Глава 8

Морфизми на алгебрични многообразия

1. Определение и характеризация на морфизмите на алгебрични многообразия

Определение 8.1. *Изображението $\varphi : V \to W$ на квази-афинни или квази-проективни алгебрични многообразия е морфизъм, ако:*
(i) φ е непрекъснато относно топологията на Зариски и
(ii) всяка регулярна функция $f : W_1 \to \overline{k}$ върху Зариски отворено подмножество $W_1 \subseteq W$ с непразен праобраз $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ се издърпва до регулярна функция $\varphi^*(f) = f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W_1) \to \overline{k}$.

Твърдение 8.2 (i) дава основен пример за морфизъм на квази-афинни многообразия. Твърдение 8.2 (ii) дискутира пример за морфизъм на квази-проективни многообразия.

Твърдение 8.2. *(i) Нека $V \subseteq \overline{k}^n$ и $W \subseteq \overline{k}^m$ са квази-афинни многообразия, а $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ са такива полиноми, за които изображението $\varphi = (f_1, \ldots, f_m) : V \to \overline{k}^m$ има образ $\varphi(V) \subseteq W$, съдържащ се в W. Тогава $\varphi : V \to W$ е регулярно изображение на V в W.*
(ii) Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и $W \subseteq \mathbb{P}^m(\overline{k})$ са квази-проективни многообразия, а

$$f_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_0, \ldots, x_n) \in \overline{k}[x_0, \ldots, x_n]$$

са такива хомогенни полиноми от една и съща степен, за които изображението $\varphi = [f_0 : \ldots : f_m] : V \to \mathbb{P}^m(\overline{k})$ има образ $\varphi(V) \subseteq W$, съдържащ се в W. Тогава $\varphi : V \to W$ е регулярно изображение на V в W.

Доказателство: (ii) За проверка на непрекъснатостта на изображението $\varphi = [f_0 : \ldots : f_m] : V \to W$ да разгледаме Зариски затворено подмножество $Z(S) \subseteq W$ за някое крайно множество от хомогенни полиноми $S \subseteq \overline{k}[y_0, \ldots, y_m]_h$. Праобразът

$$\varphi^{-1}Z(S) = \{v \in V \ \mid \ \varphi(v) \in Z(S)\} =$$
$$= \{v \in V \ \mid \ g\varphi(v) = g(f_0, \ldots, f_m)(v) = 0 \quad \text{за} \quad \forall g \in S\} = Z(S \circ f).$$

За произволен хомогенен полином $g \in S \subseteq \overline{k}[y_0, \ldots, y_m]$ на $y_1, \ldots, y_m$, суперпозицията $g \circ f = g(f_0, f_1, \ldots, f_m) \in \overline{k}[x_0, \ldots, x_n]_h$ е хомогенен полином на $x_0, \ldots, x_n$, така че $Z(S \circ f)$ е проективно алгебрично множество. Това доказва непрекъснатостта на f.
Нека $f : W_1 \to \overline{k}$ е регулярна функция върху Зариски отворено подмножество $W_1 \subseteq W$ с $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$. Трябва да проверим, че $\varphi^* f = f\varphi : \varphi^{-1}(W_1) \to \overline{k}$ е регулярна функция върху $\varphi^{-1}(W_1)$. Фиксираме точка $p \in \varphi^{-1}(W_1)$ и афинна Зариски отворена околност $U(p)'$ на p върху $\varphi^{-1}(W_1)$, която се съдържа в стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0 = \{x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\overline{k}) \ \mid \ x_0 \neq 0\},$$

след евентуално преномериране на хомогенните координати върху $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Избираме афинна Зариски отворена околност $W(q)'$ на $q = \varphi(p) = [f_0(p) : \ldots : f_m(p)]$

върху W_1, която се съдържа в стандартното афинно отворено подмножество

$$U_0' = \{y = [y_0 : \dots : y_m] \in \mathbb{P}^m(\overline{k}) \quad | \quad y_0 \neq 0\}$$

върху $\mathbb{P}^m(\overline{k})$, след евентуално преномериране на хомогенните координати върху $\mathbb{P}^m(\overline{k})$. Тогава съществува Зариски отворена околност $W(q)$ на q върху $W(q)'$, така че

$$f|_{W(q)} = \frac{g}{h}$$

за g, h от афинния координатен пръстен $\overline{k}[W(q)] = \overline{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right]/I(W(q))$ на $W(q)$ с $h(r) \neq 0$ за $\forall r \in W(q)$. Повдигаме g и h до полиноми

$$\widetilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right), \widetilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) \in \overline{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right]$$

и представяме

$$f|_{W(q)} = \frac{\widetilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) + I(W(q))}{\widetilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right) + I(W(q))}\Big|_{W(q)} = \frac{\widetilde{g}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right)}{\widetilde{h}\left(\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right)}\Big|_{W(q)}$$

за идеала $I(W(q)) \lhd \overline{k}\left[\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_m}{y_0}\right]$ на $W(q)$. Ако $U(p) := \varphi^{-1}W(q) \cap U(p)'$, то функцията

$$f\varphi|_{U(p)} = \frac{\widetilde{g}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_n\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right)}{\widetilde{h}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right)}\Big|_{U(p)} = \frac{P\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\Big|_{U(p)}$$

се представя като частно на полиноми $P\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), Q\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in \overline{k}\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$ на афинните координати $\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}$ върху U_0. Освен това, $f\varphi|_{U(p)}$ е коректно определено върху $U(p)$, защото $f_0\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \neq 0$ и

$$\widetilde{h}\left(\frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}, \dots, \frac{f_1\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}{f_0\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)}\right) \neq 0 \quad \text{за} \quad \forall \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) \in U(p).$$

Следователно $f\varphi : \varphi^{-1}(W_1) \to \overline{k}$ е регулярна функция и

$$\varphi = [f_0 : \dots, f_m] : V \to W$$

е морфизъм, Q.E.D.

Задача 8.3. *Да се докаже Твърдение 8.2 (i).*

Пример 8.4. *Изображението*

$$\varphi : V_0 = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_9}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}_9},$$

$$\varphi(x, y) = (x + 1)y$$

е морфизъм на афинното многообразие V_0 *върху* $\overline{\mathbb{F}_9}$.

Пример 8.5. *Изображението*

$$\psi : W_0 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}_9}) \quad | \quad y^2 z = x^3 + y^3\},$$

$$\psi([x : y : z]) = [x^2 : xy : z^2]$$

е морфизъм на проективното многообразие W_0 *в* $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}_9})$.

Лема 8.6. *Всяка регулярна функция $f : V \to \overline{k}$ върху квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непрекъсната относно топологията на Зариски.*

Доказателство: Да напомним, че Зариски затворените подмножества S на $\overline{k}$ са $S = \emptyset$, $S = \overline{k}$ или $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$ за някое $m \in \mathbb{N}$. Съгласно $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\overline{k}) = V$ и $f^{-1}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \cup_{i=1}^m f^{-1}(a_i)$, достатъчно е да докажем, че $f^{-1}(a)$ е Зариски затворено подмножество на V за $\forall a \in \overline{k}$.
Първо ще проверим, че $f^{-1}(a)$ е локално затворено във V, т.е. всяка точка $p \in V$ има Зариски отворена околност $U(p)$ върху V, така че $U(p) \cap f^{-1}(a)$ е относително Зариски затворено в $U(p)$. Наистина, съгласно определението за регулярност на $f : V \to \overline{k}$ в $p \in V$ съществува афинна Зариски отворена околоност $U(p)$ на p върху V, така че $f|_{U(p)} = \frac{g}{h}$ за $g, h \in \overline{k}[U(p)]$, $h(p) \neq 0$. Ако полиномите $\widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n), \widetilde{h}(x_1, \ldots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ повдигат $g = \widetilde{g}(x_1, \ldots, x_n) + I(U(p))$, $h = \widetilde{h}(x_1, \ldots, x_n) + I(U(p))$, то сечението

$$U(p) \cap f^{-1}(a) = \left\{ x \in U(p) \ \Big| \ \frac{\widetilde{g}(x)}{\widetilde{h}(x)} = a \right\} = \{x \in U(p) \ | \ \widetilde{g}(x) - a\widetilde{h}(x) = 0\},$$

$$U(p) \cap f^{-1}(a) = U(p) \cap Z(\widetilde{g}(x) - a\widetilde{h})$$

е Зариски затворено подмножество на $U(p)$. Това означава съществуване на Зариски затворено $X(p) \subseteq V$ с $U(p) \cap f^{-1}(a) = U(p) \cap X(p)$.
Покриваме $V = \cup_{p \in V} U(p)$ със Зариски отворени околности $U(p)$ и избираме крайно подпокритие $V = U_1 \cup \ldots U_m$ за някои $U_j = U(p_j)$. Съществуването на такова покритие следва от това, че ако X_α, $\alpha \in A$ са Зариски затворени подмножества на V с празно сечение $\cap_{\alpha \in A} X_\alpha = \emptyset$, то съществува крайно подмножество $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_m}$ на тази система с празно сечение $X_{\alpha_1} \cap \ldots \cap X_{\alpha_m} = \emptyset$. Да допуснем противното, т.е. че $\cap_{\alpha \in A} X_\alpha = \emptyset$, но $\cap_{\alpha \in I} X_\alpha \neq \emptyset$ за всяко крайно подмножество $I \subseteq A$. Тогава съществува $X_{\alpha_1} \neq \emptyset$. Съществува $\alpha_2 \in A$ с $X_{\alpha_1} \not\subseteq X_{\alpha_2}$, защото ако X_{α_1} се съдържа във всички други X_α, $\alpha \in A \setminus \{\alpha_1\}$, то $\cap_{\alpha \in A} X_\alpha = X_{\alpha_1} \neq \emptyset$. Продължавайки по същия начин получаваме безкрайна строго намаляваща редица

$$X_{\alpha_1} \supsetneqq X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} \supsetneqq \ldots \cap_{j=1}^m X_{\alpha_j} \supsetneqq \cap_{j=1}^{m+1} X_{\alpha_j} \supsetneqq \ldots .$$

По-точно, на всяка стъпка съществува $\alpha_{m+1} \in A$, така че $\cap_{j=1}^m X_{\alpha_j} \not\subseteq X_{\alpha_{m+1}}$, защото в противен случай $\cap_{\alpha \in A} = \cap_{j=1}^m X_{\alpha_j} \neq \emptyset$. Съответната безкрайна редица от идеали или хомогенни идеали е строго растяща поради затвореност на $\cap_{j=1}^m X_{\alpha_j}$ за $\forall m \in \mathbb{N}$. Това противоречи на ньотеровостта на $\overline{k}[x_1, \ldots, x_n]$ или, съответно, на $\overline{k}[x_0, \ldots, x_n]$ и доказва, че всяко Зариски отворено покритие има крайно подпокритие.
Покриваме $V = \cup_{i=1}^m U_i$ чрез някакви Зариски отворени $U_i = U(p_i)$ с $U_i \cap f^{-1}(a) = U_i \cap X_i$ за Зариски затворени $X_i = X(p_i)$. Тогава

$$f^{-1}(a) = V \cap f^{-1}(a) = (U_1 \cup \ldots \cup U_m) \cap f^{-1}(a) =$$

$$= (U_1 \cap f^{-1}(a)) \cup \ldots \cup (U_i \cap f^{-1}(a)) = (U_1 \cap X_1) \cup \ldots \cup (U_m \cap X_m).$$

Крайното сечение $U_o := U_1 \cap \ldots \cap U_m$ на непразни Зариски отворени подмножества U_i на неприводимо алгебрично множество V е непразно Зариски отворено подмножество. При това,

$$U_o \cap f^{-1}(a) = U_1 \cap \ldots \cap U_{i-1} \cap (U_i \cap f^{-1}(a)) \cap U_{i+1} \cap \ldots \cap U_m = U_o \cap X_i$$

за всички $1 \leq i \leq m$. Твърдим, че Зариски затворената обвивка $\overline{U_o \cap f^{-1}(a)} = X_i$. За целта разлагаме $X_i = \cup_{\nu=1}^{\mu} X_{i,\nu}$ в неприводими компоннети $X_{i,\nu}$ и забелязваме, че

$$\overline{U_o \cap X_i} = \overline{U_o \cap (\cup_{\nu=1}^{\mu} X_{i,\nu})} = \overline{\cup_{\nu=1}^{\mu} (U_o \cap X_{i,\nu})} = \cup_{\nu=1}^{\mu} X_{i,\nu} = X_i,$$

съгласно Зариски гъстотата на отворените подмножества $U_o \cap X_{i,\nu} \subseteq X_{i,\nu}$ в неприводимите $X_{i,\nu}$. Сега Зариски затворените подмножества $X_i = \overline{U_o \cap f^{-1}(a)} = X_j$ съвпадат за всички $1 \leq i, j \leq m$ и можем да означим тези множества с X. В резултат, $f^{-1}(a) = (U_1 \cap X) \cup \ldots \cup (U_m \cap X) = (U_1 \cup \ldots \cup U_m) \cap X = V \cap X = X$ е затворено подмножество на V, Q.E.D.

Твърдение 8.7. *Изображение $\varphi : V \to W$ на квази-афинно или квази-проективно многообразие V в квази-афинно многообразие $W \subset \overline{k}^m$ е морфизъм тогава и само тогава, когато композициите $y_j \circ \varphi : V \to \overline{k}$ са регулярни функции за всички $1 \leq j \leq m$.*

Доказателство: Координатните функции $y_j : W \to \overline{k}$ са регулярни върху W. Затова, ако $\varphi : V \to W$ е морфизъм, то издърпванията $\varphi^* y_j = y_j \circ \varphi : V \to \overline{k}$ са регулярни функции върху V.

Да предположим, че $\varphi^* y_j = y_j \circ \varphi : V \to \overline{k}$ са регулярни функции върху V за $\forall 1 \leq j \leq m$. За непрекъснатостта на $\varphi : V \to W$ трябва да докажем, че всяко Зариски затворено подмножество $Z = Z(S) \subseteq W$, зададено с множество от полиноми $S \subset \overline{k}[y_1, \ldots, y_m]$ има Зариски затворен праобраз $\varphi^{-1}(Z) \subseteq V$. За целта да отбележим, че регулярните функции $y_j \circ \varphi : V \to \overline{k}$ са непрекъснати, както и суперпозициите $g\varphi : V \to \overline{k}$ с полиноми $g \in S \subset \overline{k}[y_j, \ldots, y_j]$, защото сума и произведение на непрекъснате функции е непрекъсната функция. Следователно

$$\varphi^{-1}(Z) = \{v \in V \ \mid \ g\varphi(v) = 0, \ \ \forall g \in S\} = \cap_{g \in S} (g\varphi)^{-1}(0)$$

е затворено подмножество на V като сечение на на затворени подмножества $(g\varphi)^{-1}(0)$ на V. Това доказва непрекъснатостта на φ.

Нека W_1 е Зариски отворено подмножество на W с $\varphi^{-1}(W_1) \neq \emptyset$ и $g : W_1 \to \overline{k}$ е регулярна функция върху W_1. Тогава за всяка точка $p \in \varphi^{-1}(W_1)$ съществува Зариски отворена околност $U(q)$ на $q = \varphi(p)$ върху W_1,, така че $g|_{U(q)} = \frac{g_1}{g_2}|_{U(q)}$ за $g_1, g_2 \in \overline{k}[U(q)]$ с $g_2(r) \neq 0$ за $\forall r \in U(q)$. Избираме полиноми

$$\widetilde{g_1}(y_1, \ldots, y_m), \widetilde{g_2}(y_1, \ldots, y_m) \in \overline{k}[y_1, \ldots, y_m],$$

които повдигат $g_1 = \widetilde{g_1} + I(U(q))$, $g_2 = \widetilde{g_2} + I(U(q))$ и представяме

$$g|_{U(q)} = \frac{\widetilde{g_1}(y_1, \ldots, y_m)}{\widetilde{g_2}(y_m, \ldots, y_m)}\Big|_{U(q)}.$$

Полагаме $U(p) = \varphi^{-1} U(q)$ и твърдим, че издърпването

$$\varphi^* g = g \circ \varphi|_{U(p)} = \frac{\widetilde{g_1} \circ \varphi}{\widetilde{g_2} \circ \varphi}\Big|_{U(p)} = \frac{\widetilde{g_1}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))}{\widetilde{g_2}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))}\Big|_{U(p)}$$

е регулярна функция върху $U(p)$. По-точно, $y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi$ са регулярни функции върху $U(p)$, така че $\widetilde{g_j}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))$ са регулярни функции върху $U(p)$ като получени от $y_j \circ \varphi$ и константите чрез умножение и събиране. Регулярната функция $\widetilde{g_2}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))$ има стойност $\widetilde{g_2}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi)(x) = \widetilde{g_2}(\varphi(x)) \neq 0$ за всички точки $x \in U(p)$, защото $\varphi(x) \in U(q)$, а $g_2 = \widetilde{g_2} + I(U(q))$ не се анулира върху $U(q)$. Следователно

$$\frac{1 + I(U(p))}{\widetilde{g_2}(y_1 \circ \varphi, \ldots, y_m \circ \varphi) + I(U(p))}$$

е регулярна функция върху $U(p)$, откъдето и $\varphi^* g : U(p) \to \overline{k}$ е регулярна функция. С това установихме, че $\varphi : V \to W$ е морфизъм, ако $y_j \circ \varphi : V \to \overline{k}$ са регулярни функции за $\forall 1 \leq j \leq m$, Q.E.D.

Забележка 8.8. *От Лема 8.6 и Твърдение 8.7 следва, че всяка регулярна функция $f : W \to \overline{k}$ е морфизъм.*

2. Съответствие между морфизмите в афинно многообразие и хомоморфизмите на неговия афинен координатен пръстен

Теорема 11. *Морфизмите $\varphi : V \to W$ на квази-афинно или квази-проективно многоборазие V в афинно многообразие $W \subseteq \overline{k}^m$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите на $\overline{k}$-алгебри $\varphi^* : \overline{k}[W] \to \mathcal{O}_V(V)$.*

Доказателство: Произволен морфизъм $\varphi : V \to W$ индуцира изображение

$$\varphi^* : \overline{k}[W] \longrightarrow \mathcal{O}_V(V),$$

$$\varphi^*(f) = f \circ \varphi,$$

защото афинният координатен пръстен $\overline{k}[W] \subseteq \mathcal{O}_W(W)$ се състои от регулярни функции върху W и издърпването на регулярна функция върху W чрез морфизъм $\varphi : V \to W$ е регулярна функция върху V. Изображението φ^* е хомоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри, защото

$$\varphi^*(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) \circ \varphi = f_1 \circ \varphi + f_2 \circ \varphi = \varphi^*(f_1) + \varphi^*(f_2),$$

$$\varphi^*(f_1 f_2) = (f_1 f_2) \circ \varphi = (f_1 \circ \varphi)(f_2 \circ \varphi) = \varphi^*(f_1)\varphi^*(f_2) \quad \text{и}$$

$$\varphi^*(cf) = (cf) \circ \varphi = c(f \circ \varphi) = c\varphi^*(f) \quad \text{за} \quad \forall f_1, f_2 \in \overline{k}[W], \ \ \forall c \in \overline{k}.$$

Обратно, нека $\alpha : \overline{k}[W] = \mathcal{O}_W(W) \to \mathcal{O}_V(V)$ е хомоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри. Тогава за $\forall 1 \leq j \leq m$ регулярните функции $y_j + I(W)$ върху W се изобразяват в регулярни функции $\alpha(y_j + I(W)) : V \to \overline{k}$ върху V. Изображението

$$\varphi_\alpha = (\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) : V \longrightarrow \overline{k}^m$$

взема стойности в W, защото за всеки полином $g(y_1, \dots, y_m)$ от идеала $I(W)$ на $W \subseteq \overline{k}^m$ и произволна точка $v \in V$ е в сила

$$(g \circ \varphi_\alpha)(v) = g(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W)))(v) = \alpha(g(y_1, \dots, y_m) + I(W))(v),$$

доколкото α е хомоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри. Но $g(y_1, \dots, y_m) + I(W) = I(W) \in \overline{k}[W]$ е нулевият елемент на $\overline{k}[W]$, така че $\alpha(g(y_1, \dots, y_m) + I(W)) = \alpha(I(W)) = I(V)$ и $(g \circ \varphi_\alpha)(v) = I(V)(v) = 0$. Това доказва, че $\varphi_\alpha : V \to W$ е изображение на V в W.
Съгласно Твърдение 8.7, достатъчно е да забележим, че композициите $y_j \circ \varphi_\alpha = \alpha(y_j + I(W)) \in \mathcal{O}_V(V)$ са регулярни функции върху V, за да твърдим, че $\varphi_\alpha : V \to W$ е морфизъм на V в W.
Остава да проверим, че φ_α индуцира $\varphi_\alpha^* = \alpha : \overline{k}[W] \to \mathcal{O}_V(V)$. Наистина, за произволен елемент $h = \widetilde{h}(y_1, \dots, y_m) + I(W) = \widetilde{h}(y_1 + I(W), \dots, y_m + I(W)) \in \overline{k}[W]$, който се повдига до полином $\widetilde{h}(y_1, \dots, y_m) \in \overline{k}[y_1, \dots, y_m]$ е изпълнено

$$\varphi_\alpha^* h = h \circ \varphi_\alpha = h(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) =$$

$$= \widetilde{h}(\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W))) = \alpha \widetilde{h}(y_1 + I(W), \dots, y_m + I(W)),$$

защото $\alpha : \overline{k}[W] \to \mathcal{O}_V(V)$ е хомоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри, Q.E.D.

Следствие 8.9. *Всеки морфизъм $\varphi : V \to W$ на афинно многообразие $V \subseteq \overline{k}^n$ в афинно многообразие $W \subseteq \overline{k}^m$ се задава с наредена m-торка $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$ от полиноми $f_i(x_1, \dots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$.*

Доказателство: Съгласно Теорема 11 имаме взаимно еднозначно съответствие

$$\mathrm{Mor}(V,W) \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{k}-alg}(\overline{k}[W], \mathcal{O}_V(V))$$

между морфизмите $\varphi : V \to W$ и хомоморфизмите $\varphi^* : \overline{k}[W] \to \mathcal{O}_V(V)$. Още повече, всеки морфизъм $\varphi : V \to W$ е от вида

$$\varphi = \varphi_\alpha = (\alpha(y_1 + I(W)), \dots, \alpha(y_m + I(W)))$$

за някакъв хомоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри $\alpha : \overline{k}[W] \to \mathcal{O}_V(V)$. Лема 7.14 (ii) дава изоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри $\mathcal{O}_V(V) \to \overline{k}[V]$. В резултат, $\alpha(y_j + I(W)) \in \overline{k}[V]$ могат да се разглеждат като полиноми

$$f_j(x_1 + I(V), \dots, x_n + I(V)) \in \overline{k}[x_1 + I(V), \dots, x_n + I(V)] \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq m,$$

така че всяка точка $v = (v_1, \dots, v_n) \in V \subseteq \overline{k}^n$ има образ

$$\varphi(v) = (f_1(x_1, \dots, x_n) + I(V), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) + I(V))(v) =$$

$$= (f_1(v_1, \dots, v_n), \dots, f_m(v_1, \dots, v_n)) \in W$$

и действието на φ се задава с полиномите $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$, Q.E.D.

Задача 8.10. *Нека $I \subset J$ са собствени идеали в $\overline{k}[x_1, \dots, x_n]$, а*

$$\alpha : \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/I \longrightarrow \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/J$$

е естественият епиморфизъм с ядро $J/I \triangleleft \overline{k}[x_1, \dots, x_n]/I$. Да се докаже, че α индуцира тъждественото влагане $\varphi_\alpha : Z(J) \hookrightarrow Z(I)$.

Определение 8.11. *Квази-афинните или квази-проективните многообразия V и W са изоморфни, ако съществуват морфизми $\varphi : V \to W$ и $\psi : W \to V$, така че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_V$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_W$.*

Лема 8.12. *Афинните многообразия $V \subseteq \overline{k}^n$ и $W \subseteq \overline{k}^m$ са изоморфни тогава и само тогава, когато афинните им координатни пръстени $\overline{k}[W] \simeq \overline{k}[V]$ са изоморфни като $\overline{k}$-алгебри.*

Доказателство: За произволни морфизми $\varphi : V \to W$ и $\psi : W \to U$ в квази-афинни многообразия W и U е в сила $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^*$. По-точно, за всяко $f \in \overline{k}[U]$ имаме $(\psi\varphi)^*(f) = f \circ \psi \circ \varphi = \varphi^*(f \circ \psi) = \varphi^*(\psi^*(f))$.
Нека $\varphi : V \to W$ и $\psi : W \to V$ са морфизми на квази-афинни многообразия. В такъв случай, $(\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[V]}$ тогава и сама тогава, когато $\psi\varphi = \mathrm{Id}_V$. По определение $\mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[V]}$, защото $\mathrm{Id}_V \circ f = f$ за $\forall f \in \overline{k}[V]$. Това доказва, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_V$ е достатъчно условие за $(\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[V]}$. Обратно, ако $\mathrm{Id}_{\overline{k}[V]} = (\psi\varphi)^*$, то морфизмът $\theta : V \to V$ с $\theta^* = (\psi\varphi)^*$ от Теорема 11 се задава с наредена n-торка регулярни функции $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, където $\theta_i = \theta^*(x_i) = x_i$. Следователно $\theta = \mathrm{Id}_V$. Вземайки предвид взаимната еднозначност на съответствието между морфизми и хомоморфизми на афинния координатен пръстен, от $\theta^* = (\psi\varphi)^*$ получаваме $\psi\varphi = \theta = \mathrm{Id}_V$.
Ако $\varphi : V \to W$ и $\psi : W \to V$ са морфизми с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_V$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_W$, то $\varphi^*\psi^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[V]}$ и $\psi^*\varphi^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[W]}$. Следователно $\varphi^* : \overline{k}[W] \to \overline{k}[V]$ и $\psi^* : \overline{k}[V] \to \overline{k}[W]$ са изоморфизми на $\overline{k}$-алгебри.
Обратно, нека $\alpha : \overline{k}[W] \to \overline{k}[V]$ е изоморфизъм на $\overline{k}$-алгебри. Разглеждаме морфизма $\varphi_\alpha : V \to W$ с $\varphi^* = \alpha$ и морфизма $\psi_\alpha : W \to V$ с $\psi_\alpha^* = \alpha^{-1}$. Тогава $(\psi_\alpha\varphi_\alpha)^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[V]}$ и $(\varphi_\alpha\psi_\alpha)^* = \mathrm{Id}_{\overline{k}[W]}$ са достатъчни, за да получим, че $\psi_\alpha\varphi_\alpha = \mathrm{Id}_V$ и $\varphi_\alpha\psi_\alpha = \mathrm{Id}_W$. С други думи, φ_α и ψ_α са изоморфизми на афинни многообразия, Q.E.D.

Задача 8.13. *За произволен неразложим над* $\overline{k}$ *полином* $f(x_1, x_2) \in \overline{k}[x_1, x_2]$ *и произволен полином* $g(x_1, x_2) \in \overline{k}[x_1, x_2]$ *да се докаже, че* $V = Z(f(x_1, x_2)) \subset \overline{k}^2$ *и* $W = Z(y_3 - g(y_1, y_2), f(y_1, y_2)) \subset \overline{k}^3$ *са изоморфни помежду си афинни многообразия.*

Задача 8.14. *Дадена е проективната равнинна квадрика*

$$X = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}_3}) \quad | \quad x_0^2 + x_1^2 = x_2^2\}$$

и изображението $\varphi : X \cap U_1 \to \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}_3})$, $\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1]$ *върху сечението* $X \cap U_1$ *на* X *със стандартното афинно отворено подмножество* $U_1 = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\overline{\mathbb{F}_3}) \quad | \quad x_1 \neq 0\}$. *Да се докаже, че* φ *се продължава до морфизъм* $\varphi : X \to \mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{F}_3})$.

Упътване: Изображението $\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1]$ е коректно определено върху всички точки на X освен $[x_0 : 0 : \pm x_0] = [1 : 0 : \pm 1]$. Вземайки предвид

$$-x_1^2 = x_0^2 - x_2^2 = (x_0 - x_2)(x_0 + x_2)$$

върху X, получаваме

$$[x_0+x_2 : x_1] = [(x_0+x_2)(x_0-x_2) : x_1(x_0-x_2)] = [-x_1^2 : x_1(x_0-x_2)] = [x_1 : x_2-x_0].$$

3. Морфизми, еквивариантни относно абсолютната група на Galois

Да напомним, че ако афинно или проективно многообразие V/k е определено над съвършено поле k, то абсолютната група на Galois $Gal(\overline{k}/k)$ действа върху V.

Определение 8.15. *Морфизмът* $\varphi : V_1 \to V_2$ *на квази-афинни или квази-проективни многообразия* V_i/k, *определени над съвършено поле* k *се нарича* k*-морфизъм, ако е* $Gal(\overline{k}/k)$*-еквивариантен, т.е. всеки елемент* $\sigma \in Gal(\overline{k}/k)$ *изпълнява комутативна диаграма*

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ V_1 & \xrightarrow{\varphi} & V_2 \end{array} .$$

Произволно изображение

$$\varphi = (f_1, \ldots, f_m) : V_1 \longrightarrow V_2,$$

на квази-афинни многообразия, зададено с полиноми $f_1(x_1, \ldots, x_n) \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е k-морфизъм съгласно

$$\sigma\varphi(a) = \sigma(f_1(a), \ldots, f_m(a)) = (f_1(\sigma(a)), \ldots, f_m(\sigma(a))) = \varphi\sigma(a)$$

за $\forall \sigma \in Gal(\overline{k}/k)$, $\forall a \in V_1$. Аналогично, произволно изображение

$$\varphi = [f_0 : \ldots : f_m] : V_1 \longrightarrow V_2,$$

на проективни многообразия $V_1 \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и $V_2 \subseteq \mathbb{P}^m(\overline{k})$, зададено с хомогенни полиноми $f_0(x_0, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ от една и съща степен е k-морфизъм съгласно

$$\sigma\varphi(a) = \sigma[f_0(a) : \ldots : f_m(a)] = [\sigma(f_0(a)) : \ldots : \sigma(f_m(a))] =$$

$$= [f_0(\sigma(a)) : \ldots : f_m(\sigma(a))] = \varphi\sigma(a) \quad \text{за} \quad \forall \sigma \in Gal(\overline{k}/k), \quad \forall a \in V_1.$$

Твърдение 8.16. *Нека $V/\mathbb{F}_{q^m}$ е афинно или проективно многообразие, чийто идеал $I(V) \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_1, \ldots, x_n]$, съответно, хомогенен идеал $I_h(V) \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$ е определен над $\mathbb{F}_{q^m}$, а*

$$\Phi_q(I(V)) =$$

$$= \left\{ \Phi_q(f) = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_i^q x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \;\middle|\; f = \sum_{i=(i_1,\ldots,i_n)} c_i x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \in I(V) \right\},$$

съответно

$$\Phi_q(I_h(V)) =$$

$$= \left\{ \Phi_q(f) = \sum_{i=(i_0,\ldots,i_n)} c_i^q x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n} \;\middle|\; f = \sum_{i=(i_0,\ldots,i_n)} c_i x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n} \in I_h(V)^{(d)} \right\}$$

е образът на $I(V)$, съответно, $I_h(V)$) под действие на автоморфизма на Frobenius $\Phi_q \in Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$. Тогава $Z(\Phi_q(I(V))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \overline{\mathbb{F}_q}^n$ е афинно, съответно, $Z(\Phi_q(I_h(V))_h)/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е проективно многообразие, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$, а

$$\Phi_q : \overline{\mathbb{F}_q}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{F}_q}^n,$$

$$\Phi_q(a_1, \ldots, a_n) = (a_1^q, \ldots, a_n^q)$$

съответно,

$$\Phi_q : \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}),$$

$$\Phi_q([a_0 : \ldots : a_n]) = [a_0^q : \ldots : a_n^q]$$

индуцира хомеоморфизъм и $\mathbb{F}_{q^m}$-морфизъм

$$\Phi_q : V \longrightarrow Z(\Phi_q(I(V)))$$

съответно,

$$\Phi_q : V \longrightarrow Z(\Phi_q(I_h(V))).$$

Доказателство: Ще разгледаме случая на проективно многообразие $V/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$. По определение, хомогенният идеал $I_h(V) \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$ се поражда от хомогенни полиноми $f_i(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}_{q^m}[x_0, \ldots, x_n]$, $1 \leq i \leq m$. Следователно образът

$$\Phi_q(I_h(V)) = \Phi_q\langle f_1(x_0, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_0, \ldots, x_n)\rangle = \langle \Phi_q(f_1), \ldots, \Phi_q(f_m)\rangle$$

се поражда от хомогенните полиноми $\Phi_q(f_i) \in \mathbb{F}_{q^m}[x_0, \ldots, x_n]$, защото Φ_q се ограничава до автоморфизъм $\Phi_q : \mathbb{F}_{q^m} \to \mathbb{F}_{q^m}$. Следователно $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е проективно алгебрично множество, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$. Хомогенният идеал $\Phi_q(I_h(V)) \triangleleft \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$ е прост. По-точно, наличието на автоморфизъм $\Phi_q : \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n] \to \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$ позволява да представим произволни два хомогенни полинома от $\overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$ във вида $\Phi_q(f)$, $\Phi_q(g)$ за еднозначно определени $f, g \in \overline{\mathbb{F}_q}[x_0, \ldots, x_n]$. Ако $\Phi_q(f)\Phi_q(g) = \Phi_q(fg) \in \Phi_q(I_h(V))$, то $fg \in I_h(V)$. Съгласно простотата на хомогенния идеал $I_h(V)$ на проективното многообразие V, оттук следва $f \in I_h(V)$ или $g \in I_h(V)$. В резултат, $\Phi_q(f) \in \Phi_q(I_h(V))$ или $\Phi_q(g) \in \Phi_q(I_h(V))$, което доказва простотата на идеала $\Phi_q(I_h(V))$. С това установихме, че $Z_h(\Phi_q(I_h(V)))/\mathbb{F}_{q^m} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е проективно многообразие, определено над $\mathbb{F}_{q^m}$.

Изображението $\Phi_q : V \to \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ взема стойности в $Z(\Phi_q(I_h(V)_h))$, защото за произволна точка $a \in V$ и произволен хомогенен полином $f \in I_h(V)_h$ е в сила

$$\Phi_q(f)(\Phi_q(a)) = \Phi_q(f(a)) = \Phi_q(0) = 0.$$

Ако $\Phi_q(a) = [a_0^q : \ldots : a_n^q] = [b_0^q : \ldots : b_n^q] = \Phi_q(b)$ за $a, b \in V$, то $a = b$. По-точно, ако l е минималното естествено число, за което $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{F}_{q^l}$, то $\Phi_q^{-1}|_{\mathbb{F}_{q^l}} = \Phi_{q^{l-1}}$. Затова от $\Phi_q(a) = \Phi_q(b)$ получаваме

$$a = \Phi_{q^l}(a) = \Phi_{q^{l-1}}\Phi_q(a) = \Phi_{q^{l-1}}\Phi_q(b) = \Phi_{q^l}(b) = b.$$

Всяка точка $a \in Z(\Phi_q(I_h(V)_h))$ е от образа на $\Phi_q : V \to Z(\Phi_q(I_h(V)_h))$. Преди всичко, $\Phi_q : \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) \to \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q})$ е взаимно еднозначно. Нека $b = \Phi_q(a)$. Трябва да докажем, че $b \in X$. За целта избираме хомогенен полином $f \in I_h(X)_h$ и разширение $\mathbb{F}_{q^s}$ на $\mathbb{F}_q$, което съдържа всички коефициенти на f и всички хомогенни координати на a. Тогава $b = \Phi_q^{-1}(a) = \Phi_{q^{s-1}}(a)$, $f = \Phi_{q^s}(f)$, откъдето $f(b) = \Phi_{q^s}(f)(\Phi_{q^{s-1}}(a)) = \Phi_{q^{s-1}}(\Phi_q(f)(a)) = \Phi_{q^{s-1}}(0) = 0$, съгласно $\Phi_q(f)(a) = 0$ за $a \in Z(\Phi_q(I_h(X)_h))$. С това доказахме взаимната еднозначност на изображението $\Phi_q : V \to Z_h(\Phi_q(I_h(V)))$.
Произволно Зариски затворено подмножество $Z(S) \subseteq V = Z(I_h(V)_h)$ се изобразява в Зариски затворено подмножество $\Phi_q Z(S) = Z(\Phi_q I_h(Z(S))_h)$ на $\Phi_q(V) = Z(\Phi_q(I_h(V)_h))$, съгласно доказаното $\Phi_q(V) = Z\Phi_q(I_h(V)_h)$. Това установява непрекъснатостта на Φ_q^{-1}. Аналогично, ако $Z(S)$ е Зариски затворено подмножество на $\Phi_q(V)$, то $\Phi_q^{-1}Z(S)$ е Зариски затворено подмножество на V. По-точно, $v \in \Phi_q^{-1}Z(S)$ точно когато $f\Phi_q(v) = 0$ за всеки хомогенен полином $f \in I_h(Z(S))_h$. Понеже $f\Phi_q(v) = f(v_0^q, \ldots, v_n^q)$ е хомогенен полином на $v_0, \ldots, v_n$, $\Phi_q^{-1}Z_h(S)$ е проективно подмногообразие на V и Φ_q е непрекъснато. С това проверихме, че Φ_q е хомеоморфизъм.
Съгласно Твърдение 8.2 (ii), изображението

$$\Phi_q : \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}) \longrightarrow \mathbb{P}^n(\overline{\mathbb{F}_q}),$$

$$\Phi_q[x_0 : \ldots : x_n] = [x_0^q : \ldots : x_n^q]$$

е морфизъм, защото се задава с хомогенни полиноми от една и съща степен q. Тези полиноми са с коефициенти от простото подполе на $\overline{\mathbb{F}_q}$, така че Φ_q е $\mathbb{F}_{q^m}$-морфизъм, Q.E.D.

Задача 8.17. *Да се докаже Твърдение 8.16 за афинно многообразие $V \subseteq \overline{\mathbb{F}_q}$, чийто идеал е определен над $\mathbb{F}_{q^m}$.*

Задача 8.18. *Нека $\mathbb{F}_9 = \{a + b\alpha \quad | \quad a, b \in \mathbb{F}_3, \quad \alpha^2 = \alpha + 1\}$ е полето с 9 елемента,*

$$V = \{(x, y) \in \overline{\mathbb{F}_3} \quad | \quad y^2 - \alpha xy + \alpha = 0\}$$

а $\Phi_3 : \overline{\mathbb{F}_3} \to \overline{\mathbb{F}_3}$, $\Phi_3(x) = x^3$ е автоморфизмът на Frobenius.
(i) Да се докаже, че V е афинно многообразие, т.е. полиномът $y^2 - \alpha xy + \alpha$ е неразложим над $\overline{\mathbb{F}_3}$.
(ii) Да се намери многоборазието $\Phi_3(V)$.
(iii) Да се докаже, че $V \cap \Phi_3(V) = \emptyset$.

Следствие 8.19. *Нека $V/\mathbb{F}_q$ е афинно или проективно многообразие, чийто идеал $I(X)$, съответно, хомогенен идеал $I_h(X)$ е определен над $\mathbb{F}_q$. Тогава $\Phi_q(V) = V$.*

Доказателство: От $\Phi_q \in Gal(\overline{\mathbb{F}_q}/\mathbb{F}_q)$ следва, че $\Phi_q(V) \subseteq V$. За обратното включване $V \subseteq \Phi_q(V)$ да изберем точка $a \in V$. Ако $\mathbb{F}_{q^m}$ е дефиниционното поле на a, то $b = \Phi_{q^{m-1}}(a) \in V$ е такава точка, за която $\Phi_q(b) = \Phi_{q^m}(a) = a$. Това доказва $V \subseteq \Phi_q(V)$ и $\Phi_q(V) = V$, Q.E.D.

4. Главните Зариски отворени подмножества са изоморфни на афинни алгебрични множества

Сега ще докажем, че произволно квази-афинно или квази-проективно многообразие V се покрива със Зариски отворени подмножества, които са изоморфни на афинни алгебрични множества.

Лема 8.20. *Нека* $Z(f) = \{x \in \overline{k}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ *е афинна хиперповърхнина. Тогава допълнението*

$$\overline{k}^n \setminus Z(f) \simeq Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1)$$

е изоморфно на афинно алгебрично множество $Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1) \subset \overline{k}^{n+1}$.

Доказателство: Проекцията

$$\Pi : Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1) \longrightarrow \overline{k}^n,$$
$$\Pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

върху първите n компоненти изобразява разглежданата хиперповърхнина $Z(x_{n+1} F(x_1, \dots, x_n) - 1)$ в допълнението $\overline{k}^n \setminus Z(f)$ на $Z(f)$. Изображението Π е взаимно еднозначно, защото за произволна точка $a = (a_1, \dots, a_n) \in \overline{k}^n \setminus Z(f)$ съществува единствена точка

$$a' = \left(a_1, \dots, a_n, \frac{1}{f(a_1, \dots, a_n)} \right) \in Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1)$$

с $\Pi(a') = a$. Изображението Π е регулярно, защото за $\forall 1 \leq i \leq n$ композициите $x_i \circ \Pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x_i$ са регулярни функции върху $Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1)$. Аналогично, Π^{-1} е регулярно, защото $x_i \circ \Pi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = x_i$ за $1 \leq i \leq n$ и $x_{n+1} \circ \Pi^{-1}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{f(x_1, \dots, x_n)}$ са регулярни функции върху $\overline{k}^n \setminus Z(f)$. Това доказва, че $\Pi : Z(x_{n+1} f(x_1, \dots, x_n) - 1) \longrightarrow \overline{k}^n \setminus Z(f)$ е изоморфизъм на квази-афинни алгебрични множества, Q.E.D.

Твърдение 8.21. *Всяко квази-афинно или квази-проективно алгебрично множество V се покрива от квази-афинни алгебрични множества, изоморфни на афинни алгебрични множества.*

Доказателство: След евентуално пресичане всяка неприводима компонента на V с афинно Зариски отворено подмножество можем да считаме, че V е квази-афинно алгебрично множество. Тогава $V = V_0 \cap W \subseteq W \subseteq \overline{k}^n$ за афинно алгебрично множество $V_0 = Z(S) \subseteq \overline{k}^n$ и Зариски отворено подмножество $W \subseteq \overline{k}^n$. Допълнението $V_0 \setminus W \subseteq \overline{k}^n$ е Зариски затворено множество, така че $V_0 \setminus W = Z(f_1, \dots, f_m) = \cap_{j=1}^m Z(f_j)$ за някакви полиноми $f(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n) \in \overline{k}[x_1, \dots, x_n]$. В резултат,

$$V = V_0 \cap W = V_0 \setminus (V_0 \setminus W) = \cup_{i=1}^m (V_0 \setminus Z(f_i)).$$

Следователно V се покрива от квази-афинни алгебрични множества $V_0 \setminus Z(f_i) = V_0 \cap (\overline{k}^n \setminus Z(f_i))$, които са изоморфни на афинни алгебрични множества

$$V_0 \cap Z(x_{n+1} - f_i(x_1, \dots, x_n) - 1) \subset \overline{k}^{n+1},$$

съгласно Лема 8.20, Q.E.D.