Глава 9

Рационални изображения на алгебрични многообразия

1. Доминантни рационални изображения и влагания на функционалните полета

Нека V и W са квази-афинни или квази-проективни многообразия. Разглеждаме двойките (U, φ_U), където $U \subseteq V$ е непразно Зариски отворено подмножество, а $\varphi_U : U \to W$ е морфизъм. Определяме релация $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$, ако съществува непразно Зариски отворено $U \subseteq U_1 \cap U_2$ с $\varphi_{U_1}|_U = \varphi_{U_2}|_U$.
Съотношението $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$ за $\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_{U_2}|_{U_1 \cap U_2}$ е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност $\varphi = \overline{(U, \varphi_U)}$ се наричат рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$. Рационалните изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ не са обезателно определени във всяка точка на V.

Определение 9.1. *Обединението $\mathcal{D} = \cup_{(U,\varphi_U) \in \varphi} U$ се нарича област на регулярност на φ.*

Областта на регулярност $\mathcal{D}$ на рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е Зариски отворено подмножество на V. Ограничението $\varphi : \mathcal{D} \to W$ е морфизъм.

Определение 9.2. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно, ако образът $\varphi(\mathcal{D})$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на φ е навсякъде гъст в W.*

Лема 9.3. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно тогава и само тогава, когато за произволен представител (U, φ_U) на класа на еквивалентност $\overline{(U, \varphi_U)} = \varphi$ образът $\varphi_U(U)$ на U е Зариски гъст в W.*

Доказателство: По определение, U се съдържа в областта на регулярност $\mathcal{D} = \cup_{(U,\varphi_U) \in \varphi} U$ на φ, така че от $\overline{\varphi_U(U)} = W$ следва $\overline{\varphi(\mathcal{D})} = W$.
Нека $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно рационално изображение с област на регулярност $\mathcal{D}$, а (U, φ_U) е представител на φ. Да допуснем, че $\varphi_U(U)$ не е навсякъде гъсто в W. Тогава съществува непразно Зариски отворено подмножество $W_0 \subseteq W$ с празно сечение $W_0 \cap \varphi_U(U) = \emptyset$. С други думи, $\varphi_U(U) \subseteq W \setminus W_0 \subsetneq W$ се съдържа в собственото Зариски затворено подмножество $W \setminus W_0$ на W. Сега пра-образът $U = \varphi^{-1}\varphi_U(U) \subseteq \varphi^{-1}(W \setminus W_0)$ се съдържа в Зариски затвореното подмножество $\varphi^{-1}(W \setminus W_0) \subseteq \mathcal{D}$, съгласно непрекъснатостта на морфизма $\varphi : \mathcal{D} \to W$. Да забележим, че $\varphi^{-1}(W \setminus W_0) \subsetneq \mathcal{D}$ се съдържа строго в областта на регулярност $\mathcal{D}$, защото в противен случай $\varphi(\mathcal{D}) \subseteq W \setminus W_0$ и Зариски затворената обвивка $W = \overline{\varphi(\mathcal{D})} = W \setminus W_0 \subsetneq W$, противно на предположението за доминаннтност на φ. Това доказва, че ако $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно рационално изображение, то всеки представител (U, φ_U) на φ има Зариски гъст образ $\varphi_U(U)$ в W, Q.E.D.

Твърдение 9.4. *Ако k е алгебрично затворено поле, то доминантните рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ на многообразия са във взаимно еднозначно съответствие с влаганията $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$ на съответните функционални полета като k-алгебри.*

Доказателство: Нека (U, φ_U) е представител на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$. Твърдим, че всеки елемент $\overline{(W_0, f)} \in k(W)$ се издърпва от морфизма $\varphi_U : U \to W$ до елемент $\overline{\left(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f\right)} \in \overline{k(V)}$. Преди всичко, Зариски отвореното подмножество $\varphi_U^{-1}(W_0) \subseteq V$ е непразно. При допускане на противното, от $\varphi_U^{-1}(W_0) = \emptyset$ следва, че $\varphi_U(U) \cap W_0 = \emptyset$, което противоречи на гъстотата на $\varphi_U(U)$ в W. Композицията $\varphi_U^* f = f\varphi_U$ е регулярна функция като издърпване на регулярната функция f чрез морфизма φ_U. И така, произволен представител (U, φ_U) на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ задава съответствие

$$\varphi_U^* : k(W) \longrightarrow k(V),$$
$$\varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}.$$

Ако (U_1, φ_{U_1}) е друг представител на φ, то $\left(\varphi_{U_1}^{-1}(W_0), \varphi_{U_1}^* f\right) \sim \left(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f\right)$, защото от $f|_{W_0 \cap \varphi_U \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f|_{W_0 \cap \varphi_{U_1} \varphi_U^{-1}(W_0)}$ следва

$$f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f\varphi_{U_1}|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)}.$$

Ако $(W_0, f) \sim (W_1, g)$, то $f|_{W_0 \cap W_1} = g|_{W_0 \cap W_1}$ и

$$f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_U^{-1}(W_1)} = g\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0) \cap \varphi_U^{-1}(W_1)}.$$

С това получаваме, че изображението

$$\varphi^* : k(W) \longrightarrow k(V),$$
$$\varphi^* \overline{(W_0, f)} = \varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}$$

е коректно определено и не зависи от избора на представители $(U, \varphi_U) \in \varphi$ и $(W_0, f) \in \overline{(W_0, f)}$. Още повече, φ^* е хомоморфизъм на k-алгебри, защото

$$\varphi^*(\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)}) = \varphi^*(\overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}) =$$
$$= \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2), \varphi_U^*(f_1 + f_2))} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)} + \overline{(\varphi_U^{-1}(W_2), \varphi_U^* f_2)} =$$
$$= \overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)} + \overline{(\varphi^{-1}(W_2), \varphi^* f_2)},$$
$$\varphi^*(\overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)}) = \varphi^*(\overline{(W_1 \cap W_2, f_1.f_2)}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2), \varphi^*(f_1.f_2))} =$$
$$= \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)}.\overline{(\varphi_U^{-1}(W_2), \varphi_U^* f_2)} = \overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)}.\overline{(\varphi^{-1}(W_2), \varphi^* f_2)} \quad \text{и}$$
$$\varphi^*(c\overline{(W_1, f_1)}) = \varphi^*(\overline{(W_1, cf_1)}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^*(cf_1))} =$$
$$c\overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)} = c\overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)}$$

за $\forall \overline{(W_1, f_1)}, \overline{(W_2, f_2)} \in k(W)$, $\forall c \in k$.

За да докажем, че $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е влагане, избираме $\overline{(W_o, f)} \in k(W)$ с $\varphi^* \overline{(W_o, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_o), f\varphi_U)} = \overline{(V_o, 0)}$ за някакво Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq V_o \subseteq V$. Тогава $\varphi_U^{-1}(W_o) \cap V_o \neq \emptyset$ е непразно Зариски отворено подмножество на V, като сечение на Зариски отворените $\emptyset \neq \varphi_U^{-1}(W_o) \subseteq V_o$ и $\emptyset \neq V_o \subseteq V$. От $f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_o) \cap V_o} = 0$ следва $f|_{W_o \cap \varphi_U(V_o)} = 0$ с $W_o \cap \varphi_U(V_o) \neq \emptyset$. Произволна точка $p \in W_o \cap \varphi_U(V_o)$ има Зариски отворена околност $p \in W_p \subseteq W_o$, така че $f|_{W_p} = \frac{g}{h}|_{W_p}$ за полиноми g, h. Сега $V_1 := \varphi_U^{-1}(W_p) \cap V_0$ е непразно Зариски отворено подмножество на V с $0 = f\varphi_U|_{V_1} = \frac{g\varphi_U}{h\varphi_U}|_{V_1}$, така че $g|_{\varphi_U(V_1)} = 0$ и $\varphi_U(V_1) \subseteq Z(g)$. От гъстотата на $\varphi_U(V_1)$ в W следва, че $Z(g) = W$, откъдето $\overline{(W_o, f)} = \overline{(W, 0)}$. Това доказва, че $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е влагане.

Нека $\alpha : k(W) \to k(V)$ е влагане на k-алгебри. Избираме афинно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W_o \subseteq W$ и разглеждаме

$$\alpha : k(W) = k(W_o) = F(k[W_o]) \longrightarrow k(V)$$

като хомоморфизъм на полето от частни $F(k[W_o])$ на афинния координатен пръстен $k[W_o]$ на W_o. За произволни афинни координати $y_1, \dots, y_m$ върху $k^m \supseteq W_o$ разглеждаме $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in k(V)$. Нека V_0' е непразно, афинно, Зариски отворено подмножество на Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq V_1 \cap \dots \cap V_m \subseteq V$. Тогава $\varphi_0 = (f_1, \dots, f_m) : V_0' \to k^m$ е морфизъм, защото φ_o издърпва афинните координатни функции y_j върху k^m в регулярни функции f_j върху V_0'. Ако $W_o = W_1 \cap W'$ за афинно многообразие $W_1 \subseteq k^m$ и Зариски отворено $\emptyset \neq W' \subseteq k^m$, то $\varphi_o = (f_1, \dots, f_m) : V_0' \to W_1$ взема стойности в W_1. Полагаме $V_0 := V_0' \cap \varphi_0^{-1}(W')$ и получаваме морфизъм $\varphi_0 = (f_1, \dots, f_m) : V_0 \to W_1 \cap W' = W_o$. Нека $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} \in k(V)$ е класът на еквивалентност на (V_0, φ_0).

За да установим съвпадението $\varphi^* = \alpha$ използваме, че $\varphi_o : V_0 \longrightarrow W_o \subseteq W_1$ е морфизъм в афинното многообразие W_1 и индуцира хомоморфизма на k-алгебри $\varphi_o^* = \alpha : k[W_1] \to \mathcal{O}_{V_0}(V_0)$. Разглеждаме $\mathcal{O}_{V_0}(V_0)$ като подпръстен на функционалното поле $k(V_0) = k(V)$ и използваме, че $k[W_1] = k[W_o]$, за да интерпретираме $\varphi_o^* = \alpha$ като хомоморфизъм $\varphi_o^* = \alpha : k[W_o] \to k(V)$. Този хомоморфизъм се продължава еднозначно върху полето от частни $F(k[W_o]) = k(W_o) = k(W)$ на $k[W_o]$. По този начин получаваме $\varphi_o^* = \alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$ за представителя (V_0, φ_o) на $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)}$, откъдето $\varphi^* = \alpha : k(W) \to k(V)$.

Твърдим, че рационалното изображение $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} : V \dashrightarrow W$ е доминантно. С допускане на противното, ако $\varphi_o(V_0) \subseteq W_o$ не е навсякъде гъсто в W, то съществува непразно Зариски отворено подмножество $W_2 \subseteq W$ с $\varphi_o(V_0) \cap W_2 = \emptyset$. Следователно $\varphi_o(V_0) \subseteq W_o \setminus W_2 \neq W_o$ за собственото Зариски затворено подмножество $W_o \setminus W_2$ на W_o, защото допускането $W_o \setminus W_2 = W_o$ води до $W_o \cap W_2 = \emptyset$, противно на неприводимостта на V. Избираме полином $g \in k[y_1, \dots, y_m] \setminus I(W_o)$, така че $\varphi_o(V_0) \subseteq W_o \setminus W_2 \subseteq Z(g)$. Оттук, $\varphi_o^*(g) = g\varphi_o|_{V_0} = 0$ или $\alpha(g) = \varphi_o^*(g) = 0 \in k(V_0) = k(V)$. Съгласно инективността на α получаваме $g + I(W_o) = 0 \in k(W_o)$, т.е. $g \in I(W_o)$. Противоречието с избора на $g \in k[y_1, \dots, y_m] \setminus I(W_o)$ доказва доминантността на $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} : V \dashrightarrow W$.

За взаимната еднозначност на съответствието между доминантните рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ и влаганията на k-алгебри $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$, вече проверихме, че доминантното рационално изображение $\varphi_\alpha : V \dashrightarrow W$, отговарящо на влагане на k-алгебри $\alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$ индуцира хомоморфизма $\varphi_\alpha^* = \alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$. За произволно доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ твърдим, че индуцираното от $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$ доминантно рационално изображение $\psi : V \dashrightarrow W$ съвпада с φ. По-точно, за произволно афинно отворено подмножество $W_o \subseteq W$ с афинен координатен пръстен $k[W_o] = k[\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}]$ избираме $\overline{(V_i, f_i)} = \varphi^*(\overline{y_i}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_o), y_i\varphi)}$ и полагаме $\psi = \overline{(V_0, (f_1, \dots, f_m))}$. За $\forall 1 \leq i \leq m$, i-тата компонента f_i на ψ съвпада с i-тата компонента $y_i\varphi$ на φ върху подходящо Зариски отворено подмножество на V. Следователно $\varphi = \psi : V \dashrightarrow W$, Q.E.D.

2. Бирационалност на многообразия и изоморфизми на функционални полета и локални пръстени

Определение 9.5. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално, ако се ограничава до изоморфизъм $\varphi : U_1 \to U_2$ на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$.*

Лема 9.6. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално тогава и само тогава, когато съществува рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$.*

Доказателство: Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува изоморфизъм $\varphi : U_1 \to U_2$ на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$. Разглеждаме рационалното изображение

$$\psi = \overline{(U_2, (\varphi^{-1}|_{U_2}))} : V_2 \dashrightarrow V_1$$

с $\psi\varphi|_{U_1} = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\varphi\psi|_{U_2} = \mathrm{Id}_{U_2}$. Твърдим, че $\psi\varphi : V_1 \dashrightarrow V_1$ и $\varphi\psi : V_2 \dashrightarrow V_2$ са доминантни рационални изображения, защото индуцират изоморфизми на k-алгебри $(\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_1} : k(V_1) = k(U_1) \to k(U_1) = k(V_1)$, съответно, $(\varphi\psi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_2} : k(V_2) = k(U_2) \to k(U_2) = k(V_2)$. Вземайки предвид доминантността на тъждествените изображения $\mathrm{Id}_{V_j} : V_j \to V_j$ и равенствата $(\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_1}$, съответно, $(\varphi\psi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_2}$, прилагаме Твърдение 9.4 и получаваме $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, съответно $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$.
Нека $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ е рационално избораженние с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$. Да означим с $\mathcal{D}_\varphi$, съответно $\mathcal{D}_\psi$ областите на регулярност на φ и ψ. Тогава φ се ограничава до регулярно изображение

$$\varphi : \mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) \longrightarrow \varphi(\mathcal{D}_\varphi) \cap \mathcal{D}_\psi,$$

а ψ се ограничава до регулярно изображение

$$\psi : \mathcal{D}_\psi \cap \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi) \longrightarrow \psi(\mathcal{D}_\psi) \cap \mathcal{D}_\varphi.$$

Вземайки предвид $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$ и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$, получаваме $\varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) = \psi(\mathcal{D}_\psi)$, съответно $\psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi) = \varphi(\mathcal{D}_\varphi)$. Сега $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1} : \mathcal{D}_\varphi \cap \psi(\mathcal{D}_\psi) \to \mathcal{D}_\varphi \cap \psi(\mathcal{D}_\psi)$ и $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2} : \mathcal{D}_\psi \cap \varphi(\mathcal{D}_\varphi) \to \mathcal{D}_\psi \cap \varphi(\mathcal{D}_\varphi)$ доказват, че $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \cap \psi(\mathcal{D}_\psi) \to \mathcal{D}_\psi \cap \varphi(\mathcal{D}_\varphi)$ е изоморфизъм и φ е бирационално изображение, Q.E.D.

Лема 9.7. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ на алгебрични многообразия над алгебрично затворено поле k е бирационално тогава и само тогава, когато индуцираният хомоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е изоморфизъм.*

Доказателство: Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$. В резултат,

$$\varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_1} = \mathrm{Id}_{k(V_1)}, \quad \psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_2} = \mathrm{Id}_{k(V_2)}$$

и $\varphi^* : \overline{k}(V_2) \to \overline{k}(V_1)$ е изоморфизъм на k-алгебри.
Обратно, нека $\varphi^* : k(V_2) \to k(V_1)$ е изоморфизъм на k-алгебри. Тогава $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е доминантно рационално изображение и съществува доминантно рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi^* = \varphi^*$. Композициите $\psi\varphi : V_1 \dashrightarrow V_1$ и $\varphi\psi : V_2 \dashrightarrow V_2$ са доминантни, защото произведенията $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^* = \mathrm{Id}_{k(V_2)}$ и $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^* = \mathrm{Id}_{k(V_1)}$ на влаганията φ^* и ψ^* са влагания. Прилагаме Твърдение 9.4 към равенствата $(\psi\varphi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_1}$, $(\varphi\psi)^* = \mathrm{Id}^*_{V_2}$ и получаваме $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$. Съгласно Лема 9.6, това доказва, че $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, Q.E.D.

Твърдение 9.8. *Нека k е алгебрично затворено поле, X и Y са квази-афинни многообразия над k и $p \in X$, $q \in Y$ са точки. Тогава следните условия са еквивалентни:*
(i) локалните пръстени $\mathcal{O}_{q,Y} \simeq \mathcal{O}_{p,X}$ са изоморфни;
(ii) съществуват квази-афинни Зариски отворени околности U на p и V на q с изоморфизъм $\varphi : U \to V$, трансформиращо p в $\varphi(p) = q$.
В частност, ако $\mathcal{O}_{p,X}$ и $\mathcal{O}_{q,Y}$ са изоморфни, то квази-афинните многообразия X и Y са бирационални.

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$ Произволен изоморфизъм на k-алгебри

$$\alpha : \mathcal{O}_q(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_p(X)$$

индуцира изоморфизъм

$$\alpha : k(Y) = F(\mathcal{O}_q(Y)) \longrightarrow F(\mathcal{O}_p(X)) = k(X)$$

на съответните полета от частни. Съгласно Лема 9.7, $\alpha = \varphi^*$ се индуцира от бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$. Нека φ се ограничава до изоморфизъм $\varphi : U \to V$ на квази-афинни, непразни Зариски отворени подмножества $U \subseteq X$ и $V \subseteq Y$. Локално, $\varphi = (f_1, \dots, f_m)$ се задава от $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in k(X)$. Съгласно $\alpha\mathcal{O}_q(Y) = \mathcal{O}_p(X)$ имаме $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in \mathcal{O}_p(X)$, така че функциите f_i са регулярни в p и $\varphi(p)$ е коректно зададено. Избираме представител на φ, който съдържа p в дефиниционната си област U' и заменяме U с $U \cup U'$. За да проверим, че $\varphi(p) = q$, забелязваме, че изоморфизмът на k-алгебри $\alpha : \mathcal{O}_q(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$ индуцира изоморфизъм $\alpha : \mathcal{O}_q(Y)^* \to \mathcal{O}_p(X)^*$ на съответните мултипликативни групи на тези локални пръстени, а оттам и изоморфизъм

$$\alpha : \mathfrak{M}_q(Y) = \mathcal{O}_q(Y) \setminus \mathcal{O}_q(Y)^* \longrightarrow \mathcal{O}_p(X) \setminus \mathcal{O}_p(X)^* = \mathfrak{M}_p(X)$$

на съответните максимални идеали. Сега от $\overline{y_i} - q_i \in \mathfrak{M}_q(Y)$ следва $\alpha(\overline{y_i} - q_i) \in \mathfrak{M}_p(X)$, така че

$$0 = \alpha(\overline{y_i} - q_i)(p) = \varphi^*(\overline{y_i} - q_i)(p) = (\overline{y_i} - q_i)\varphi(p) = \varphi(p)_i - q_i.$$

Следователно $\varphi(p)_i = q_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$ и $\varphi(p) = q$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Ако $\varphi : U \to V$ е изоморфизъм на непразни Зариски отворени подмножества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ с $\varphi(p) = q$ за някое $p \in U$, то можем да разглеждаме $\varphi : X \dashrightarrow Y$ като бирационално изображение, индуциращо изоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$. Твърдим, че φ^* се ограничава до изоморфизъм на съответните локални пръстени. От една страна, класовете $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_q(Y) \subseteq k(Y)$ се характеризират със свойството $q \in W$. Те се издърпват до $\varphi^*\overline{(W, f)} = \overline{(\varphi^{-1}(W), f\varphi)}$ с $p \in \varphi^{-1}(W)$, защото $\varphi(p) = q \in W$. Следователно $\varphi^*\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(X)$ и $\varphi^*\mathcal{O}_q(Y) \subseteq \mathcal{O}_p(X)$. Обратно, ако $\varphi^*\overline{(W, f)} = \overline{(\varphi^{-1}(W), f\varphi)} \in \mathcal{O}_p(X)$, то $p \in \varphi^{-1}(W)$. Следователно $\varphi(p) = q \in W$ и всеки елемент на $\mathcal{O}_p(X)$ е образ на елемент на $\mathcal{O}_q(Y)$ и $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$ се ограничава до изоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : \mathcal{O}_q(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$, Q.E.D.
Доказателството на $(ii) \Rightarrow (i)$ от Твърдение 9.8 показва, че всяко бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$ на квази-афинни или квази-проективни многообразия индуцира изоморфизми $\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$ на локалните пръстени $\mathcal{O}_p(X)$ на точките $p \in \mathcal{D}$ от областта на регулярност $\mathcal{D}$ на φ в X с локалните пръстени $\mathcal{O}_{\varphi(p)}$ на образите $\varphi(p)$ на p в Y.

3. Крайни доминантни рационални изображения

Определение 9.9. *Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е рационално изображение на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, $\mathcal{D} \subseteq X$ е областта на регулярност на f, а*

$$\Gamma_f^{\mathcal{D}} = \{(x, f(x)) \in k^{n+m} \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Тогава Зариски затворената обвивка

$$\Gamma_f = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} \subseteq X \times Y$$

се нарича график на f.

Първата канонична проекция, $\pi_1 : \Gamma_f \to X$ е бирационална, защото изображението $\pi_1 : \Gamma_f^{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ е бирегулярно, $\Gamma_f^{\mathcal{D}}$ е Зариски гъсто в Γ_f, $\mathcal{D}$ е Зариски гъсто в X.
По този начин, всяко рационално изображение $f : X \dashrightarrow Y$ на неприводими афинни многообразия може да се изучава с точност до бирационалност чрез регулярната проекция $\pi_2 : \Gamma_f \to Y$, която има едни и същи слоеве с f над $f(\mathcal{D})$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "Id_Y"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}.$$

Твърдим, че Γ_f е неприводимо. Наистина, ако $\Gamma_f = Z_1 \cup Z_2$ е обединение на Зариски затворени подмножества $Z_j \subseteq \Gamma_f$, то $\Gamma_f^{\mathcal{D}} = (\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_1) \cup (\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_2)$ е обединение на Зариски затворени подмножества $\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_j \subseteq \Gamma_f^{\mathcal{D}}$. Съгласно неприводимостта на Зариски отвореното подмножество $\mathcal{D}$ на многообразието X и бирегулярността на $\pi_1 : \Gamma_f^{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$, $\Gamma_f^{\mathcal{D}}$ е неприводимо и $\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_1 = \Gamma_f^{\mathcal{D}}$ след евентуална замяна на Z_1 с Z_2. Оттук

$$\Gamma_f = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} \cap Z_1 = \Gamma_f \cap Z_1 = Z_1$$

и Γ_f е неприводимо.
Ще казваме, че свойство P е изпълнено в обща точка на квази-афинно или квази-проективно многообразие X, ако съществува собствено, Зариски затворено подмножество $Y \subset X$, така че P е изпълнено за $\forall x \in X \setminus Y$.

Твърдение 9.10. *Нека k е алгебрично затворено поле, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение на квази-афинни или квази-проективни многообразия, а $\mathcal{D} \subseteq X$ е областта на регулярност на φ. В такъв случай слоят $\varphi^{-1}(q)$ на $\varphi : \mathcal{D} \to \varphi(\mathcal{D})$ над обща точка q на $\varphi(\mathcal{D})$ е краен тогава и само тогава, когато разширението $k(X) \supseteq \varphi^* k(Y)$ е крайно и броят $|\varphi^{-1}(q)|$ на точките в общ слой на φ не надминава степента $[k(X) : \varphi^* k(Y)]$ на разширението на съответните функционални полета,*

$$|\varphi^{-1}(q)| \leq [k(X) : \varphi^* k(Y)].$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да предполагаме, че

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

е доминантен морфизъм на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$ и $Y \subseteq k^m$.
Броят на точките в общ слой на доминантен морфизъм φ на квази-афинни многообразия е мултипликативна функция на φ. По-точно, ако

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2\varphi_1"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & V_3 \end{tikzcd} \tag{9.1}$$

е комутативна диаграма от доминантни морфизми на квази-афинни многообразия с крайни общи слоеве, то за обща точка $q \in \varphi_2\varphi_1(V_1)$ и обща точка $r \in \varphi_2^{-1}(q)$ имаме

$$|(\varphi_2\varphi_1)^{-1}(q)| = |\varphi_2^{-1}(q)||\varphi_1^{-1}(r)|.$$

От друга страна, степента $[k(V) : \varphi^* k(W)]$ на разширението $\varphi^* k(W) \subseteq k(V)$, индуцирано от доминантен морфизъм $\varphi : V \to W$ е мултипликативна функция на φ. Това означава, че ако (9.1) е комутативна диаграма от доминантни морфизми, която индуцира комутативна диаграма от крайни разширения

$$\begin{tikzcd} k(V_1) & k(V_2) \arrow[l, "\varphi_1^*"'] \\ & k(V_3) \arrow[ul, "(\varphi_2\varphi_1)^*"] \arrow[u, "\varphi_2^*"'] \end{tikzcd},$$

то

$$[k(V_1) : (\varphi_2\varphi_1)^* k(V_3)] = [k(V_2) : \varphi_2^* k(V_3)][k(V_1) : \varphi_1^* k(V_2)].$$

Ако $\varphi : X \to Y$ е доминантен морфизъм на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, то графикът на φ

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\} \subseteq k^{n+m}$$

се включва в комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} \Gamma_\varphi \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \\ X \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

с бирегулярно π_1. Достатъчно е да докажем твърдението за втората канонична проекция $\pi_2 : \Gamma_\varphi \to Y$, защото $\varphi\pi_1 = \pi_2$, $\pi_1^* : k(X) \to k(\Gamma_\varphi)$ е изоморфизъм на k-алгебри и слоевете на π_1 се състоят от единствени точки.
За да разложим $\pi_2 : \Gamma_\varphi \to Y$ в произведение на по-прости изображения разглеждаме проекциите

$$\Pi_i : k^{n+m-i+1} \longrightarrow k^{n+m-i},$$

$$\Pi_i(x_i, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = (x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

за $\forall 1 \leq i \leq n$. Представяме $\pi_2 = \Pi_n \ldots \Pi_1$. Остава да установим неприводимостта на $\Pi_i \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и да докажем твърдението за Π_i, $1 \leq i \leq n$.
Ако подмножеството $V \subseteq k^s$ или $V \subseteq \mathbb{P}^s(k)$ е неприводимо относно топологията на Зариски и $\varphi : V \to W$ е морфизъм, то $\varphi(V)$ е неприводимо. По-точно, представяме $\varphi(V) = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на относително затворени подмножества $Z_j \subseteq \varphi(V)$. Тогава $V = \varphi^{-1}(Z_1) \cup \varphi^{-1}(Z_2)$ е обединение на относително затворени $\varphi^{-1}(Z_j) \subseteq V$, съгласно непрекъснатостта на морфизмите относно топологията на Зариски. След евентуална размяна на Z_1 с Z_2 имаме $V = \varphi^{-1}(Z_1)$, поради неприводимоста на V. Оттук $\varphi(V) = Z_1$ и $\varphi(V)$ е неприводимо. В случая, от неприводимостта на графика Γ_φ на морфизма $\varphi : X \to Y$ на квази-афинни многообразия следва неприводимостта на $\Pi_i \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.
За произволно $1 \leq i \leq n$ да означим $V := \Pi_{i-1} \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$, $W := \Pi_i \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ и да разгледаме $\psi := \Pi_i : V \to W$ като сюрективен морфизъм на квази-афинни многообразия. Нека $z_1, z_2, \ldots, z_s$ са афинни координати върху V, а $z_2, \ldots, z_s$ са афинни координати върху W. Означаваме $\overline{z_i} := z_i + I(W) \in k[W] = k[z_2, \ldots, z_s]/I(W)$ за $2 \leq i \leq s$ и $\widehat{z_j} := z_j + I(V) \in k[V] = k[z_1, z_2, \ldots, z_s]/I(V)$ за $1 \leq j \leq s$. Афинните координатни пръстени

$$k[W] = k[z_2, \ldots, z_s]/I(W) \simeq (k + I(W)/I(W))[z_2 + I(W), \ldots, z_s + I(W)] \simeq$$

$$\simeq (k/k \cap I(W))[\overline{z_2}, \ldots, \overline{z_s}] = k[\overline{z_2}, \ldots, \overline{z_s}]$$

и $k[V] = k[\widehat{z_1}, \widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_s}]$ са изоморфни на k-алгебрите, породени от тези елементи. От равенството $I(W) = I(V) \cap k[z_2, \dots, z_s]$ на идеали в $k[z_2, \dots, z_s]$ получаваме равенството

$$k[\overline{z_2}, \dots, \overline{z_s}] = k[z_2, \dots, z_s]/I(W) = k[z_2, \dots, z_s]/I(V) \cap k[z_2, \dots, z_s] = k[\widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_s}]$$

на k-алгебри. Това позволява да представим афинния координатен пръстен

$$k[V] = k[\widehat{z_1}, \widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_s}] = k[\widehat{z_2}, \dots, \widehat{z_s}][\widehat{z_1}] = k[W][\widehat{z_1}]$$

на V като алгебра над афинния координатен пръстен $k[W]$ на W с един пораждащ $\widehat{z_1}$. Да отбележим, че полето от частни $F(k[W][\widehat{z_1}]) = k(W)(\widehat{z_1})$ на тази алгебра е разширението на функционалното поле $k(W)$ на W чрез $\widehat{z_1}$. По-точно, от $k[W] \subseteq k(W)$ следва $k[W][\widehat{z_1}] \subseteq k(W)[\widehat{z_1}] \subseteq k(W)(\widehat{z_1})$. Полето $k(W)(\widehat{z_1})$ е затворено относно деление с ненулев елемент, така че $F(k[W][\widehat{z_1}]) \subseteq k(W)(\widehat{z_1})$. Обратно, $k[W] \subseteq k[W][\widehat{z_1}]$ дава $k(W) = F(k[W]) \subseteq F(k[W][\widehat{z_1}])$. Съгласно $\widehat{z_1} \in F(k[W][\widehat{z_1}])$ и затвореността на полето $F(k[W][\widehat{z_1}])$ относно събиране, умножение и деление с ненулев елемент имаме $k(W)[\widehat{z_1}] \subseteq F(k[W][\widehat{z_1}])$, а оттам и $k(W)(\widehat{z_1}) \subseteq F(k[W][\widehat{z_1}])$. Това доказва

$$k(V) = F(k[V]) = F(k[W][\widehat{z_1}]) = k(W)(\widehat{z_1})$$

и позволява да разглеждаме функционалното поле $k(V)$ на V като разширение на функционалното поле $k(W)$ на W чрез един елемент.

Нека $\overline{W} = ZI(W) \subseteq k^s$ е Зариски затворената обвивка на W. Тогава доминантното регулярно изображение $\psi : V \to \overline{W}$, $\psi(v_1, v_2, \dots, v_s) = (v_2, \dots, v_s)$ за $\forall v \in V$ индуцира хомоморфизма на k-алгебри

$$\psi^* : k[\overline{W}] = k[W] = k[\overline{z_2}, \dots, \overline{z_s}] \longrightarrow \mathcal{O}_V(V) \subset k(V) = k(\overline{z_2}, \dots, \overline{z_s})(\widehat{z_1})$$

с $\psi^*(\overline{z_i}) = z_2\psi = \overline{z_i}$ за $\forall 2 \leq i \leq s$. Следователно

$$\psi^* : k[W] = k[\overline{z_2}, \dots, \overline{z_s}] \longrightarrow k[\overline{z_2}, \dots, \overline{z_s}][\widehat{z_1}] = k[W][\widehat{z_1}] = k[V]$$

е тъждественото влагане на $k[W]$ в $k[V] = k[W][\widehat{z_1}]$ и индуцира тъждественото влагане $\psi^* : k(W) \to k(W)(\widehat{z_1}) = K(V)$ на съответните функционални полета.

Слоят $\psi^{-1}(w)$ в обща точка $w \in W$ се съдържа в Зариски затворената обвивка $\overline{V} = ZI(V)$ на $V \subseteq k^s$. Следователно

$$\psi^{-1}(w) \subseteq \{(v_1, w) \in k^s \quad | \quad f(v_1, w) = 0 \quad \text{за} \quad \forall f \in I(V) \setminus k[z_2, \dots, z_s]\},$$

защото за полиномиалните съотношения $f \in I(V) \cap k[z_2, \dots, z_s] = I(W)$ е известно, че $f(v_1, w) = f(w) = 0$.

Ако $I(V) \setminus k[z_2, \dots, z_s] \neq \emptyset$, избираме $f \in I(V) \setminus k[z_2, \dots, z_s]$ от минимална степен d относно z_1. Тогава уравнението $f(z_1, w) = 0$ има най-много d решения и слоят $\psi^{-1}(w)$ се състои от $|\psi^{-1}(w)| \leq d$ точки. Твърдим, че $[k(V) : k(W)] = [k(W)(\widehat{z_1}) : k(W)] = d$. За целта трябва да докажем, че образът на f в $k(W)(\widehat{z_1})$ е неразложим над $k(W)$. За произволен полином $G(t) \in k(W)[t]$ съществуват полиноми $\widetilde{g} \in k[z_2, \dots, z_s]$ и $\widetilde{f} \in k[z_2, \dots, z_s, t]$, така че

$$(\widetilde{g} + I(W))G(t) = \widetilde{f} + I(V).$$

Оттук, $\widetilde{g}(z_2, \dots, z_s)G(t) - \widetilde{f}(z_2, \dots, z_s, t) \in I(V)$. Ако допунем, че $f + I(V) = G_1(t)G_2(t)$ за някои $G_1, G_2 \in k(W)[t]$, то съществуват $\widetilde{g}_j(z_2, \dots, z_s) \in k[z_2, \dots, z_s]$ и $\widetilde{f}_j(z_2, \dots, z_s, t) \in k[z_2, \dots, z_s, t]$, така че

$$\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2 f + I(V) = [\widetilde{g}_1 G_1(t)][\widetilde{g}_2 G_2(t)] = [\widetilde{f}_1 + I(V)][\widetilde{f}_2 + I(V)] = \widetilde{f}_1\widetilde{f}_2 + I(V).$$

В резултат,

$$\widetilde{g}_1(z_2, \dots, z_s)\widetilde{g}_2(z_2, \dots, z_s)f(z_2, \dots, z_s, t) - \widetilde{f}_1(z_2, \dots, z_s, t)\widetilde{f}_2(z_2, \dots, z_s, t) \in I(V)$$

и съгласно минималността на $\deg_t f = d$ поне един от полиномите $\widetilde{f_1}(z_2, \ldots, z_s, t)$ или $\widetilde{f_2}(z_2, \ldots, z_s, t)$ не зависи от t. Това доказва неразложимостта на $f + I(V) \in k(V)$ над $k(W)$.
Ако $I(V) \setminus k[z_2, \ldots, z_s] = \emptyset$, то слоят $\psi^{-1}(w) \simeq k$ е безкраен, защото алгебрично затвореното поле k е безкрайно. Твърдим, че $\widehat{z_1}$ е трансцендентен над $k(W)$. Допускаме противното и разглеждаме алгебрична зависимост $G \in k(W)[z_1] \setminus k(W)$ на $\widehat{z_1}$ над $k(W)$. Тогава съществуват $\widetilde{g}(z_2, \ldots, z_s) \in k[z_2, \ldots, z_s]$ и $\widetilde{f} \in k[z_2, \ldots, z_s, t]$, така че $\widetilde{g}(z_2, \ldots, z_s)G(t) - \widetilde{f}(z_2, \ldots, z_s) \in I(V)$ и $\widetilde{f}(z_2, \ldots, z_s, t)$ зависи от t. Ако $G(\widehat{z_1}) = 0$, то $\widetilde{f}(\overline{z_2}, \ldots, \overline{z_s}, \widehat{z_1}) = 0$, откъдето $\widetilde{f} \in I(V) \setminus I(W)$. Това противоречи на допускането $I(V) \setminus I(W) = \emptyset$ и доказва трансцендентността на $\widehat{z_1}$ над $k(W)$, Q.E.D.

Задача 9.11. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$

$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_0 : x_1 : x_2]$$

над алгебрично затворено поле k. Да се докаже, че ограничението $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е доминантно рационално изображение и функционалното поле $k(V)$ на V е крайно разширение на $\varphi^* k(\mathbb{P}^2)$. Да се намери степента на разширението $k(V) \supset \varphi^* k(\mathbb{P}^2(k))$ и да се определи дали $\varphi : V \to \mathbb{P}^2(k)$ е бирационално.

Упътване: Използвайте, че $V \cap U_0$ за $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad x_0 \neq 0\}$ е афинно Зариски отворено подмножество на V.

Задача 9.12. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^3(k),$$

$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_1 : x_2 : x_3 : x_1 + x_2].$$

Да се докаже, че:
(i) $\varphi : V \to \mathbb{P}^3(k)$ е недоминантен морфизъм;
(ii) $\varphi : V \to H = \{y = [y_0 : \ldots : y_3] \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad y_0 + y_1 - y_3 = 0\} \simeq \mathbb{P}^2(k)$ е доминантен, небирационален морфизъм;
(iii) функционалното поле $k(V)$ на V е разширение от степен 3 на $\varphi^* k(H)$, където $k(H)$ е функционалното поле на H.

Упътване: Работете с $V \cap U_1$ за $U_1 = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad x_1 \neq 0\}$.

Задача 9.13. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \quad | \quad x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$

$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2].$$

Да се докаже, че:
(i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е точка p;
(ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ не е доминантно;
(iii) разширението $k(\mathcal{D} \cap U_0) \supset \varphi^* \overline{k}(\varphi(\mathcal{D} \cap U_0)$ не е крайно.

Задача 9.14. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \ \mid \ x_0x_3^2 = x_0^3 - x_0^2x_1 + x_0x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$
$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_0^2 : x_0x_1 : x_2^2].$$

Да се докаже, че:
(i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е проективна права;
(ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е доминантно;
(iii) разширението $k(V) \supset \varphi^* k(\mathbb{P}^2(k))$ е от степен 4.

Упътване: (ii) Проверете, че $\varphi(V \cap U_0) \subset U_0'$ за
$U_0 = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 \neq 0\}$, $U_0' = \{y = [y_0 : y_1 : y_2] \in \mathbb{P}^2(k) \mid y_0 \neq 0\}$;
(iii) Ако $t_1 = \frac{x_1}{x_0}$, $t_2 = \frac{x_2}{x_0}$ и $t_3 = \frac{x_3}{x_0}$, то функционалното поле $\overline{k}(V) = k(V \cap U_0) = (\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3})$ е породено от $\overline{t_i} = t_i + I(V \cap U_0)$ за $1 \leq i \leq 3$ със съотношението $\overline{t_3}^2 = -\overline{t_2}^3 + \overline{t_1}^2 - \overline{t_1} + 1$. Проверете, че $\varphi^* \overline{k}(\mathbb{P}^2(k)) = k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)$ и пресметнете степента

$$[k(V) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)] = [k(V) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2})][k(\overline{t_1}, \overline{t_2}) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)].$$