение 16.7. *Нека t и s са локални параметри на класа дискретни нормирания v на F, F_v е попълнението на F относно v, $\widehat{\mathcal{O}_v}$ е локалният* *пръстен на* v *в* F_v, $\widehat{\mathfrak{M}_v}$ *е максималният идеал на* $\widehat{\mathcal{O}_v}$, $\mathcal{K}_v = \cap_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathfrak{M}_v}^n d\widehat{\mathcal{O}_v}$, $\Omega_v = F_v dF_v$, $\omega \in \overline{\Omega_v} = F_v(\Omega_v/\mathcal{K}_v)$. *Тогава резидуумите*

$$\mathrm{res}_t(\omega) = \mathrm{res}_s(\omega)$$

на ω *относно* t *и* s *съвпадат и можем да определим резидуума* $\mathrm{Res}_v(\omega)$ *на* ω *във* v *като*

$$\mathrm{Res}_v(\omega) := \mathrm{res}_t(\omega)$$

за произволен локален параметър t *на* v.

Доказателство: Произволна диференциална форма $\omega \left(\sum\limits_{n \geq n_o} a_n t^n \right) dt$ се разлага в сума $\omega = \omega_1 + \omega_0$ от главна част $\omega_1 = \left(\sum\limits_{n=n_o}^{-1} a_n t^n \right) dt$ и регулярна диференциална форма $\omega_0 = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt$ относно локалния параметар t. Резидуумът на ω относно t е $\mathrm{res}_t(\omega) = a_{-1}$. Съгласно Лема 16.5 (i) и (ii) имаме

$$\mathrm{res}_s(\omega) = \mathrm{res}_s(\omega_1) + \mathrm{res}_s(\omega_0) = \mathrm{res}_s(\omega_1).$$

Прилагайки Лема 16.5 (i) и (iv) получаваме

$$\mathrm{res}_s \left(\frac{a_{-1} dt}{t} \right) = a_{-1} \mathrm{res}_s \left(\frac{dt}{t} \right) = a_{-1} v(t) = a_{-1}.$$

Остава да покажем, че

$$\mathrm{res}_s \left(\frac{dt}{t^n} \right) = 0 \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

Ако $char(\overline{k}) = 0$, то функцията

$$g(t) = -\frac{1}{n-1} t^{-(n-1)}$$

има диференциал

$$dg = t^{-n} dt.$$

Следователно $\mathrm{res}_s\left(\frac{dt}{t^n}\right) = \mathrm{res}_s(dg) = 0$, съгласно Лема 16.5 (iii).
В случая на произволна характеристика на $\overline{k}$ след умножение с елемент на $\overline{k}^*$ представяме

$$t = s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \ldots = s(1 + a_2 s + a_3 s^2 + \ldots).$$

В резултат,

$$t^{-n} = s^{-n}(1 + b_1 s + b_2 s^2 + \ldots)$$

за полиноми b_i на $a_1, \ldots, a_{i+1}$ и

$$dt = (1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \ldots) ds.$$

Сега

$$\mathrm{res}_s \left(\frac{dt}{t^n} \right) = \mathrm{res}_s \left(\frac{(1 + c_1 s + c_2 s^2 + \ldots)}{s^n} ds \right) = c_{n-1}(a_2, \ldots, a_n),$$

където $c_j(a_2, \ldots, a_{j+1})$ са полиноми на $a_2, \ldots, a_{j+1}$. Знаем, че за $\overline{k}$ с характеристика 0 полиномът $c_{n-1}(a_2, \ldots, a_n)$ се анулира за всички стойности на $a_2, \ldots, a_n$ от $\overline{k}$. По принципа за продължение на алгебричните тъждества, $c_{n-1}(a_2, \ldots, a_n) = 0$ за всички $a_2, \ldots, a_n$ от алгебричната обвивка $\overline{k}$ на поле k с характеристика p. Това доказва $\mathrm{res}_s\left(\frac{dt}{t^n}\right) = 0$ за $\forall n \geq 2$ и установява независимостта на резидуума на диференциална форма от избора на локален параметър, Q.E.D.

Теорема 21. (Теорема за резидуумите) *Сумата*

$$\sum_{v\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}_v(\omega) = 0$$

на резидуумите на диференциална форма $\omega \in \Omega$ *относно всички класове дискретни нормирания на функционалното поле* F *е нулева.*

Преди да се заемем с доказателството на Теорема 21 да отбележим, че сумата $\sum\limits_{v\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}_v(\omega)$ е коректно определена, защото диференциалната форма ω има краен брой полюси.

Преди да докажем Теоремата за резидуумите над произволно алгебрично затворено поле $\overline{k}$ да разгледаме случая на $\overline{k} = \mathbb{C}$.

Над алгебрично затвореното поле $\mathbb{C}$ на комплексните числа, класовете дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ на функционалното поле на една променлива F отговарят на точките p от кривата C с функционално поле $\mathbb{C}(C) = F$ над $\mathbb{C}$. По-точно, пръстените $\mathcal{O}_v$ на класовете дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ съвпадат с локалните пръстени $\mathcal{O}_p(C)$ на съответните точки $p \in C$, $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_p(C)$. Твърдим, че резидуумът на диференциална форма ω във v е равен на интеграла на ω по достатъчно малка окръжност $\partial D(p,\varepsilon)$ върху C с център p,

$$\mathrm{Res}_v(\omega) = \mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} \omega.$$

За да го докажем, развиваме ω в Лоранов ред $\omega = \left(\sum\limits_{n\geq n_o} a_n t^n\right) dt$ спрямо локален параметър t на $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_p(C)$. Въвеждаме полярни координати $t = \varepsilon e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ и пресмятаме, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i d\theta = 1 \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} i\varepsilon^{-n+1}e^{-(n-1)i\theta}d\theta = 0 \quad \text{за} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}.$$

Следователно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} \left(\sum_{n\geq n_o} a_n t^n\right) dt =$$

$$= \sum_{n\geq n_o} a_n \left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(p,\varepsilon)} t^n dt\right] = a_{-1} = \mathrm{Res}_v(\omega).$$

Ако C е проективна крива над $\mathbb{C}$ и $\omega \in \Omega$ е диференциална форма с полюси $p_1, \ldots, p_m$, то разглеждаме отворената крива $C_o = C \setminus \cup_{j=1}^m D(p_j,\varepsilon)$, където $D(p_j,\varepsilon)$ са отворени дискове с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$ и центрове p_j. Диференциалната форма ω е регулярна върху границата ∂C_o на C_o и изпълнява Теоремата на Stokes

$$\int_{\partial C_o} \omega = \int_{C_o} d\omega.$$

Диференциалът $d\omega \equiv 0$ се анулира тъждествено върху кривата C_o и $\int_{C_o} d\omega = 0$. От друга страна,

$$\int_{\partial C_o} \omega = \sum_{j=1}^m \int_{\partial D(p_j,\varepsilon)} \omega.$$

Умножавайки почленно с $\frac{1}{2\pi i}$ получаваме

$$\sum_{p\in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{p_j}(\omega) = 0.$$

Първо ще докажем Теорема 21 за проективната права $\mathbb{P}^1(\overline{k})$ над съвършено поле k. След това ще изведем верността на теоремата над произволна крива.

Лема 16.8. *Нека $F = \overline{k}(x)$ е чисто трансцендентно разширение от степен 1 на алгебричната обвивка $\overline{k}$ на съвършено поле k, а $\omega \in \Omega = FdF$ е $\overline{k}$-линеен диференциал. Тогава сумата на резидуумите на ω,*

$$\sum_{v\in\mathcal{P}} Res_v(\omega) = 0$$

върху класовете дискретни нормирания v на F е равна на нула.

Доказателство: Функционялното поле $F = \overline{k}(x)$ се състои от частните $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ на полиноми $f_1(x), f_2(x) \in \overline{k}[x]$, $f_2(x) \not\equiv 0$. След деление

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f_2(x)}$$

с частно $q(x) \in \overline{k}[x]$ и остатък $r(x) \in \overline{k}[x]$ от степен $\deg(r) < \deg(f_2)$, разлагаме правилната дроб $\frac{r(x)}{f_2(x)}$ в сума от елементарни дроби от вида $\frac{C}{(x-a)^n}$ с $a, C \in \overline{k}$, $n \in \mathbb{N}$. По определение,

$$Res_a\left(\frac{dx}{(x-a)^n}\right) = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 1, \\ 0 & \text{за } n \geq 2. \end{cases}$$

Ако $b \in \overline{k}\setminus\{a\}$, то $Res_b\left(\frac{dx}{(x-a)^n}\right) = 0$, защото диференциалът $\frac{dx}{(x-a)^n}$ е регулярен в точка b. За да пресметнем резидуума на $\frac{dx}{(x-a)^n}$ в безкрайната точка $\infty \in \mathbb{P}^1(\overline{k})$, провим смяна на променливата $x = y^{-1}$. Тогава

$$Res_\infty\left(\frac{dx}{(x-a)^n}\right) = Res_0\left(\frac{-y^{n-2}dy}{(1-ay)^n}\right) = 0 \quad \text{за} \quad n \geq 2$$

като резидуум на диференциал, който е регулярен в 0. В случая $n = 1$, резидуумът

$$Res_\infty\left(\frac{dx}{x-a}\right) = Res_0\left(\frac{-dy}{y(1-ay)}\right) = Res_0\left(-\frac{dy}{y} - \frac{ady}{1-ay}\right) = -1.$$

За да докажем Теорема 21 в общия случай, избираме трансцендентен над $\overline{k}$ елемент $x \in F$ и разглеждаме чисто трансцендентното над $\overline{k}$ разширение $E = \overline{k}(x)$. Тогава F е крайно сепарабелно разширение на E и съществува примитивен елемент $\theta \in F$ на F над E, така че $F = E(\theta)$. Влагането $E \hookrightarrow F$ на функционални полета на една променлива отговаря на доминантно рационално изображение

$$f : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1(\overline{k})$$

на кривата C с функционално поле $\overline{k}(C) = F$. Влагането $E \hookrightarrow F$ индуцира влагане

$$\Omega_E = EdE \hookrightarrow \Omega_F = FdF$$

на съответните модули от диференциали. Съгласно $\dim_E \Omega_E = \dim_F \Omega_F = 1$ имаме $\Omega_E \otimes_E F = \Omega_F$. Продължаваме следата $\mathrm{Tr}_E^F : F \to E$ до съответните модули от диференциали,

$$\mathrm{Tr}_E^F : \Omega_F = \Omega_E \otimes_E F \longrightarrow \Omega_E,$$
$$\mathrm{Tr}_e^F(fdt) = \mathrm{Tr}_e^F(f)dt.$$

Теоремата за резидуумите $\sum\limits_{Q\in X} Res_Q(\omega) = 0$ за $\forall \omega \in \Omega_F$ върху X следва от равенството

$$\sum_{Q\in f^{-1}(P)} Res_Q(\omega) = Res_P(\mathrm{Tr}_E^F(\omega)) \quad \text{за} \quad \forall\omega\in\Omega_F, \ \ \forall P\in\mathbb{P}^1(\overline{k}), \qquad (16.1)$$

защото тогава

$$\sum_{Q\in X} Res_Q(\omega) = \sum_{P\in\mathbb{P}^1(\overline{k})} \sum_{Q\in f^{-1}(P)} Res_Q(\omega) = \sum_{P\in\mathbb{P}^1(\overline{k})} Res_P(\mathrm{Tr}_E^F(\omega)) = 0,$$

съгласно Теоремата за резидуумите върху $\mathbb{P}^1(\overline{k})$. Да означим с E_P попълнението на E относно класа дискретни нормирания с пръстен $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^1(\overline{k}))$, а с F_Q - попълнението на F относно класа дискретни нормирания с пръстен $\mathcal{O}_Q(C)$. Твърдим, че

$$\mathrm{Tr}_E^F = \sum_{Q\in f^{-1}(P)} \mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}|_F \quad \text{за} \quad \forall P\in\mathbb{P}^1(\overline{k}). \qquad (16.2)$$

Това равенство може да се получи от формулата на Chevalley

$$F\otimes_E E_P \simeq \prod_{Q\in f^{-1}(P)} F_Q$$

и от $\mathrm{Tr}_{E_P}^{F\otimes_E E_P}|_{\Omega_F} = \mathrm{Tr}_E^F$. При наличието на (16.2), (16.1) следва от

$$Res_Q(\omega) = Res_P(\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(\omega)) \quad \text{за} \quad \forall\omega\in\Omega_F, \ \ \forall P\in\mathbb{P}^1(\overline{k}), \ \ \forall Q\in f^{-1}(P). \ \ (16.3)$$

Един от начините за обяснение на (16.2) е чрез разглеждане на действието на следата Tr_E^F върху елементите $h(\theta)\in E[\theta] = E(\theta) = F$. По-точно,

$$\mathrm{Tr}_E^F(h(\theta)) = \sum_s h(\theta_s),$$

където θ_s пробягва корените на минималния полином $g(x)\in E[x]$ на θ над E, които са от $E(\theta) = F$. Разлагаме $g(x)\in E[x]\subseteq E_P[x]$ в неразложими над E_P множители

$$g(x) = g_1(x)\dots g_m(x).$$

Всяка точка $Q\in f^{-1}(P)$ над $P\in\mathbb{P}^1(\overline{k})$ отговаря на класа v_Q дискретни нормирания на F с пръстен $\mathcal{O}_Q(C)$. Знаем, че класовете дискретни нормирания v_Q са във взаимно еднозначно съответствие с влаганията $\rho_j : F = E(\theta)\hookrightarrow \overline{E_P}$ в алгебричната обвивка $\overline{E_P}$ на E_P, разгледани с точност до спрягане над E_P. По този начин, v_Q отговарят на множителите $g_j(x)$ на $g(x)$. Попълнението $F_Q = \rho_j(F) * E_P = E(\rho_j(\theta)) * E_P = E_P(\rho_j(\theta))$, където $\rho_j(\theta)$ е корен на $g_j(x)\in E_P[x]$. Сега

$$\mathrm{Tr}_E^F(h(\theta)) = \sum_{j=1}^m \sum_s h(\theta_{js}),$$

където θ_{js} са спрегнатите на $\rho_j(\theta)$ над E_P, които принадлежат на $F_Q = E_P(\rho_j(\theta))$. Равенството (16.2) следва от

$$\sum_{Q\in f^{-1}(P)} \mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(h(\theta)) = \sum_{j=1}^m \sum_s h(\theta_{js}),$$

защото обединението на спрегнатите θ_{js} на $\rho_j(\theta)$ над E_P от $E_P(\rho_j(\theta))$ за всички $1\le j\le m$ е обединението на спрегнатите θ_s на θ над E от $E(\theta) = F$.
За доказателството на (16.7) за напомним, че степента

$$[F_Q : E_P] = e(v_Q/v_P) f(v_Q/v_P).$$

Относителните степени на разглежданите класове дискретни нормирания са $f(v_Q/v_P) = 1$, защото крайните разширения $\mathcal{O}_Q(C)/\mathfrak{M}_Q(C)$ на алгебрично затвореното поле $\overline{k}$ съвпадат с $\overline{k}$. Същото се отнася и до крайните разширения $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^1(\overline{k}))/\mathfrak{M}_P(\mathbb{P}^1(\overline{k}))$ на $\overline{k}$. За фиксирани точки $P \in \mathbb{P}^1(\overline{k})$ и $Q \in f^{-1}(P)$ да означим с

$$e := e(v_Q/v_P) = [F_Q : E_P]$$

индексът на разклонение на класа дискретни нормирания v_Q на F с пръстен $\mathcal{O}_Q(C)$ над класа дискретни нормирания v_P на E с пръстен $\mathcal{O}_P(\mathbb{P}^1(\overline{k}))$. За произволен локален параметър t на v_Q върху F_Q имаме локален параметър t^e на v_P върху E_P. По определение,

$$Res_Q(\omega) = res_t(\omega) \quad \text{и} \quad Res_P(\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(\omega)) = res_{t^e}(\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_q}(\omega))$$

за произволна диференциална форма $\omega \in \Omega_F$. Ако $\omega = g(t)d(t^e)$ с

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n t^n \in F_Q,$$

то съгласно $\overline{k}$-линейността на резидуума относно локален параметър, достатъчно е да проверим, че

$$res_t(t^n d(t^e)) = res_{t^e}(\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(t^n)d(t^e)) \quad \text{за} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{16.4}$$

При $n \geq 0$ двете страни на (16.4) се анулират в качеството си на регулярни диференциални форми. При $n < 0$ лявата страна

$$res_t(t^n d(t^e)) = res_t\left(\frac{edt}{t^{-n-e+1}}\right) = \begin{cases} e & \text{за } n+e=0, \\ 0 & \text{за } n+e \neq 0. \end{cases}$$

Твърдим, че минималният полином на t над E_P е $g(x) = x^e - t^e \in E_P[x]$. Полиномът $g(x)$ се анулира за $x = t$, така че минималният полином $h(x) \in E_P[x]$ на t над E_P дели $g(x)$. Корените на $g(x) = 0$ са от вида $t\xi$ за някакъв e-ти корен на единицата $\xi \in \overline{k}$. Ако допуснем, че $h(x)$ е от степен $\deg(h) = d < e = \deg(g)$, то свободният член на $h(x) = \prod_{j=1}^{d}(x - t\xi_j)$ е $t^d\xi_1 \dots \xi_d \in E_P$ с $\xi_1 \dots \xi_d \in \overline{k} \subset E_P$. Следователно $t^d \in E_P$ и $v_Q(t^d) = d \in v_P(E_P^*) = e\mathbb{Z}$, което е противоречие, доказващо $d = e$. Разширенията $E_P \subset E_P(t) \subseteq F_Q$ имат степени

$$[E_P(t) : E_P] = e = [F_Q : E_P],$$

така че $E_P(t) = F_Q$. Да отбележим, че минималният полином $g(x) = x^e - t^e \in E_P[x]$ на t над E_P няма кратни корени съгласно сепарабелността на F_Q над E_P. Следователно $\overline{k}$ съдържа e на брой корени на единицата от степен e или полиномът $x^e - 1 \in \overline{k}[x]$ няма кратни корени. В резултат, стигаме до извода, че характеристиката $char(\overline{k}) = 0$ или $char(\overline{k}) = p$ не дели e. Ако $\xi_1, \dots, \xi_e$ са e-тите корени на единицата от $\overline{k}$, то групата на Galois $Gal(F_Q/E_P) = Gal(E_P(t)/E_P)$ има точно e елемента $\sigma_1, \dots, \sigma_e$, които продължават съответствията $\sigma_i : t \mapsto t\xi_i$ за $\forall 1 \leq i \leq e$. По определение, следата

$$\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(t^n) = \sum_{i=1}^{e} \sigma_i(t^n) = \sum_{i=1}^{e} \sigma_i(t)^n = \sum_{i=1}^{n} t^n \xi_i^n (t^e)^{\frac{n}{e}} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^n\right).$$

Следователно дясната страна на (16.4) е равна на

$$res_{t^e}(\mathrm{Tr}_{E_P}^{F_Q}(t^n)d(t^e)) = res_{t^e}\left((t^e)^{\frac{n}{e}}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^n\right)d(t^e)\right) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{e} \xi_i^{-e} = e & \text{за } n = -e, \\ 0 & \text{за } n \neq -e. \end{cases}$$

и равенството (16.4) е доказано. Това завършва и доказателството на Теорема 21 за резидуумите.

Определение 16.9. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, $D \in Div(F)$ е дивизор на F, $\mathcal{A}(D)$ е аделната система на D. Диференциалите на Weil, асоциирани с D са линейните функционални*

$$\Omega^W(D) = (\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F))^*$$

върху $\mathcal{A}$, които се анулират върху $\mathcal{A}(D) + \Delta(F)$.

Диференциалите на Weil $\Omega^W(D)$ на дивизор $D \in Div(F)$ образуват линейно пространство над k. Ако дивизорът D е от степен $\deg(D) \geq r$ и изпълнява теоремата на Riemann с равенство, $l(D) = \deg(D) - g + 1$, то съгласно Лема 15.5 имаме $\mathcal{A} = \mathcal{A}(D) + \Delta(F)$ и диференциалите на Weil $\Omega^W(D) = \{0\}$ образуват нулевото линейно пространство.
Твърдим, че дивизорите D от степен $\deg(D) \leq -2$ имат ненулево пространство $\Omega^W(D) \neq \{0\}$ от диференциали на Weil. Наистина, от $\deg(D) < 0$ следва $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ по Следствие 14.11. Използвайки

$$\dim_k \Omega^W(D) = \dim_k (\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F))$$

прилагаме Теоремата на Riemann-Roch в аделна форма - Теорема 20 и получаваме

$$0 = l(D) = \deg(D) - g + 1 + \dim_k \Omega^W(D).$$

Следователно $\dim_k \Omega^W(D) = g - 1 - \deg(D) \geq g - 1 + 2 = g + 1 \geq 1$ и $\Omega^W(D) \neq \{0\}$.
Ако $D_1 \leq D_2$ за дивизори $D_1, D_2 \in Div(F)$, то $\mathcal{A}(D_1) \subseteq \mathcal{A}(D_2)$ по Твърдение 15.3, откъдето

$$\Omega^W(D_1) \supseteq \Omega^W(D_2),$$

защото от $\omega|_{\mathcal{A}(D_2)+\Delta(F)} = 0$ за линеен функционал $\omega : \mathcal{A} \to k$ следва $\omega|_{\mathcal{A}(D_1)+\Delta(F)} = 0$.

Определение 16.10. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k. Елементите на обединението*

$$\Omega^W = \cup_{D \in Div(F)} \Omega^W(D)$$

на диференциалите на Weil, асоциирани с някакъв дивизор $D \in Div(F)$ се наричат диференциали на Weil на F.

Лема 16.11. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k. Тогава множеството $\Omega^W = \cup_{D \in Div(F)} \Omega^W(D)$ на диференциалите на Weil на F е:*
(i) линейно пространство над k;
(ii) 1-мерно линейно пространство над F.

Доказателство: (i) Множеството Ω^W е затворено относно умножение с $\lambda \in k$, защото за $\forall \omega \in \Omega^W$ съществува дивизор $D \in Div(F)$, така че $\omega \in \Omega^W(D)$. Линейното пространство $\Omega^W(D)$ над k съдържа $\lambda\omega$ и се съдържа в Ω^W, така че $\lambda\omega \in \Omega^W$.
Твърдим, че множеството Ω^W на диференциалите на Weil е затворено относно събиране. Наистина, за произволни $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^W$ съществуват дивизори

$D_1, D_2 \in Div(F)$, така че $\omega_1 \in \Omega^W(D_1)$, $\omega_2 \in \Omega^W(D_2)$. За $D_j = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_{j,v} v$, $1 \leq j \leq 2$ определяме

$$D = \min(D_1, D_2) := \sum_{v \in \mathcal{P}} \min(n_{1,v}, n_{2,v}) v.$$

Тогава $D \leq D_j$ за $\forall 1 \leq j \leq 2$ и $\omega \in \Omega^W(D_j) \subseteq \Omega^W(D)$. Линейното пространство $\Omega^W(D)$ над k съдържа сумата $\omega_1 + \omega_2$ и се съдържа в Ω^W, така че $\omega_1 + \omega_2 \in \Omega^W$. Диференциалите на Weil Ω^W се съдържат в k-линейното пространство $\mathcal{A}^*$ на k-линейните функционали $\mathcal{A} \to k$ върху

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_F = \{\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F \mid \alpha_v \in \mathcal{O}_v \text{ с изключение на краен брой } v \in \mathcal{P}\}$$

Подмножеството $\Omega^W \subset \mathcal{A}^*$ е затворено относно събиране и умножение с $\lambda \in k$, така че е k-линейно подпространство на $\mathcal{A}^*$.
(ii) Въвеждаме умножение на $\omega \in \Omega^W$ с $x \in F$ по правилото

$$(x\omega)(\alpha) := \omega(x\alpha) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Твърдим, че

$$x\mathcal{A}(D + div(x)) \subseteq \mathcal{A}(D) \quad \text{за} \quad \forall x \in F.$$

Наистина, ако $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$ и $\alpha \in \mathcal{A}(D + div(x))$, то $v(\alpha_v) + n_v + v(x) \geq 0$ за всеки клас дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$. Това е еквивалентно на $v(x\alpha_v) + n_v \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$, така че $x\alpha_v \in \mathcal{A}(D)$ и $x\mathcal{A}(D + div(x)) \subseteq \mathcal{A}(D)$.
Оттук следва, че $x\Omega^W(D) \subseteq \Omega^W(D + div(x))$. По-точно, ако $\omega \in \Omega^W(D)$, то $\omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0$. Следователно

$$x\omega|_{\mathcal{A}(D+div(x))+\Delta(F)} = \omega|_{x\mathcal{A}(D+div(x))+\Delta(F)} \subseteq \omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0$$

и $x\omega \in \Omega^W(D) \subseteq \Omega^W(D + div(x))$ за $\forall D \in Div(F)$, $\forall x \in F$.
От това, че Ω^W е линейно пространство над k знаем, че $(\Omega^W, +)$ е абелева група. За произволни $x, y \in F$ имаме $(xy)\omega = x(y\omega)$ съгласно

$$[(xy)\omega](\alpha) = \omega(xy\alpha) = (y\omega)(x\alpha) = [x(y\omega)](\alpha) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Дистрибутивният закон над скаларен множител $(x+y)\omega = x\omega + y\omega$ за $x, y \in F$, $\omega \in \Omega^W$ е изпълнен възоснова на

$$[(x+y)\omega](\alpha) = \omega((x+y)\alpha) = \omega(x\alpha + y\alpha) = \omega(x\alpha) + \omega(y\alpha) =$$
$$= (x\omega)(\alpha) + (y\omega)(\alpha) = (x\omega + y\omega)(\alpha) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

Дистрибутивният закон над векторен множител $x(\omega_1 + \omega_2) = x\omega_1 + x\omega_2$ за $x \in F$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^W$ е в сила поради

$$[x(\omega_1 + \omega_2)](\alpha) = (\omega_1 + \omega_2)(x\alpha) = \omega_1(x\alpha) + \omega_2(\alpha) =$$
$$= (x\omega_1)(\alpha) + (x\omega_2)(\alpha) = (x\omega_1 + x\omega_2)(\alpha) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

От $(1_F\omega)(\alpha) = \omega(1_F\alpha) = \omega(\alpha)$ за $\forall \omega \in \Omega^W$ и $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ получаваме, че $1_F\omega = \omega$. Следователно Ω^W е линейно пространство над F.
За да установим, че $\dim_F(\Omega^W) = 1$, достатъчно е да проверим, че линейната обвивка $l_F(\omega) = \Omega^W$ на произволен нетъждествено нулев диференциал на Weil $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$ съвпада с Ω^W. Еквивалентно, за произволни $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^W \setminus \{0\}$ трябва да докажем съществуването на $x \in F \setminus \{0\}$ с $\omega_2 = x\omega_1$.
За произволни дивизори $G, H \in Div(F)$ твърдим, че

$$\mathcal{L}(H)\Omega^W(G) \subseteq \Omega^W(G - H).$$

За целта, първо ще проверим, че

$$\mathcal{L}(H)\mathcal{A}(G - H) \subseteq \mathcal{A}(G).$$

Наистина, ако $G = \sum\limits_{v \in \mathcal{P}} n_v v$, $H = \sum\limits_{v \in \mathcal{P}} m_v v$ с $n_v, m_v \in \mathbb{Z}$, то за произволни $x \in \mathcal{L}(H)$ и $\alpha \in \mathcal{A}(G-H)$ имаме $v(x) + m_v \geq 0$ и $v(\alpha_v) + n_v - m_v \geq 0$. След почленно събиране получаваме $v((x\alpha)_v) + n_v = v(x\alpha_v) + n_v \geq 0$, откъдето $x\alpha \in \mathcal{A}(G)$. Това доказва $\mathcal{L}(H)\mathcal{A}(G-h) \subseteq \mathcal{A}(G)$.
Сега за произволни $x \in \mathcal{L}(H)$ и $\omega \in \Omega^W(G)$ имаме

$$(x\omega)|_{\mathcal{A}(G-H)+\Delta(F)} = \omega|_{x\mathcal{A}(G-h)+\Delta(F)} \subseteq \omega|_{\mathcal{L}(H)\mathcal{A}(G-H)+\Delta(F)} \subseteq \omega|_{\mathcal{A}(G)+\Delta(F)},$$

така че $x\omega \in \Omega^W(G-H)$ и $\mathcal{L}(H)\Omega^W(G) \subseteq \Omega^W(G-H)$.
За произволни $\omega_j \in \Omega^W \setminus \{0\}$, $1 \leq j \leq 2$ съществуват дивизори $D_j \in Div(F)$, така че $\omega_j \in \Omega^W(D_j)$. За произволен дивизор $G \in Div(F)$ разглеждаме k-линейните подпространства

$$U_j := \mathcal{L}(D_j + G)\omega_j \subseteq \mathcal{L}(D_j + G)\Omega^W(D_j) \subseteq \Omega^W(-G) \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Достатъчно е да докажем, че $\dim_k(U_1 \cap U_2) \geq 1$, за да получим $x_1\omega_1 = x_2\omega_2 \in (U_1 \cap U_2) \setminus \{0\}$ с $x_j \in \mathcal{L}(D_j + G) \setminus \{0\}$ и да изразим $\omega_2 = \frac{x_1}{x_2}\omega_1$. За целта избираме такъв дивизор $G \in Div(F)$, че степените $\deg(D_j + G) \geq r$ за $1 \leq j \leq 2$ и $D_j + G$ изпълняват Теоремата на Riemann с равенство,

$$l(D_j + G) = \deg(D_j) + \deg(G) - g + 1.$$

По Теоремата на Riemann-Roch - Теорема 20 имаме

$$l(-G) = -\deg(G) - g + 1 + \dim_k \Omega^W(-G).$$

Ако $\deg(G) > 0$, то $\deg(-G) < 0$, откъдето $l(-G) = 0$, съгласно Следствие 14.11. Следователно

$$\dim_k \Omega^W(-G) = \deg(G) + g - 1.$$

Сумата $U_1 + U_2 \subseteq \Omega^W(-G)$ на подпространствата $U_j \subseteq \Omega^W(-G)$ е с размерност

$$\dim_k(U_1 + U_2) \leq \dim_k \Omega^W(-G) = \deg(G) + g - 1.$$

По Теоремата за размерност на сума и сечение на подпространства имаме

$$\dim_k(U_1 \cap U_2) = \dim_k(U_1) + \dim_k(U_2) - \dim_k(U_1 + U_2) \geq \dim_k(U_1) + \dim_k(U_2) - \deg(G) - g + 1.$$

Подпространствата $U_j := \mathcal{L}(D_j + G)\omega_j \simeq \mathcal{L}(D_j + G)$ са с размерност

$$\dim_k(U_j) = l(D_j + G) = \deg(D_j) + \deg(G) - g + 1,$$

така че

$$\dim_k(U_1 \cap U_2) \geq \deg(D_1) + \deg(D_2) + \deg(G) - 3g + 3.$$

Избираме $G \in Div(F)$ от достатъчно висока степен

$$\deg(G) > 3g - 3 - \deg(D_1) - \deg(D_2),$$

за да получим $\dim_k(U_1 \cap U_2) > 0$ и да докажем, че $\dim_k(\Omega^W) = 1$, Q.E.D.

Лема-Определение 16.12. *За произволен диференциал на Weil $\omega \in \Omega^W$ определяме анулатора*

$$Ann(\omega) := \{D \in Div(F) \ \ | \ \ \omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0\}.$$

Тогава за произволен ненъждествено нулев диференциал на Weil $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$ съществува единствен дивизор $(\omega) \in Ann(\omega)$, така че

$$Ann(\omega) = \{D \in Div(F) \ \ | \ \ D \leq (\omega)\} \quad и$$

$$\Omega^W(D) = \{\omega \in \Omega^W \setminus \{0\} \ \ | \ \ (\omega) \geq D\} \cup \{0\} \quad за \quad \forall D \in Div(F).$$

Дивизорът $(\omega) \in Div(F)$ се нарича дивизор на диференциала на Weil ω.

Доказателство: Ако $\deg(D) \geq r$ и D изпълнява Теоремата на Riemann с равенство, то $\Omega^W(D) = 0$ и $D \notin Ann(\omega)$ за $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$. Оттук получаваме, че ако $D \in Ann(\omega)$ за нетъждествено нулев диференциал на Weil $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$, то степента $\deg(D) < r$ е ограничена отгоре. За произволно фиксирано $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$, ограничената отгоре дискретна редица $\{\deg(D)\}_{D \in Ann(\omega)}$ достига супремума си. Това означава съществуване на дивизор $(\omega) \in Ann(\omega)$ от степен

$$\deg(\omega) = \sup_{D \in Ann(\omega)} (\deg(D)).$$

Ако $D \leq (\omega)$, то $\mathcal{D} + \Delta(F) \subseteq \mathcal{A}((\omega)) + \Delta(F)$. По определение, $(\omega) \in Ann(\omega)$ е еквивалентно на $\omega|_{\mathcal{A}((\omega))+\Delta(F)} = 0$ и дава $\omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0$, откъдето $D \in Ann(\omega)$. Да допуснем, че $D \in Ann(\omega)$ и неравенството

$$\sum_{v \in \mathcal{P}} m_v v = D \leq (\omega) = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v$$

не е изпълнено. Тогава съществува клас дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$ с $m_v \geq n_v + 1$. Достатъчно е да изведем $(\omega) + v \in Ann(\omega)$, за да получим противоречие с избора на $(\omega) \in Ann(\omega)$ от максимална степен и да докажем $D \leq (\omega)$ за $\forall D \in Ann(\omega)$. По определение, условието $(\omega) + v \in Ann(\omega)$ е равносилно на $\omega|_{\mathcal{A}((\omega)+v)+\Delta(F)} = 0$. Всеки адел $\alpha \in \mathcal{A}((\omega) + v)$ има разлагане $\alpha = \alpha' + \alpha''$ с $\alpha', \alpha'' \in \mathcal{A}$,

$$\alpha'_v := 0, \quad \alpha'_w := \alpha_w \quad \text{за} \quad \forall w \in \mathcal{P} \setminus \{v\},$$
$$\alpha''_v := \alpha_v, \quad \alpha''_w := 0 \quad \text{за} \quad \forall w \in \mathcal{P} \setminus \{v\}.$$

Тогава $\alpha' \in \mathcal{A}((\omega))$, защото за всеки клас дискретни нормирания $w \in \mathcal{P} \setminus \{v\}$ имаме $w(\alpha'_w) + n_w = w(\alpha_w) + n_w \geq 0$ от $\alpha \in \mathcal{A}((\omega) + v)$. За $w = v$ е изпълнено $v(\alpha'_v) + n_v = v(0) + n_v = \infty + n_v = \infty \geq 0$. От друга страна, $\alpha'' \in \mathcal{A}(D)$, защото за $\forall w \in \mathcal{P} \setminus \{v\}$ е в сила $w(\alpha''_w) + m_w = w(0) + m_w = \infty + m_w = \infty \geq 0$ и $v(\alpha''_v) + m_v = v(\alpha_v) + n_v + 1 + (m_v - n_v - 1) \geq v(\alpha_v) + n_v + 1 \geq 0$ съгласно $\alpha \in \mathcal{A}((\omega) + v)$. От $(\omega) \in Ann(\omega)$ следва $\omega|_{\mathcal{A}(\omega)+\Delta(F)} = 0$. Комбинирайки с $\alpha' \in \mathcal{A}(\omega)$ получаваме $\omega(\alpha') = 0$. Аналогично, $\omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0$ за $D \in Ann(\omega)$ и $\alpha'' \in \mathcal{A}(D)$ дават $\omega(\alpha'') = 0$. В резултат, $\omega(\alpha) = \omega(\alpha') + \omega(\alpha'') = 0$ за $\forall \alpha \in \mathcal{A}((\omega) + v)$ и $(\omega) + v \in Ann(\omega)$. Това противоречи на избора на $(\omega) \in Ann(\omega)$ от максимална степен и доказва, че $D \in Ann(\omega)$ тогава и само тогава, когато $D \leq (\omega)$.
За единствеността на дивизора (ω) на $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$ да допуснем, че $\deg(\omega) = \deg(W_1) = \sup_{D \in Ann(\omega)} \deg(D)$ за някакъв дивизор $W_1 \in Ann(\omega)$. Тогава

$$Ann(\omega) = \{D \in Div(F) \mid D \leq (\omega)\} = \{D \in Div(F) \mid D \leq W_1\}.$$

От $W_1 \in Ann(\omega)$ получаваме $W_1 \leq (\omega)$, а от $(\omega) \in Ann(\omega)$ имаме $(\omega) \leq W_1$, откъдето $W_1 = (\omega)$.
За характеризацията на $\Omega^W(D)$ да забележим, че по определение

$$\Omega^W(D) = \{\omega \in \Omega^W \mid \omega|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0\} = \{\omega \in \Omega^W \mid D \in Ann(\omega)\}.$$

Комбинирайки с $Ann(\omega) = \{D \in Div(F) \mid D \leq (\omega)\}$ получаваме

$$\Omega^W(D) = \{\omega \in \Omega^W \setminus \{0\} \mid D \leq (\omega)\} \cup \{0\},$$

Q.E.D.

Следствие 16.13. *За произволен нетъждествено нулев диференциал на Weil* $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$ *и произволна нетъждествено нулева рационална функция* $x \in F \setminus \{0\}$*, дивизорът*

$$(x\omega) = div(x) + (\omega)$$

на диференциала на Weil $x\omega$ *е равен на сумата на дивизорите на* x *и* ω*.*

Доказателство: От доказателството на Лема 16.11(ii) знаем, че

$$x\Omega^W((\omega)) \subseteq \Omega^W((\omega) + div(x)).$$

В частност, от $\omega \in \Omega^W((\omega)) = \{\omega' \in \Omega^W \setminus \{0\} \mid (\omega) \leq (\omega')\} \cup \{0\}$ следва $x\omega \in \Omega^W((\omega) + div(x)) = \{\omega' \in \Omega^W \setminus \{0\} \mid (\omega) + div(x) \leq (\omega')\} \cup \{0\}$, т.е. $(\omega) + div(x) \leq (x\omega)$. След замяна на x с $\frac{1}{x}$ и на ω с $x\omega$ получаваме

$$(\omega) = \left(\frac{1}{x}.x\omega\right) \geq (x\omega) + div\left(\frac{1}{x}\right) = (x\omega) - div(x),$$

откъдето $(x\omega) \leq (\omega) + div(x)$ и $(x\omega) = (\omega) + div(x)$, Q.E.D.

Съгласно Лема 16.11(ii), за произволни нетъждествено нулеви диференциали на Weil $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^W \setminus \{0\}$ съществува нетъждествено нулева рационална функция $x \in F \setminus \{0\}$, така че $\omega_2 = x\omega_1$. По Следствие 16.13, дивизорът $(\omega_2) = div(x) + (\omega_1)$ на ω_2 е линейно еквивалентен на дивизора (ω_1) на ω_1.

Определение 16.14. *Класът на линейна еквивалентност на дивизора $(\omega) \in Div(F)$ на произволен нетъждествено нулев диференциал на Weil $\omega \in \Omega^W \setminus \{0\}$ се нарича каноничен клас на кривата C.*

За да формулираме Теоремата за резидуумите над съвършено, не обезателно алгебрично затворено поле k ни е нужно следното обобщение на Твърдение 13.19.

Твърдение 16.15. *Нека C е гладка проективна крива, определена над съвършено поле k. Тогава абсолютната група на Galois $Gal(\overline{k}/k)$ на k има крайни орбити върху C, които отговарят на класовете дискретни нормирания на функционалното поле $k(C)$ на C над k.*

Доказателство: Произволна точка $P = [p_0 : \ldots : p_n] \in C \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ има хомогенни координати $p_i \in \overline{k}$, които са алгебрични над k. Ако $f_i(x) \in k[x]$ са минималните полиноми на p_i над k, а $f(x) = \prod_{i=0}^{n} f_i(x) \in k[x]$, то полето на разлагане E на $f(x)$ над k е крайно разширение на Galois на k. Произволен автоморфизъм $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$ от абсолютната група на Galois на k се ограничава до автоморфизъм $\sigma : E \to E$ на E и орбитите

$$Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P) = Orb_{Gal(E/K)}(P)$$

съвпадат. Групата на Galois $Orb_{Gal(E/k)}(P)$ на крайното разширение на Galois $E \supseteq k$ е крайна, така че орбитата е крайна.

Всяка точка $P \in C$ отговаря на еднозначно определен клас дискретни нормирания w_P на $\overline{k}(C)$ с локален пръстен $\mathcal{O}_{w_P} = \mathcal{O}_P(C)$. Съпоставяйки на $P \in C$ ограничението $w_P|_{k(C)}$ на w_P върху функционалното поле $k(C)$ на C над k, получаваме изображение

$$\varphi : C \longrightarrow \mathcal{P},$$
$$\varphi(P) = w_P|_{k(C)}$$

в множеството $\mathcal{P}$ на класовете дискретни нормирания на $k(C)$. Изображението φ е сюрективно и слоят $\varphi^{-1}(v)$ над $v \in \mathcal{P}$ се състои от точките $P \in C$, за които $\mathcal{O}_P(C) \cap k(C) = \mathcal{O}_{w_P} \cap k(C) = \mathcal{O}_v$ е пръстенът на класа дискретни нормирания v. Твърдим, че

$$\varphi^{-1}(v) = Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)$$

е орбита на абсолютната група на Galois $Gal(\overline{k}/k)$ на k върху C. От една страна, ако $P_v \in \varphi^{-1}(v)$ и $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$, то $\sigma\mathcal{O}_{P_v}(C) = \mathcal{O}_{\sigma(P_v)}(C)$ съгласно Лема 13.18. Следователно

$$\mathcal{O}_{\sigma(P_v)}(C) \cap k(C) = \sigma(\mathcal{O}_{P_v}(C) \cap k(C)) = \sigma\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_v$$

и $Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v) \subseteq \varphi^{-1}(v)$. Допускаме, че съществува $Q \in \varphi^{-1}(v) \setminus Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)$ и по аналогия с доказателството на Твърдение 13.19 разглеждаме орбитите

$$Orb_{Gal(\overline{k}/k)} = \{P_v, P_2, \dots, P_m\} \subseteq \varphi^{-1}(v),\ Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(Q) = \{Q, Q_2, \dots, Q_l\} \subseteq \varphi^{-1}(v).$$

Съгласно Апроксимационната теорема 8 можем да изберем $z \in \overline{k}(C)$ с

$$w_{P_i}(z) = -1 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$
$$w_{Q_j}(z) = 1 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq l$$

и за класовете дискретни нормирания w_{P_i}, w_{Q_j} на $\overline{k}(C)$ с пръстени $\mathcal{O}_{P_i}(C)$, съответно $\mathcal{O}_{Q_j}(C)$. Хомогенните координати на точките P_v и Q са алгебрични над k, така че съществува крайно разширение на Galois $E_1 \supseteq k$, което ги съдържа. Избираме афинно отворено подмножество $C_o \subset C$ и представяме $z \in \overline{k}(C) = \overline{k}(C_o)$ като частно на полиноми с коефициенти от $\overline{k}$. Тези коефициенти са краен брой алгебрични над k елементи, така че съществува крайно разширение на Galois $E_2 \supseteq k$, което ги съдържа. Композитът $E = E_1 * E_2$ е крайно разширение на Galois на k, съдържащо хомогенните координати на P_v, Q и $z \in E(C)$ е от функционалното поле $E(C)$ на C над E. Използвайки

$$w_{\sigma^{-1}(p)}(z) = w_p(\sigma(z)) \quad \text{за} \quad \forall \sigma \in Gal(\overline{k}/k)$$

пресмятаме, че нормата

$$y = N_k^E(z) = \sum_{\sigma \in Gal(E/k)} \sigma(z)$$

има различни стойности $w_{P_v}(y) = -|Gal(E/k)|$ и $w_Q(y) = |Gal(E/k)|$ под действие на дискретните нормирания w_{P_v} и w_Q. Това противоречи на $w_{P_v}, w_Q \in \varphi^{-1}(v)$ и доказва, че $\varphi^{-1}(v) = Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)$, Q.E.D.

Следствие 16.16. *Нека C е крива, определена над съвършено поле k, $F = k(C)$ е функционалното поле на C над k, $\omega \in \Omega = FdF$ е k-линейна диференциална форма, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете дискретни нормирания на F. Тогава*

$$\sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\omega) = 0,$$

където $Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)$ е $Gal(\overline{k}/k)$-орбитата върху C, отговаряща на $v \in \mathcal{P}$.

Лема 16.17. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, $\Omega = FdF$ е F-модулът на k-линейните диференциали,*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_F = \{\alpha = (\alpha_v)_{v \in \mathcal{P}} \in \prod_{v \in \mathcal{P}} F \ \mid \ \alpha_v \in \mathcal{O}_v \ \text{ с изключение на краен брой } v \in \mathcal{P}\}$$

е аделното пространство на F, а $\mathcal{P}$ е множеството на класовете дискретни нормирания на F. Тогава вътрешното произведение

$$\langle \ , \ \rangle : \Omega \times \mathcal{A} \longrightarrow \overline{k},$$
$$\langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha_v \omega)$$

има следните свойства:
(i) $\langle \ , \ \rangle$ е адитивно относно двата си аргумента;
(ii) $\langle x\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, x\alpha \rangle$ за $\forall \omega \in \Omega$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $\forall x \in F$;
(iii) $\langle \omega, \Delta(x) \rangle = 0$ за $\forall \omega \in \Omega$, $\forall x \in F$ и диагоналното влагане $\Delta : F \to \mathcal{A}$, $\Delta(x)_v = x$ за $\forall v \in \mathcal{P}$;
(iv) за произволен дивизор $D = \sum_{v \in \mathcal{P}} n_v v \in Div(F)$, ортогоналното допълнение $\mathcal{A}(D)^{\perp} = \Omega(D)$ на аделното пространство

$$\mathcal{A}(D) = \{\alpha \in \mathcal{A} \ \mid \ v(\alpha_v) + n_v \geq 0 \ \ \forall c \in \mathcal{P}\}$$

на D относно $\langle\ ,\ \rangle$ е

$$\Omega(D) = \{\omega \in \Omega \setminus \{0\} \quad | \quad D \leq div(\omega)\} \cup \{0\}.$$

Доказателство: Сумата в определението на $\langle \omega, \alpha \rangle$ е крайна, защото най-много краен брой α_v имат полюси, полюсите на всяко $\alpha_v \in F$ са краен брой и полюсите на $\omega \in \Omega$ са краен брой.
(i) Непосредствено се вижда, че

$$\langle \omega_1 + \omega_2, \alpha \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha_v(\omega_1 + \omega_2)) =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha_v \omega_1) + \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha_v \omega_2) =$$

$$= \langle \omega_1, \alpha \rangle + \langle \omega_2, \alpha \rangle \quad \text{за} \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathcal{A} \quad \text{и}$$

$$\langle \omega, \alpha' + \alpha'' \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v((\alpha'_v + \alpha''_v)\omega) =$$

$$= \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha'_v \omega) + \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha''_v \omega) =$$

$$= \langle \omega, \alpha' \rangle + \langle \omega, \alpha'' \rangle \quad \text{за} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall \alpha', \alpha'' \in \mathcal{A}.$$

(ii) По определение

$$\langle x\omega, \alpha \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(\alpha_v x \omega) = \langle \omega, x\alpha \rangle \quad \text{за} \quad \forall \omega \in \Omega, \ \forall \alpha \in \mathcal{A}, \ \forall x \in F.$$

(iii) За произволни $\omega \in \Omega$ и $x \in F$ имаме

$$\langle \omega, \Delta x \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(x\omega) = 0,$$

съгласно Теоремата за резидуумите - Следствие 16.16 за $x\omega \in \Omega$.
(iv) За произволен k-линеен диференциал $\omega \in \Omega(D)$ и произволен адел $\alpha \in \mathcal{A}(D)$ от $v(\omega) \geq n_v$ и $v(\alpha_v) + n_v \geq 0$ имаме $v(\alpha_v \omega) = v(\alpha_v) + v(\omega) \geq 0$ за $\forall v \in \mathcal{P}$. Следователно диференциалите $\alpha_v \omega$ са регулярни във v и $Res_v(\alpha_v \omega) = 0$. Оттук

$$\langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{v \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P)| Res_v(\alpha_v \omega) = 0$$

и ω се съдържа в ортогоналното допълнение $\mathcal{A}(D)^{\perp}$ на $\mathcal{A}(D)$ относно $\langle\ ,\ \rangle$.
За включването $\mathcal{A}(D)^{\perp} \subseteq \Omega(D)$ трябва да проверим, че ако $\langle \omega, \alpha \rangle = 0$ за някой k-линеен диференциал $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ и $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D)$, то $div(\omega) \geq D$ и $\omega \in \Omega(D)$. Допукаме противното, т.е., че $\langle \omega, \alpha \rangle = 0$ за $\forall \alpha \in \mathcal{A}(D)$ и съществува клас от дискретни нормирания $v \in \mathcal{P}$, така че $v(\omega) < n_v$, т.е. $v(\omega) + 1 \leq n_v$. Избираме локален параметър t на v и разглеждаме адела $\beta \in \mathcal{A}$ с

$$\beta_v = t^{-v(\omega)-1}, \quad \beta_w = 0 \quad \text{за} \quad \forall w \in \mathcal{P} \setminus \{v\}.$$

Съгласно $v(\beta_v) + n_v \geq 0$ и $w(\beta_w) + n_w = w(0) + n_w = \infty + n_w = \infty$ за $\forall w \in \mathcal{P} \setminus \{v\}$ имаме $\beta \in \mathcal{A}(D)$. По предположение $\langle \omega, \beta \rangle = 0$. Но

$$\langle \omega, \beta \rangle = \sum_{w \in \mathcal{P}} |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_w)| Res_w(\beta_w \omega) = |Orb_{Gal(\overline{k}/k)}(P_v)| Res_v(t^{-v(\omega)-1}\omega) \neq 0,$$

така че полученото противоречие доказва включването $\mathcal{A}(D)^{\perp} \subseteq \Omega(D)$ и съвпадението $\mathcal{A}(D)^{\perp} = \Omega(D)$, Q.E.D.
Вътрешното произведение $\langle\ ,\ \rangle : \Omega \times \mathcal{A} \to \overline{k}$, определено в Лема 16.17 задава естествено изображение

$$\theta : \Omega \longrightarrow \Omega^W_{\overline{k}},$$

$$\theta(\omega)(\alpha) = \langle \omega, \alpha \rangle$$

на F-модула Ω на k-линейните диференциали в пространството $\Omega^W_{\overline{k}}$ на диференциалите на Weil на $F_{\overline{k}} = F * \overline{k}$.
Твърдим, че изображението θ се ограничава до

$$\theta : \Omega(D) \longrightarrow \Omega^W_{\overline{k}}(D).$$

Наистина, ако $\omega \in \Omega(D) = \mathcal{A}(D)^{\perp}$, то $\theta(\omega)|_{\mathcal{A}(D)} = \langle \omega, \mathcal{A}(D) \rangle = 0$. Съгласно (iii) имаме $\theta(\omega)|_{\Delta(F)} = \langle \omega, \Delta F \rangle = 0$, така че $\theta(\omega)|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0$ и $\theta(\omega) \in \Omega^W_{\overline{k}}(D)$ за $\forall \omega \in \Omega(D)$.
Да отбележим, че $\theta : \Omega \to \Omega^W_{\overline{k}}$ е k-линейно влагане, защото от $\theta(\omega) = 0$ следва $0 = \theta(\omega)|_{\mathcal{A}(D)} = \langle \omega, \mathcal{A}(D) \rangle$ за всеки дивизор $D \in Div(F)$, откъдето $\omega \in \Omega(D)$ и $div(\omega) \geq D$ за $\forall D \in Div(F)$. Това е изпълнено само за $\omega = 0$. Следователно $\theta : \Omega \to \Omega^W_{\overline{k}}$ и ограниченията $\theta : \Omega(D) \to \Omega^W_{\overline{k}}(D)$ за $\forall D \in Div(F)$ са k-линейни изображения. Съгласно Лема 16.17,

$$\theta(x\omega)(\alpha) = \langle x\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, x\alpha \rangle \quad \text{за} \quad \forall x \in F, \ \ \forall \omega \in \Omega, \ \ \forall \alpha \in \mathcal{A}.$$

От друга страна, съгласно F-линейната структура на $\Omega^W_{\overline{k}}$ имаме

$$[x\theta(\omega)](\alpha) = \theta(\omega)(x\alpha) = \langle \omega, x\alpha \rangle,$$

откъдето $\theta(x\omega) = x\theta(\omega)$ за $\forall x \in F$ и $\forall \omega \in \Omega$. Следователно изображението $\theta : \Omega \to \Omega^W_{\overline{k}}$ е F-линейно влагане. В частност, ако $\Omega_{\overline{k}} = F_{\overline{k}} dF_{\overline{k}}$ е $F_{\overline{k}} = F * \overline{k}$-модулът на $\overline{k}$-линейните диференциали, то $\theta : \Omega_{\overline{k}} \to \Omega^W_{\overline{k}}$ е $F_{\overline{k}}$-линейно влагане на 1-мерното $F_{\overline{k}}$-линейно пространство $\Omega_{\overline{k}}$ на $\overline{k}$-линейните диференциали в 1-мерното $F_{\overline{k}}$-линейно пространство $\Omega^W_{\overline{k}}$ на диференциалите на Weil на $F_{\overline{k}}$. Следователно $\theta : \Omega_{\overline{k}} \to \Omega^W_{\overline{k}}$ е изоморфизъм на $F_{\overline{k}}$-модули.

Лема 16.18. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, $\Omega = FdF$ е F-модулът на k-линейните диференциали на F, а $\Omega^W_{\overline{k}}$ е пространството на диференциалите на Weil на $F_{\overline{k}} = F * \overline{k}$. Тогава дивизорът*

$$div(\omega) = (\theta(\omega))$$

на произволен k-линеен диференциал $\omega \in \Omega$ съвпада с дивизора на съответния диференциал на Weil $\theta(\omega) \in \Omega^W_{\overline{k}}$.

Доказателство: По определение, анулаторът на диференциала на Weil $\theta(\omega)$ е

$$Ann(\theta(\omega)) = \{D \in Div(F) \ \mid \ \theta(\omega)|_{\mathcal{A}(D)+\Delta(F)} = 0\} =$$
$$= \{D \in Div(F) \ \mid \ \omega \in \mathcal{A}(D)^{\perp}\} = \{D \in Div(F) \ \mid \ \omega \in \Omega(D)\} =$$
$$= \{D \in Div(F) \ \mid \ div(\omega) \geq D\}.$$

Съгласно Лема-Определение 16.12,

$$Ann(\theta(\omega)) = \{D \in Div(F) \ \mid \ (\theta(\omega)) \geq D\}.$$

По този начин получаваме, че

$$\{D \in Div(F) \ \mid \ div(\omega) \geq D\} = \{D \in Div(F) \ \mid \ (\theta(\omega)) \geq D\}.$$

Съгласно $div(\omega) \geq div(\omega)$ имаме $(\theta(\omega)) \geq div(\omega)$. Аналогично, от $(\theta(\omega)) \geq (\theta(\omega))$ следва $div(\omega) \geq (\theta(\omega))$, така че $div(\omega) = (\theta(\omega))$, Q.E.D.

Следствие 16.19. *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k, $\Omega = FdF$ е F-модулът на k-линейните диференциали, $D \in Div(F)$ е дивизор на F,*

$$\Omega(D) = \{\omega \in \Omega \setminus \{0\} \ \mid \ div(\omega) \geq D\} \cup \{0\},$$

Ω^W е пространството на диференциалите на Weil на F и

$$\Omega^W(D) = (\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F))^* .$$

Тогава:
(i) всеки нетъждествено нулев k-линеен диференциал $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ задава k-линеен изоморфизъм

$$\mu_\omega : \mathcal{L}(div(\omega) - D) \longrightarrow \Omega(D),$$
$$\mu_\omega(x) = x\omega.$$

(ii) всеки нетъждествено нулев диференциал на Weil $\eta \in \Omega^W \setminus \{0\}$ задава k-линеен изоморфизъм

$$\mu_\eta : \mathcal{L}((\eta) - D) \longrightarrow \Omega^W(D),$$
$$\mu_\eta(x) = x\eta.$$

(iii) съществува k-линеен изоморэизъм $\Omega \to \Omega^W$.

Доказателство: (i) Изображението μ_ω е коректно зададено, защото от $x \in \mathcal{L}(div(\omega) - D)$ следва, че $div(x\omega) - D = div(x) + div(\omega) - D \geq 0$, така че $x\omega \in \Omega(D)$. Непосредствено се вижда, че $\mu\omega$ е k-линейно влагане. Освен това, μ_ω е върху $\Omega(D)$, защото $\dim_F \Omega = 1$ и за произволен k-линеен диференциал $\omega_1 \in \Omega(D) \subseteq \Omega$ съществува рационална функция $x \in F$, така че $\omega_1 = x\omega$. Сега от $div(x) + div(\omega) = div(x\omega) \geq D$ следва, че $x \in \mathcal{L}(div(\omega) - D$.
(ii) Както в (i), от $x \in \mathcal{L}((\eta) - D)$ следва $div(x) + (\eta) - D \geq 0$, така че $(x\eta) - D = div(x) + (\eta) - D \geq 0$ и $x\eta \in \Omega^W(D) = \{\omega \in \Omega^W \setminus \{0\} \ \mid \ (\omega) \geq D\} \cup \{0\}$, вземайки предвид Лема-Определение 16.12. От определението е ясно, че μ_η е k-линейно. За да установим, че μ_η е влагане да предположим, че $x\eta = 0 \in \Omega^W(D)$ и $x \in F \setminus \{0\}$. Тогава $(x\eta)(\alpha) = \eta(x\alpha) = 0$ за $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ и $\eta \equiv 0$, противно на избора $\eta \in \Omega^W \setminus \{0\}$. Всеки диференциал на Weil $\eta_1 \in \Omega^W(D)$ е от вида $\eta_1 = x\eta$, съгласно $dim_F \Omega^W = 1$. От $div(x) + (\eta) = (x\eta) \geq D$ следва, че $x \in \mathcal{L}((\eta) - D)$, така че μ_η е сюрективно, а оттам и k-линеен изоморфизъм.
(iii) Избираме $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ и $\eta \in \Omega^W \setminus \{0\}$. Тогава $\theta(\omega)$ и η принадлежат на 1-мерното $F_{\overline{k}}$-линейно пространство $\Omega^W_{\overline{k}}$, така че съществува $x \in F_{\overline{k}}$ с $\theta(\omega) = x\eta$. Следователно дивизорът $(\theta(\omega)) = div(x) + (\eta)$ на $\theta(\omega)$ е линейно еквивалентен на дивизора на η и

$$l(div(\omega) - D) = l((\theta(\omega)) - D) = l((\eta) - D),$$

съгласно $div(\omega) = (\theta(\omega))$ и Лема 14.8 (vi). Оттук получаваме k-линейните изоморфизми

$$\mathcal{L}(div(\omega) - D) \simeq \mathcal{L}((\theta(\omega) - D) \simeq \mathcal{L}((\eta) - D).$$

Комбинирането с (i) и (ii) дава k-линеен изоморфизъм $\Omega(D) \simeq \Omega^W(D)$ за всеки дивизор $D \in Div(F)$. Да напомним, че по определение $\Omega^W = \cup_{D \in Div(F)} \Omega^W(D)$. Твърдим, че

$$\Omega = \cup_{D \in Div(F)} \Omega(D).$$

Включването $\Omega \supseteq \cup_{D \in Div(F)} \Omega(D)$ е ясно. За обратното включване да забележим, че всеки нетъждествено нулев k-линеен диференциал $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ принадлежи на $\Omega(div(\omega))$ съгласно $div(\omega) \geq div(\omega)$, така че $\Omega \subseteq \cup_{D \in Div(F)} \Omega(D)$ и $\Omega = \cup_{D \in Div(F)} \Omega(D)$. Изоморфизмите $\Omega(D) \simeq \Omega^W(D)$ на линейни пространства над k за $\forall D \in Div(F)$ задават k-линеен изоморфизъм

$$\Omega = \cup_{D \in Div(F)} \Omega(D) \simeq \cup_{D \in Div(F)} \Omega^W(D) = \Omega^W,$$

Q.E.D.

Теорема 22. (Теорема на Riemmann-Roch) *Нека F е функционално поле на една променлива със съвършено поле от константи k и род g, $D \in Div(F)$ е дивизор на F, а $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ е нетъждествено нулев k-линеен диференциал на F. Тогава*

$$l(D) - l(div(\omega) - D) = \deg(D) - g + 1.$$

Ако $\deg(D) > 2g-2$, *то дивизорът* D *изпълнява Теоремата на Riemann с равенство,* $l(D) = \deg(D) - g + 1$.

Доказателство: Съгласно аделната форма на Теоремата на Riemann-Roch - Теорема 20 имаме

$$l(D) - \dim_k(\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = \deg(D) - g + 1.$$

По определението за диференциали на Weil,

$$\dim_k(\mathcal{A}/\mathcal{A}(D) + \Delta(F)) = \dim_k \Omega^W(D) \quad \text{за} \quad \forall D \in Div(F).$$

Използвайки k-линейните изоморфизми $\Omega^W(D) \simeq \mathcal{L}(\eta) - D) \simeq \mathcal{L}(div(\omega) - D)$ за $\forall \eta \in \Omega^W \setminus \{0\}$ и $\forall \omega \in \Omega \setminus \{0\}$ получаваме Теоремата на Riemann-Roch

$$l(D) - l(div(\omega) - D) = \deg(D) - g + 1.$$

Ако $D = 0$, то Теоремата на Riemann-Roch гласи, че

$$1 - l(div(\omega)) = l(0) - l(div(\omega)) = \deg(0) - g + 1 = -g + 1,$$

откъдето $l(div(\omega)) = g$. За $D = div(\omega)$, $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$ имаме

$$g - 1 = l(div(\omega)) - l(0) = \deg(div(\omega)) - g + 1,$$

така че $\deg(div(\omega)) = 2g - 2$.
Ако $D \in Div(F)$ е дивизор със степен $\deg(D) > 2g - 2$, то

$$deg(div(\omega) - D) = \deg(div(\omega)) - \deg(D) = 2g - 2 - \deg(D) < 0,$$

откъдето $\mathcal{L}(div(\omega) - D) = 0$ съгласно Следствие 14.11. По този начин, Теоремата на Riemann-Roch се свежда до Теоремата на Riemann с равенство, $l(D) = \deg(D) - g + 1$ за дивизори $D \in Div(F)$ от степен $\deg(D) > 2g - 2$, Q.E.D.