Глава 20

Допирателно пространство на Зариски.

1. Координатно описание на допирателното пространство на Зариски към афинно многообразие

Определение 20.1. *Нека $X/k \subset \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие, чийто идеал $I(X) = I(X, \overline{k}) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \lhd \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ е породен от полиноми $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ с коефициенти от k, $a \in X(F) := X \cap F^n$ е F-рационална точка на X за някакво поле $k \subseteq F \subseteq \overline{k}$, а $\mathcal{O}_a(X, F) = F[X]_{I_X(a)} \subset F(X)$ е локалният пръстен на a в X над F. Тогава F-диференциране на $\mathcal{O}_a(X, F)$ в a е изображение $D : \mathcal{O}_a(X, F) \rightarrow F$, което е:*
(i) F-линейно и
(ii) $D(fg) = D(f)g(a) + f(a)D(g)$ за $\forall f, g \in \mathcal{O}_a(X, F)$.

Всяко F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X, F) \rightarrow F$ се анулира върху F. По-точно, за $1 \in F$ е в сила $D(1) = D(1.1) = D(1).1 + 1.D(1) = 2D(1)$, откъдето $D(1) = 0$. Съгласно F-линейността на D, оттук следва $D(\alpha) = D(\alpha.1) = \alpha D(1) = \alpha.0 = 0$ за $\forall \alpha \in F$.

Лема-Определение 20.2. *Нека $X/k \subset \overline{k}^n$ е квази-афинно многообразие с идеал $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle \lhd \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$, породен от $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $a \in X(F)$ е F-рационална точка и $\mathcal{O}_a(X, F)$ е локалният пръстен на a в X над F. Тогава множеството $T_a(X, F) := \mathrm{Der}_a(\mathcal{O}_a(X, F), F)$ на F-диференциранията $D : \mathcal{O}_a(X, F) \rightarrow F$ е линейно пространство над F относно поточково определените събиране*

$$D_1 + D_2 : \mathcal{O}_a(X, F) \longrightarrow F,$$
$$(D_1 + D_2)(f) := D_1(f) + D_2(f) \quad \text{за} \quad \forall f \in \mathcal{O}_a(X, F)$$

и умножение с $\lambda \in F$,

$$\lambda D : \mathcal{O}_a(X, F) \longrightarrow F,$$
$$(\lambda D)(f) = \lambda D(f) \quad \text{за} \quad \forall f \in \mathcal{O}_a(X, F),$$

което се нарича допирателно пространство на Зариски към X в a над F.

Доказателство: От задължителния курс по линейна алгебра е известно, че множеството $Hom_F(\mathcal{O}_a(X, F), F)$ на F-линейните изображения $\mathcal{O}_a(X, F) \rightarrow F$ е линейно пространство над F относно поточково определените събиране и умножение с $\lambda \in F$. За произволни $D_1, D_2 \in T_a(X, F)$ сумата $D_1 + D_2$ изпълнява правилото на Leibnitz-Newton за диференциране на произведение, съгласно

$$(D_1 + D_2)(fg) = D_1(fg) + D_2(fg) =$$
$$= D_1(f)g(a) + f(a)D_1(g) + D_2(f)g(a) + f(a)D_2(g) =$$
$$= [D_1(f) + D_2(f)]g(a) + f(a)[D_1(g) + D_2(g)] =$$
$$= (D_1 + D_2)(f)g(a) + f(a)(D_1 + D_2)(g).$$

Аналогично, за $\forall D \in T_a(X, F)$ и $\forall \lambda \in F$ е изпълнено

$$(\lambda D)(fg) = \lambda D(fg) = \lambda[D(f)g(a) + f(a)D(g)] =$$
$$= [\lambda D(f)]g(a) + f(a)[\lambda D(g)] == (\lambda D)(f)g(a) + f(a)(\lambda D)(g)$$

и $\lambda D \in T_a(X, F)$. Това доказва, че $T_a(X, F)$ е F-линейно подпространство на $Hom_F(\mathcal{O}_a(X, F), F)$, а оттам и линейно пространство над F, Q.E.D.
Следващото твърдение описва допирателното пространство на Зариски $T_a(\overline{k}^n, F)$ към афинното пространство $\overline{k}^n$ в точка $a \in F^n$ над поле F, съдържащо дефиниционното поле на a.
Да напомним, че ако V е линейно пространство над поле F, то F-линейните изображения $V \to F$ се наричат F-линейни функционали на V.

Твърдение 20.3. *Нека $k \subseteq F \subseteq \overline{k}$ са полета, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ и $\mathcal{O}_a(X, F) = F[x_1, \ldots, x_n]_{\mathfrak{M}_a}$ е локалният пръстен на a в $\overline{k}^n$ над F, т.е. локализацията на полиномиалния пръстен $F[x_1, \ldots, x_n]$ по максималния идеал $\mathfrak{M}_a = \langle x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n \rangle \triangleleft F[x_1, \ldots, x_n]$, отговарящ на точката a.*
(i) Всяко F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X, F) \to F$ индуцира F-линеен функционал

$$D : F[x_1, \ldots, x_n] = F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)} \longrightarrow F,$$

който се анулира върху пространствата $F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)}$ на хомогенните полиноми на $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ от обща степен $i \geq 2$ и върху константите $F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(0)} = F$.
(ii) Всеки F-линеен функционал

$$D : F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(1)} = l_F(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) \longrightarrow F$$

има единствено продължение до F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F$.
В резултат, еднозначно определените F-диференцирания

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \longrightarrow F,$$

продължаващи F-линейните функционали

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a : F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(1)} \longrightarrow F$$

с

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (x_j - a_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n \end{cases}$$

образуват базис на допирателното пространство на Зариски $T_a(\overline{k}^n, F)$ към $\overline{k}^n$ в a над F.

Доказателство: (i) Полиномите $F[x_1, \ldots, x_n] = F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]$ на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от F съвпадат с полиномите на $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ с коефициенти от F за произволни $a_1, \ldots, a_n \in F$. Разлагаме

$$F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)}$$

в директна сума на F-линейните пространства $F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)}$ на хомогенните полиноми на $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ от степен $i \geq 0$. Вече доказахме, че произволно F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F$ се анулира върху константите $F = F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(0)}$. За анулирането на D върху $F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)}$ за $i \geq 2$ използваме, че D е F-линейно изображение и проверяваме, че $D(\mu) = 0$ за произволен моном $\mu = (x_1 - a_1)^{i_1} \ldots (x_n - a_n)^{i_n}$ на $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ от степен $i_1 + \ldots + i_n = i \geq 2$ с $i_j \geq 0$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. За всеки такъв моном μ съществува $1 \leq k \leq n$ с $i_k \geq 1$. Тогава

$$\lambda := \frac{\mu}{x_k - a_k} =$$

$$= (x_1 - a_1)^{i_1} \ldots (x_{k-1} - a_{k-1})^{i_{k-1}} (x_k - a_k)^{i_k - 1} (x_{k+1} - a_{k+1})^{i_{k+1}} \ldots (x_n - a_n)^{i_n}$$

е моном на $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ от степен $i - 1 \geq 1$ и $\lambda(a) = 0$. По правилото на Leibnitz-Newton за диференциране на произведение,

$$D(\mu) = D((x_k - a_k)\lambda) = D(x_k - a_k)\lambda(a) + (x_k - a_k)|_{x=a} D(\lambda) =$$
$$= D(x_k - a_k).0 + 0.D(\lambda) = 0.$$

(ii) Нека $D : F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(1)} = l_F(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) \to F$ е линеен функционал върху хомогенните линейни полиноми на $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ от степен 1. Определяме

$$D : F[x_1, \dots, x_n] = F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(i)} \longrightarrow F,$$
$$D(f^{(0)} + f^{(1)} + \dots + f^{(d)}) = D(f^{(1)}) = D\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i D(x_i - a_i)$$

като представяме произволен полином $f \in F[x_1, \dots, x_n]$ като сума $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots + f^{(d)}$ на хомогенни полиноми $f^{(s)} \in F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(s)}$ на $x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$ от степен s и задавайки $D(f) = D(f^{(1)})$ за хомогенната компонента $f^{(1)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - a_i)$ от степен 1. За произволни $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ и $\lambda \in F$, хомогенните компоненти на $f + g$ и λf от степен 1 са $(f+g)^{(1)} = f^{(1)} + g^{(1)}$, съответно, $(\lambda f)^{(1)} = \lambda f^{(1)}$. Следователно

$$D(f+g) = D((f+g)^{(1)}) = D(f^{(1)} + g^{(1)}) = D(f^{(1)}) + D(g^{(1)}) = D(f) + D(g) \quad \text{и}$$
$$D(\lambda f) = D((\lambda f)^{(1)}) = D(\lambda f^{(1)}) = \lambda D(f^{(1)}) = \lambda D(f)$$

за $\forall f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$, $\lambda \in F$ и $D : F[x_1, \dots, x_n] \to F$ е F-линейно изображение. Произволни полиноми $f, g \in F[x_1, \dots, x_n] = F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(i)}$ се разлагат в сума $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots + f^{(d)}$, съответно, $g = g^{(0)} + g^{(1)} + \dots + g^{(l)}$ на хомогенни компоненти с неотрицателни степени. Следователно хомогенната компонента на fg от степен 1 е

$$(fg)^{(1)} = ([f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots + f^{(d)}][g^{(0)} + g^{(1)} + g^{(2)} + \dots + g^{(l)}])^{(1)} =$$
$$= f^{(0)} g^{(1)} + f^{(1)} g^{(0)} = f(a) g^{(1)} + f^{(1)} g(a)$$

с $f(a), g(a) \in F$. Оттук

$$D(fg) = D((fg)^{(1)}) = D(f(a) g^{(1)} + f^{(1)} g(a)) =$$
$$= f(a) D(g^{(1)}) + D(f^{(1)}) g(a) = f(a) D(g) + D(f) g(a),$$

съгласно F-линейността на D и $D : F[x_1, \dots, x_n] \to F$ е F-диференциране в a. Да напомним, че максималният идеал на точката $a = (a_1, \dots, a_n)$ в афинния координатен пръстен $F[x_1, \dots, x_n]$ на $\overline{k}^n$ е

$$\mathfrak{M}_a := \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle = \oplus_{i=1}^{\infty} F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(i)}.$$

Локалният пръстен на a в $\overline{k}^n$ над F е локализацията

$$\mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) = \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f, g \in F[x_1, \dots, x_n],\ g(a) \neq 0 \right\}$$

на $F[x_1, \dots, x_n]$ относно максималния идеал $\mathfrak{M}_a$ на точката a. За произволно F-диференциране $D_o : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F$ и произволни $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$ с $g(a) \neq 0$ е в сила равенството

$$D_o(f) = D_o\left(\frac{f}{g}.g\right) = D_o\left(\frac{f}{g}\right) g(a) + \frac{f(a)}{g(a)} D_o(g).$$

Следователно

$$D_o\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{D_o(f) g(a) - f(a) D_o(g)}{g(a)^2}$$

се определя еднозначно от $D_o : F[x_1, \dots, x_n] \to F$. Произволно F-диференциране $D : F[x_1, \dots, x_n] \to F$ в a се продължава до коректно определено изображение

$$D : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) = \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f, g \in F[x_1, \dots, x_n],\ g(a) \neq 0 \right\} \longrightarrow F,$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) := \frac{D(f)g(a) - f(a)D(g)}{g(a)^2}.$$

Непосредствено се проверява, че така определеното изображение е F-диференциране в a. По-точно, за произволни $\frac{f_1}{g_1}, \frac{f_2}{g_2} \in \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F)$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$D\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) = D\left(\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}\right) =$$

$$= \frac{D(f_1g_2 + f_2g_1)g_1(a)g_2(a) - [f_1(a)g_2(a) + f_2(a)g_1(a)]D(g_1g_2)}{g_1(a)^2g_2(a)^2} =$$

$$= \frac{[D(f_1)g_2(a) + f_1(a)D(g_2) + D(f_2)g_1(a) + f_2(a)D(g_1)]g_1(a)g_2(a)}{g_1(a)^2g_2(a)^2} -$$

$$- \frac{[f_1(a)g_2(a) + f_2(a)g_1(a)][D(g_1)g_2(a) + g_1(a)D(g_2)]}{g_1(a)^2g_2(a)^2} =$$

$$= \frac{D(f_1)g_1(a) - f_1(a)D(g_1)}{g_1(a)^2} + \frac{D(f_2)g_2(a) - f_2(a)D(g_2)}{g_2(a)^2} = D\left(\frac{f_1}{g_1}\right) + D\left(\frac{f_2}{g_2}\right).$$

Аналогично,

$$D\left(\lambda\frac{f_1}{g_1}\right) = D\left(\frac{\lambda f_1}{g_1}\right) = \frac{D(\lambda f_1)g_1(a) - \lambda f_1(a)D(g_1)}{g_1(a)^2} =$$

$$= \lambda\frac{D(f_1)g_1(a) - f_1(a)D(g_1)}{g_1(a)^2} = \lambda D\left(\frac{f_1}{g_1}\right)$$

и

$$D\left(\frac{f_1}{g_1}.\frac{f_2}{g_2}\right) = D\left(\frac{f_1f_2}{g_1g_2}\right) =$$

$$= \frac{D(f_1)f_2(a)g_1(a)g_2(a) + D(f_2)f_1(a)g_1(a)g_2(a) - f_1(a)f_2(a)g_2(a)D(g_1) - f_1(a)f_2(a)g_1(a)D(g_2)}{g_1(a)^2g_2(a)^2} =$$

$$= \left[\frac{D(f_1)g_1(a) - f_1(a)D(g_1)}{g_1(a)^2}\right]\frac{f_2(a)}{g_2(a)} + \frac{f_1(a)}{g_1(a)}\left[\frac{D(f_2)g_2(a) - f_2(a)D(g_2)}{g_2(a)^2}\right],$$

Q.E.D.

Определение 20.4. *Изображението*

$$\frac{\partial}{\partial x} : F[x] \to F[x],$$

определено по правилото

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{n} a_ix^i\right) = \sum_{i=0}^{n} ia_ix^{i-1}$$

се нарича формално диференциране на полиномите на една променлива x с коефициенти от поле F.

Лема 20.5. *Формалното диференциране $\frac{\partial}{\partial x} : F[x] \to F[x]$ на полиноми на една променлива е F-линейно диференциране, т.е.*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f) = \lambda\frac{\partial}{\partial x}(f), \quad \frac{\partial}{\partial x}(f+g) = \frac{\partial}{\partial x}(f) + \frac{\partial}{\partial x}(g), \quad \frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g)$$

за произволни $f, g \in F[x]$ и $\lambda \in F$.

Доказателство: Ако $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $\lambda \in F$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda f) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{n} i\lambda a_i x^{i-1} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x}(f).$$

За $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ и $g(x) = \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$ имаме

$$\frac{\partial}{\partial x}(f) + \frac{\partial}{\partial x}(g) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} + \sum_{j=1}^{m} j b_j x^{j-1} = \sum_{i=1}^{\max(n,m)} i(a_i + b_i)x^{i-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=0}^{\max(n,m)} (a_i + b_i)x^i\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f+g).$$

В израза

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g) = \left(\sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} j b_j x^{j-1}\right)$$

транслираме индексите на сумиране така, че да започват от 0 и извършваме означените умножения. Получаваме

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g) = \left(\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)a_{i+1}x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_j x^j\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m-1}(j+1)b_{j+1}x^j\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1+m}\left(\sum_{p=0}^{i}(p+1)a_{p+1}b_{i-p}\right)x^i + \sum_{i=0}^{n+m-1}\left(\sum_{q=0}^{i}(i-q+1)a_q b_{i-q+1}\right)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1}\left(\sum_{p=0}^{i}(p+1)a_{p+1}b_{i-p} + \sum_{q=0}^{i}(i-q+1)a_q b_{i-q+1}\right)x^i.$$

За да извършим сумирането в скобите заменяме индекса на сумиране p с $s = p+1$. Това дава

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g) = \sum_{i=0}^{n+m-1}\left(\sum_{s=1}^{i+1} s a_s b_{i+1-s} + \sum_{q=0}^{i}(i-q+1)a_q b_{i-q+1}\right)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1}\left((i+1)a_0 b_{i+1} + \sum_{s=1}^{i}(i+1)a_s b_{i+1-s} + (i+1)a_{i+1}b_0\right)x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m-1}(i+1)\left(\sum_{s=0}^{i+1} a_s b_{i+1-s}\right)x^i.$$

След замяна на индекса на сумиране i с $j = i+1$ пресмятаме, че

$$\frac{\partial}{\partial x}(f)g + f\frac{\partial}{\partial x}(g) = \sum_{j=1}^{n+m} j\left(\sum_{s=0}^{j} a_s b_{j-s}\right)x^{j-1} = \left(\sum_{j=0}^{n+m}\left(\sum_{s=0}^{j} a_s b_{j-s}\right)x^j\right) = \frac{\partial}{\partial x}(fg),$$

Q.E.D.

Следствие 20.6. *В произволна F-рационална точка $a \in F^n$ на афинното пространство $\overline{k}^n$, F-диференцираният*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a : F[x_1, \ldots, x_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n]^{(i)} \longrightarrow F$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a \left(\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_\alpha (x_1-a_1)^{\alpha_1}\dots(x_n-a_n)^{\alpha_n}\right) = c_{(0^{i-1},1,0^{n-i})}$$

са композиции

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)(a)$$

на формалните диференцирания $\frac{\partial}{\partial x_i} : F[x_1,\dots,x_n] \to F[x_1,\dots,x_n]$ *относно* x_i *и заместването в* a.

Доказателство: Заместването в a

$$F[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow F,$$

$$f(x_1,\dots,x_n) \mapsto f(a_1,\dots,a_n) = f(a)$$

е F-линейно изображение, съгласно $(f+g)(a) = f(a)+g(a)$ и $(\lambda f)(a) = \lambda f(a)$ за $\forall f,g \in F[x_1,\dots,x_n]$, $\forall \lambda \in F$. Следователно композицията на формалното диференциране относно x_i със заместването в a е F-линейно изображение $F[x_1,\dots,x_n] \to F$. Вземайки предвид F-линейността на F-диференциранията $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a : F[x_1,\dots,x_n] \to F$ в a, достатъчно е да докажем следствието за моном $\mu = (x_1-a_1)^{\alpha_1}\dots(x_n-a_n)^{\alpha_n}$ на $x_1-a_1,\dots,x_n-a_n$. Вече видяхме, че $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (x_i-a_i) = 1$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a$ се анулира върху всички други мономи на $x_1-a_1,\dots,x_n-a_n$. Формалното диференциране

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : F[x_1,\dots,x_n] \longrightarrow F[x_1,\dots,x_n]$$

се анулира върху всички мономи μ, които не зависят от x_i-a_i. Ако μ се дели на x_i-a_i и $\lambda = \frac{\mu}{x_i-a_i}$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu) = \frac{\partial}{\partial x_i}((x_i-a_i)\lambda) = \lambda + (x_i-a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda).$$

Заместването в a дава $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(a) = \lambda(a)$. Мономите λ на $x_1-a_1,\dots,x_n-a_n$ с положителна обща степен се анулират в a. Следователно $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu)(a) = \lambda(a) \neq 0$ само когато $\lambda \equiv 1 \in F[x_1-a_1,\dots,x_n-a_n]$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i-a_i)(a) = 1 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (x_i-a_i),$$

Q.E.D.

Твърдение 20.7. *Нека* $X \subseteq \overline{k}^n$ *е квази-афинно многообразие, чийто идеал* $I(X) = \langle f_1,\dots,f_m\rangle \lhd \overline{k}[x_1,\dots,x_n]$ *се поражда от* $f_1,\dots,f_m \in k[x_1,\dots,x_n]$, $a \in X(F) := X\cap F^n$ *за някакво поле* $k \subseteq F \subseteq \overline{k}$ *и* $\mathcal{O}_a(X,F)$ *е локалният пръстен на* a *в* X *над* F. *Тогава допирателното пространство на Зариски*

$$T_a(X,F) = \left\{ v = \sum_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a \in T_a(\overline{k}^n, F) \,\Big|\, v(f_1) = \dots = v(f_m) = 0 \right\} \qquad (20.1)$$

към X *в* a *над* F *се състои от онези допирателни вектори към* $\overline{k}^n$ *в* a *над* F, *които анулират пораждащите* $f_1,\dots,f_m$ *на идеала* $I_F(X) := I(X)\cap F[x_1,\dots,x_n] = \langle f_1,\dots,f_m\rangle \lhd F[x_1,\dots,x_n]$ *на* X *над* F.

С други думи, координатите $(v_1, \dots, v_n)^t \in M_{n\times 1}(F)$ *на допирателните вектори* $v = \sum\limits_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a \in T_a(X, F)$ *са решенията на хомогенната линейна система уравнения, чиято матрица от коефициенти*

$$\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{array}\right) \in M_{m\times n}(F)$$

съвпада с Якобиевата матрица ва $f_1, \dots, f_m$ *относно* $x_1, \dots, x_n$ *в* a.

Доказателство: Произволно F-дифренциране $D : \mathcal{O}_a(X, F) \to F$ в a се ограничава до F-диференциране в a на афинния координатен пръстен $F[X]$ на X над F, $D : F[X] \to F$. Всяко F-диференциране на $F[X]$ в a се повдига до F-диференциране на полиномиалния пръстен $F[x_1, \dots, x_n]$ в a по правилото

$$D_o : F[x_1,\dots,x_n] = \oplus_{i=0}^{\infty} F[x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n]^{(i)} \longrightarrow F,$$
$$D_o(f) := D(f + I_F(X)) \quad \text{за} \quad \forall f \in F[x_1,\dots,x_n].$$

В частност, за $\forall f \in I_F(X)$ имаме $D_o(f) = 0_F$, защото F-линейното изображение $D : F[X] \to F$ трансформира нулевия елемент $0_{F[X]} = I_F(X) \in F[X]$ в $0_F \in F$. За да проверим, че D индуцира F-диференциране D_o на $F[x_1, \dots, x_n]$ в a, да изберем $f, g \in F[x_1, \dots, x_n]$, $\lambda \in F$ и да пресметнем, че

$$D_o(f+g) = D(f+g+I_F(X)) = D((f+I_F(X)) + (g+I_F(X))) =$$
$$= D(f+I_F(X)) + D(g+I_F(X)) = D_o(f) + D_o(g),$$

$$D_o(\lambda f) = D(\lambda f + I_F(X)) = D(\lambda(f + I_F(X))) = \lambda D(f + I_F(X)) = \lambda D_o(f),$$

$$D_o(fg) = D(fg + I_F(X)) = D((f + I_F(X))(g + I_F(X))) =$$
$$= D(f+I_F(X))(g+I_F(X))(a) + (f+I_F(X))(a)D(g+I_F(X)) = D_o(f)g(a) + f(a)D_o(g).$$

Да напомним, че F-диференцирането $D_o : F[x_1, \dots, x_n] \to F$ в a има еднозначно определено продължение до F-диференциране

$$D_o : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) = \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f, g \in F[x_1,\dots,x_n],\ g(a) \neq 0 \right\} \longrightarrow F$$

в a, което се анулира върху локализацията

$$I_F(X)_{\mathfrak{M}_a} = \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f \in I_F(X),\ g \in F[x_1,\dots,x_n],\ g(a) \neq 0 \right\}$$

на идеала $I_F(X)$ на X над F относно максималния идеал

$$\mathfrak{M}_a = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle \triangleleft F[x_1, \dots, x_n]$$

на a.

Полиномите $f_1, \dots, f_m \in F[x_1, \dots, x_n]$ пораждат идеала $I_F(X)_{\mathfrak{M}_a} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \triangleleft \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F)$, защото $I_F(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \triangleleft F[x_1, \dots, x_n]$ се поражда от тези полиноми. Твърдим, че F-диференциране $D_o : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F$ в a се анулира върху $I_F(X)_{\mathfrak{M}_a}$ тогава и само тогава, когато $D_o(f_1) = \dots = D_o(f_m) = 0$. За целта използваме, че произволен елемент на $I_F(X)_{\mathfrak{M}_a}$ е от вида $\varphi = \sum\limits_{i=1}^m f_i \frac{h_i}{g_i}$ за полиноми $h_i, g_i \in F[x_1, \dots, x_n]$ с $g_i(a) \neq 0$. От $a \in X$ следва анулирането $f_1(a) = \dots = f_m(a) = 0$ на пораждащите на идеала на X в a. В резултат,

$$D_o(\varphi) = \sum_{i=1}^m D_o(f_i)\frac{h_i(a)}{g_i(a)} + f_i(a) D_o\left(\frac{h_i}{g_i}\right) = \sum_{i=1}^m D_o(f_i)\frac{h_i(a)}{g_i(a)}$$

условието $D_o(f_1) = \dots = D_o(f_m) = 0$ е достатъчно за анулирането на D_o върху $I_F(X)_{\mathfrak{M}_a}$.

Горните разглеждания доказват включването

$$T_a(X,F) \subseteq \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_a \in T_a(\overline{k}^n, F) \,\middle|\, v(f_1) = \ldots = v(f_m) = 0 \right\}.$$

За обратното включване ще докажем, че произволно F-диференциране $D_o : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F)$ в a, анулиращо се върху $I_F(X)_{\mathfrak{M}_a}$ индуцира F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X,F) \to F$ в a. По-точно, $D_o : \mathcal{O}_a(\overline{k}^n, F) \to F$ с $D_o(I_F(X)_{\mathfrak{M}_a}) = 0$ се ограничава до F-диференциране $D_o : F[x_1,\ldots,x_n] \to F$ в a с $D_o(I_F(X)) = 0$. Това позволява определянето на

$$D : F[X] := F[x_1,\ldots,x_n]/I_F(X) \longrightarrow F$$

по правилото

$$D(f + I_F(X)) := D_o(f) \quad \text{за} \quad \forall f \in F[x_1,\ldots,x_n].$$

Определението на D е коректно, защото за произволни $f, f_1 \in F[x_1,\ldots,x_n]$ с $f + I_F(X) = f_1 + I_F(X)$ разликата $f_0 = f - f_1 \in I_F(X)$, откъдето

$$0 = D_o(f_0) = D_o(f) - D_o(f_1)$$

и определението $D(f + I_F(X)) = D_o(f) = D_o(f_1) = D(f_1 + I_F(X))$ на D_o не зависи от избора на представител на класа $f + I_F(X) \in F[X]$. За произволни $f, g \in F[x_1,\ldots,x_n]$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$\begin{aligned} D((f + I_F(X)) + (g + I_F(X))) &= D(f + g + I_F(X)) = D_o(f+g) = \\ &= D_o(f) + D_o(g) = D(f + I_F(X)) + D(g + I_F(X)), \end{aligned}$$

$$D(\lambda(f + I_F(X))) = D(\lambda f + I_F(X)) = D_o(\lambda f) = \lambda D_o(f) = \lambda D(f + I_F(X)),$$

$$\begin{aligned} D((f + I_F(X))(g + I_F(X))) &= D(fg + I_F(X)) = D_o(fg) = D_o(f)g(a) + f(a)D_o(g) = \\ &= D(f + I_F(X))(g + I_F(X))(a) + (f + I_F(X))(a)D(g + I_F(X)), \end{aligned}$$

така че $D : F[X] \to F$ е F-диференциране в a. Както вече доказахме,

$$D : \mathcal{O}_a(X,F) \longrightarrow F,$$

$$D\left(\frac{f + I_F(X)}{g + I_F(X)} \right) := \frac{D(f + I_F(X))g(a) - f(a)D(g + I_F(X))}{g(a)^2} = \frac{D_o(f)g(a) - f(a)D_o(g)}{g(a)^2}$$

е F-диференциране на $\mathcal{O}_a(X,F)$ в a. Това доказва

$$\left\{ v = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_a \in T_a(\overline{k}^n, F) \,\middle|\, v(f_1) = \ldots = v(f_m) = 0 \right\} \subseteq T_a(X,F)$$

и (20.1).

Съгласно Следствие 20.6, условието

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) \begin{pmatrix} v_1 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix} = 0_{m\times 1}$$

е еквивалентно на

$$v(f_i) = \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a \right)(f_i) = \sum_{j=1}^{n} v_j \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a (f_i) \right] = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = 0$$

за $1 \leq i \leq m$ и за допирателен вектор $v = \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_a \in T_a(\overline{k}^n, F)$ към $\overline{k}^n$ в a над F, Q.E.D.

Нека $X \subset \overline{\mathbb{F}_q}^n$ е афинно многообразие с идеал $I(X) = \langle f_1,\ldots,f_m \rangle \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_1,\ldots,x_n]$, породен от $f_1,\ldots,f_m \in \mathbb{F}_q[x_1,\ldots,x_n]$ и $a \in X$. Дефиниционното поле на $a =$

$(a_1, \ldots, a_n)$ над $\mathbb{F}_q$ е минималното разширение $\mathbb{F}_{q^{\delta(a)}} = \mathbb{F}_q(a_1, \ldots, a_n)$ на $\mathbb{F}_q$, съдържащо всички компоненти $a_1, \ldots, a_n$ на a. Якобиевата матрица $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n])$ се състои от полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от $\mathbb{F}_q$. Стойността $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a) \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_{q^{\delta(a)}})$ е матрица с елементи от $\mathbb{F}_{q^{\delta(a)}}$ и пространството от решения $T_a(X, F)$ на хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)$ е определено над произволно разширение $F \supseteq \mathbb{F}_{q^{\delta(a)}}$. Размерността

$$\dim_F T_a(X, F) = n - \mathrm{rk}\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a)$$

не зависи от $F \supseteq \mathbb{F}_{q^{\delta(a)}}$. Аналогично, минималното разстояние $d = d(T_a(X, F))$ не зависи от F, защото d е минималното естествено число, за което съществуват d линейно зависими стълба на $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)$.

2. Диференциал на регулярно изображение на квази-афинни многообразия

Твърдение-Определение 20.8. *Нека $X \subseteq \overline{k}^n$ и $Y \subseteq \overline{k}^m$ са афинни многообразия, чиито идеали $I(X) = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle \triangleleft \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$, съответно, $I(Y) = \langle h_1, \ldots, h_t\rangle \triangleleft \overline{k}[y_1, \ldots, y_m]$ са породени от полиноми $g_1, \ldots, g_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$, съответно, $h_1, \ldots, h_t \in k[y_1, \ldots, y_m]$ с коефициенти от k, а $f_1, \ldots, f_m \in k(X)$ са разионални функции върху X с коефициенти от k, задаващи доминантно рационално изображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \dashrightarrow Y$. Тогава за всяка F-рационална точка $a \in \mathcal{D}_f(F) := \mathcal{D}_f \cap F^n$ на областта на регулярност $\mathcal{D}_f$ на f съществува F-линейно изображение*

$$(df)_a : T_a(X, F) \longrightarrow T_{f(a)}(Y, F),$$

$$((df)_a D)(\psi) := (Df^*)(\psi) = D(\psi(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)))$$

за $\forall D \in T_a(X, F)$, $\forall \psi \in \mathcal{O}_{f(a)}(Y, F)$, което се нарича диференциал на f в a. Ако $f = (f_1, \ldots, f_m) : \overline{k}^n \dashrightarrow \overline{k}^m$ е доминантно рационално изображение на афинни пространства и $a \in \mathcal{D}_f(F)$ е F-рационална точка от областта на регулярност $\mathcal{D}_f$ на f, то матрицата на $(df)_a$ спрямо базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$ на $T_a(\overline{k}^n, F)$ и базиса $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(q)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{f(a)}$ на $T_{f(a)}(\overline{k}^m, F)$ съвпада с Якобиевата матрица

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

на $f_1, \ldots, f_m$ относно $x_1, \ldots, x_n$ в a.

Доказателство: Регулярното изображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ индуцира хомоморфизъм на F-алгебри $f^* : F(f(\mathcal{D}_f)) \to F(\mathcal{D}_f)$ от полето на рационалните функции на $f(\mathcal{D}_f)$ над F в полето на рационалните функции на $\mathcal{D}_f$ над F. Поради Зариски гъстотата на $\mathcal{D}_f$ в X и Зариски гъстотата на $f(\mathcal{D}_f)$ в Y имаме съвпадения $F(f(\mathcal{D}_f)) = F(Y)$ и $F(\mathcal{D}_f) = F(X)$ на функционалните полета над F и влагане на F-алгебри $f^* : F(Y) \hookrightarrow F(X)$. Да забележим, че f^* влага локалния пръстен $\mathcal{O}_{f(a)}(Y, F)$ на $f(a)$ в Y над F в локалния пръстен $\mathcal{O}_a(X, F)$ на a в X над F, защото за произволни $\psi_1, \psi_2 \in F[Y]$ с $\psi_2(f(a)) \neq 0$ образът

$$f^*\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right) = \frac{\psi_1(f_1, \ldots, f_m)}{\psi_2(f_1, \ldots, f_m)}$$

е коректно определена в a рационална функция върху X. Твърдим, че композицията на хомоморфизма на F-алгебри $f^* : \mathcal{O}_{f(a)}(Y,F) \to \mathcal{O}_a(X,F)$ с F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X,F)$ е F-диференциране $Df^* : \mathcal{O}_{f(a)}(Y,F) \to F$. Линейността на Df^* над F следва от F-линейността на f^* и D. За произволни $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{O}_{f(a)}(Y,F)$ е в сила правилото

$$\begin{aligned} Df^*(\varphi_1\varphi_2) = D(f^*(\varphi_1\varphi_2)) = D(f^*(\varphi_1)f^*(\varphi_2)) = \\ = [Df^*(\varphi_1)][f^*(\varphi_2)(a)] + [f^*(\varphi_1)(a)][Df^*(\varphi_2)] = \\ = [Df^*(\varphi_1)]\varphi_2(f(a)) + \varphi_1(f(a))[Df^*(\varphi_2)] \end{aligned}$$

а Leibnitz-Newton за диференциране на произведение и $Df^* \in T_{f(a)}(Y,F)$. С това проверихме, че $(df)_a : T_a(X,F) \to T_{f(a)}(Y,F)$, $(df)_a D = Df^*$ е коректно зададено изображение. За произволни $D_1, D_2 \in T_a(X,F)$, $\psi \in \mathcal{O}_{f(a)}(Y,F)$ и $\lambda \in F$ е изпълнено

$$\begin{aligned} [(df)_a(D_1 + D_2)](\psi) = (D_1 + D_2)f^*(\psi) = \\ = D_1 f^*(\psi) + D_2 f^*(\psi) = [(df)_a D_1](\psi) + [(df)_a D_2](\psi) \end{aligned}$$

и

$$[(df)_a(\lambda D_1)](\psi) = (\lambda D_1)(f^*(\psi)) = \lambda[D_1 f^*(\psi)] = \lambda[((df)_a D_1)(\psi)].$$

Следователно $(df)_a$ е F-линейно изображение.

Ако $f = (f_1, \ldots, f_m) : \overline{k}^n \dashrightarrow \overline{k}^m$ е доминантно рационално изображение на афинни пространства и $a \in \mathcal{D}_f(F)$, то $(df)_a : T_a(\overline{k}^n, F) \to T_{f(a)}(\overline{k}^m, F)$ е F-линейно изображение на пространството $T_a(\overline{k}^n, F)$ с базис $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_a$ над F в пространството $T_{f(a)}(\overline{k}^m, F)$ с базис $\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{f(a)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_{f(a)}$ над F. Матрицата $A \in M_{m\times n}(F)$ на $(df)_a$ спрямо посочените базиси се определя от равенствата

$$(df)_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a = \sum_{s=1}^{m} A_{si} \left(\frac{\partial}{\partial y_s}\right)_{f(a)} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Пресмятайки стойностите на двете страни върху хомогенните линейни полиноми $y_s - f_s(a)$ на $y_1 - f_1(a)$, …, $y_m - f_m(a)$ получаваме

$$\begin{aligned} A_{si} = \left((df)_a \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a\right)(y_s - f_s(a)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (f^*(y_s - f_s(a))) = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a (f_s(x_1, \ldots, x_n) - f_s(a)) = \frac{\partial f_s}{\partial x_i}(a). \end{aligned}$$

Това доказва, че

$$A = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a)$$

е Якобиевата матрица на $f_1, \ldots, f_m$ относно $x_1, \ldots, x_n$ в a, Q.E.D.

Следствие 20.9. *Нека $X \subseteq \overline{k}^n$, $Y \subseteq \overline{k}^m$, $Z \subseteq \overline{k}^l$ са афинни многообразия, чиито идеали са породени от полиноми с коефициенти от k, $f : X \dashrightarrow Y$ и $g : Y \dashrightarrow Z$ са рационални изображения и $a \in \mathcal{D}_f(F)$ е F-рационална точка на областта на регулярност $\mathcal{D}_f$ на f, за която $f(a) \in \mathcal{D}_g$ е от областта на регулярност на g. Тогава диференциалът*

$$d(gf)_a = (dg)_{f(a)}(df)_a$$

на $gf : \mathcal{D}_f \to g(\mathcal{D}_g \cap f(\mathcal{D}_f))$ в a е композиция на диференциала на регулярното изображение $f : \mathcal{D}_f \to f(\mathcal{D}_f)$ в a с диференциала на регулярното изображение $g : \mathcal{D}_g \cap f(\mathcal{D}_f) \to g(\mathcal{D}_g \cap f(\mathcal{D}_f))$ в $f(a)$.

(ii) Диференциалът на тъждественото изображение $\mathrm{Id}_V : V \to V$ *на квазиафинно многообразие* $V \subseteq \overline{k}^n$ *в точка* $a \in V(F)$ *е тъждественото изображение* $(d\mathrm{Id}_V)_a = \mathrm{Id}_{T_a(V,F)}$ *на допирателното пространство на Зариски към* V *в* a *над* F.
(iii) Нека $X \subseteq \overline{k}^n$ *и* $Y \subseteq \overline{k}^m$ *са афинни многообразия, чиито идеали да породени от полиноми с коефициенти от* k, $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \dashrightarrow Y$ *е бирационално изображение с коефициенти от* k *и* $a \in \mathcal{D}_f(F)$, $f(a) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}(F)$. *Тогава диференциалът* $(df)_a : T_a(X, f) \to T_{f(a)}(Y, F)$ *на* f *в* a *е* F*-линеен изоморфизъм.*

Доказателство: (i) За произволно F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X, F) \to F$ в a имаме

$$(d(gf))_a D = D(gf)^* = D(f^* g^*) = (Df^*)g^* = (dg)_{f(a)}(Df^*) = (dg)_{f(a)}((df)_a D),$$

съгласно Твърдение-Определение 20.8 и $(gf)^* = f^* g^*$.
(ii) Вземайки предвид $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_a(X,F)} : \mathcal{O}_a(X, F) \to \mathcal{O}_a(X, F)$ за $\forall a \in X(F)$ получаваме $(d\mathrm{Id}_X)_a D = D\mathrm{Id}_X^* = D$ за всяко F-диференциране $D : \mathcal{O}_a(X, F) \to F$ в a, така че $(d\mathrm{Id}_X)_a = \mathrm{Id}_{T_a(X,F)}$.
(iii) Бирационалните изображения $f : X \dashrightarrow Y$ и $f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ имат композиция $f^{-1} f = \mathrm{Id}_X$ с диференциал

$$\mathrm{Id}_{T_a(X,F)} = (d\mathrm{Id}_X)_a = d(f^{-1} f)_a = (df^{-1})_{f(a)} (df)_a,$$

съгласно (ii) и (i). Оттук, диференциалите $(df)_a : T_a(X, F) \to T_{f(a)}(Y, F)$ и $(df^{-1})_{f(a)} : T_{f(a)}(Y, F) \to T_a(X, F)$ са F-линейни изоморфизми, Q.E.D.
За произволно подмножество $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\} \subset \{1, \ldots, n\}$ с d различни елемента $1 \leq \gamma_1 < \ldots < \gamma_d \leq n$ да разгледаме допълнението

$$\neg\gamma = \delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_{n-d}\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\}, \quad 1 \leq \delta_1 < \ldots < \delta_{n-d} \leq n$$

и пунктирането

$$\Pi_\gamma : \overline{k}^n \longrightarrow \overline{k}^{n-d},$$

$$\Pi_\gamma(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\delta_1}, \ldots, x_{\delta_{n-d}})$$

в γ, което изтрива координатите, номерирани с γ. Съгласно Твърдение-Определние 20.8, матрицата на диференциала $(d\Pi_\gamma)_a : T_a(\overline{k}^n, F) \to T_{\Pi_\gamma(a)}(\overline{k}^{n-d}, F)$ в F-рационална точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in F^n$ е

$$\frac{\partial(x_{\delta_1}, \ldots, x_{\delta_{n-d}})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) = \left(\begin{array}{c} e_{\delta_1} \\ e_{\delta_2} \\ \ldots \\ e_{\delta_{n-d}} \end{array} \right),$$

където $e_j = (0^{j-1}, 1, 0^{n-j})$ е наредената n-торка с единствена ненулева компонента 1 в j-та позиция. Координатният стълб $(v_1, \ldots, v_n)^t \in M_{n\times 1}(F)$ на произволен допирателен вектор $v = \sum\limits_{i=1}^n v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_a \in T_a(\overline{k}^n, F)$ се изобразява в $(d\Pi_\gamma)_a (v_1, \ldots, v_n)^t = (v_{\delta_1}, \ldots, v_{\delta_{n-d}})^t$, така че диференциалът

$$(d\Pi_\gamma)_a : F^n \simeq T_a(\overline{k}^n, F) \longrightarrow T_{\Pi_\gamma(a)}(\overline{k}^{n-d}, F) \simeq F^{n-d}$$

на пунктирането Π_γ на $\overline{k}^n$ в γ е пунктирането на $T_a(\overline{k}^n, F)$ в γ.

3. Гладки и особени точки

ТВЪРДЕНИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20.10. *Всяко афинно многообразие $X \subseteq \overline{k}^n$ с размерност $d = \dim X$ има собствено Зариски затворено подмножество $X_o \subsetneq X$, така че $\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) = d$ за $\forall a \in X \setminus X_o$ и $\dim_{\overline{k}} T_b(X, \overline{k}) > d$ за $\forall b \in X_o$. Точките $a \in X \setminus X_o$ се наричат гладки, а точките $b \in X_o$ са особени. Множеството X_o на особените точки на X бележим с X^{sing}, а множеството на гладките точки означаваме с X^{smooth}.*

Доказателство: Да предположим, че полиномите $f_1, \dots, f_m \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ пораждат идеала $I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \triangleleft \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$ на X. Тогава $T_a(X, \overline{k})$ е пространството от решения на хомогенната линейна система с матрица $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$ и $\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) = n - r$ за ранга $r = \operatorname{rk} \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)$ на Якобиевата матрица на $f_1, \dots, f_m$ относно $x_1, \dots, x_n$ в a. За произволно $1 \leq s \leq \min(m, n)$ и за произволни подмножества $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ разглеждаме минора

$$\Delta(\alpha, \beta) := \det \frac{\partial(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_s})}{\partial(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_s})} \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$$

на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \in M_{m \times n}(\overline{k}[x_1, \dots, x_n])$ от ред s. Нека r е максималното неотрицателно цяло, за което съществува минор от r-ти ред $\Delta(\alpha, \beta) \notin I(X)$ и всички минори на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ от ред $r+1$ ринадлежат на $I(X)$. Означаваме с $\Delta_i = \Delta(\alpha(i), \beta(i))$, $1 \leq i \leq t$ всички минори на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ от ред r извън $I(X)$. Тогава за $\forall a \in X \cap Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ е в сила $\operatorname{rk} \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) < r$, откъдето $\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) > n - r$. Ако $a \in X \setminus Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$, то $\operatorname{rk} \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a) = r$ и $\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) = n - r$. Допускането $X \cap Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t) = X$ води до $X \subseteq Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$, откъдето $\Delta_i \in IZ(\Delta_1, \dots, \Delta_t) \subseteq I(X)$ за $\forall 1 \leq i \leq t$, противно на избора на $\Delta_i \notin I(X)$ за $\forall 1 \leq i \leq t$. Противоречието доказва, че $X \cap Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ е собствено Зариски затворено подмножество на X. Остава да докажем, че $n - r = d$.

За целта използваме, че размерността d е бирационален инвариант. Съгласно Следствие 20.9 (iii), произволно бирационално изображение $f : X \dashrightarrow Y$ индуцира изоморфизъм на $\overline{k}$-линейни пространства $(df)_a : T_a(X, \overline{k}) \to T_{f(a)}(Y, \overline{k})$ във всички точки $a \in \mathcal{D}_f$ от областта на регулярност на f с $f(a) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ от областта на регулярност на f^{-1}. В частност,

$$\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) = \dim_{\overline{k}} T_{f(a)}(Y, \overline{k}$$

за всички точки на непразното Зариски отворено, Зариски гъсто подмножество $\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathcal{D}_{f^{-1}})$. Достатъчно е да докажем съществуването на бирационален модел Y на X със Зариски затворено подмножество $Y_o \subsetneq Y$, така че $\dim_{\overline{k}} T_a(Y, \overline{k}) = d$ за $\forall a \in Y \setminus Y_o$ и $\dim_{\overline{k}} T_b(Y, \overline{k}) > d$ за $\forall b \in Y_o$, за да получим, че $n - r = \dim_{\overline{k}} T_{f(a)}(Y, \overline{k}) = d$ за всяка точка a на непразното, Зариски отворено, Зариски гъсто подмножество

$$W := [X \setminus Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)] \cap (\mathcal{D}_f \cap f^{-1}(\mathcal{D}_{f^{-1}})) \cap f^{-1}(Y \setminus Y_o) \subseteq X.$$

Оттук, за всяка точка $a \in X \setminus Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ е изпълнено $\dim_{\overline{k}} T_a(X, \overline{k}) = n - r = d$, а за всяка точка $b \in X \cap Z(\Delta_1, \dots, \Delta_t)$ имаме $\dim_{\overline{k}} T_b(X, \overline{k}) > d$.

Съгласно Следствие 11.8, за произволно афинно многообразие $X \subseteq \overline{k}^n$ с размерност $d = \dim X$ съществува бирационално изображение $f : X \dashrightarrow \overline{k}^d$ в афинно пространство $Y = \overline{k}^d$ или бирационално изображение $f : X \dashrightarrow Z(g)$ в хиперповърхнина $Z(g) \subset \overline{k}^{d+1}$, определена от неразложим полином $g \in$

$\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$ с $\frac{\partial g}{\partial x_i}\not\equiv 0\in\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$ за някое $1\le i\le d+1$. В Твърдение 20.3 установихме, че във всяка точка $a\in\overline{k}^d$ допирателното пространство на Зариски $T_a(\overline{k}^d,\overline{k})$ е с размерност $\dim_{\overline{k}} T_a(\overline{k}^d,\overline{k})=d$. В частност, всички точки на афинното пространство $\overline{k}^d$ са гладки.

В случая на хиперповърхнина $Y=Z(g)\subseteq\overline{k}^{d+1}$, определена от неразложим полином $g\in\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$ с $\frac{\partial g}{\partial x_i}\not\in 0\in\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$ за някое $1\le i\le d+1$, идеалът $I(Y)=IZ(g)=r(\langle g\rangle)=\langle g\rangle$, поради простотата на идеала $\langle g\rangle\triangleleft\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$. В произволна точка $a\in Y$ допирателното пространство на Зариски е

$$T_a(X,\overline{k})=\left\{v=\sum_{i=1}^{d+1}v_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_a \,\Big|\, v(g)=\sum_{j=1}^{d+1}v_j\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(a)=0\right\}.$$

Ако съществува $1\le j\le d+1$ с $\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)\ne 0$, то $\dim_{\overline{k}} T_a(X,\overline{k})=d$. Ако $b\in Z\left(g,\frac{\partial g}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial x_{d+1}}\right)$, то $\dim_{\overline{k}} T_b(Y,\overline{k})=d+1>d$. Подмножеството $Y_o:=Z\left(g,\frac{\partial g}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial g}{\partial x_{d+1}}\right)$ на $Y=Z(g)$ е Зариски затворено. Ако допуснем, че $Y_o=Y$, то $\frac{\partial g}{\partial x_i}\in I(Y_o)=I(Y)=\langle g\rangle$ и $\frac{\partial g}{\partial x_i}=g.h$ за някое $1\le i\le d+1$ и полином $h\in\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$. От $\frac{\partial g}{\partial x_i}\not\equiv 0$ следва $h\not\equiv 0\in\overline{k}[x_1,\dots,x_{d+1}]$, така че h има неотрицателна степен $\deg_{x_i} h\ge 0$ относно x_i. Сега

$$\deg_{x_i} g>\deg_{x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)=\deg_{x_i}(g)+\deg_{x_i}(h)\ge\deg_{x_i}(g)$$

е противоречие, доказващо $Y_o\subsetneq Y$, Q.E.D.

Вземайки предвид

$$\dim_F T_a(X,F)=n-\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(a)=\dim_{\overline{k}} T_a(X,\overline{k})$$

за произволно поле F с $f_1,\dots,f_m\in F[x_1,\dots,x_n]$ и $a\in F^n$, получаваме следното

Следствие 20.11. *Нека $X\subset\overline{k}^n$ е афинно многоорахие, чийто идеал $I(X)=\langle f_1,\dots,f_m\rangle\triangleleft\overline{k}[x_1,\dots,x_n]$ се поражда от полиноми $f_1,\dots,f_m\in k[x_1,\dots,x_n]$ с коефициенти от k и $a\in X(F)$ е F-рационална точка за някакво поле $k\subseteq F\subseteq\overline{k}$. Тогава за $\forall a\in X^{\text{smooth}}$ е в сила $\dim_F T_a(X,F)=\dim X$, а за $\forall b\in X^{\text{sing}}$ е изпълнено $\dim_F T_b(X,F)>\dim X$.*