ЛЕКЦИЯ 2
ОРТОГОНАЛНОСТ

Определение. *Нека L е евклидово пространство и $x, y \in L$. Казваме, че x и y са ортогонални, ако $(x, y) = 0$.*

Пример 1. *Разглеждаме евклидовото пространство на геометричните вектори. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ортогонални $\Leftrightarrow$ $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ или единият от векторите е нулев.*

Пример 2. *В E_n векторите $(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n)$ и $(\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_n)$ са ортогонални*

$$\Leftrightarrow \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = 0$$

.

Пример 3. *В $C[a, b]$ функциите $f(x)$ и $g(x)$ са ортогонални*

$$\Leftrightarrow \int\limits_a^b f(x).g(x)\, dx = 0$$

.

Теорема на Питагор. *Нека L е евклидово пространство и $x_1, \ldots, x_k \in L$ и всеки два от тези вектори са ортогонални. Тогава*

$$|x_1 + \cdots + x_k|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2.$$

Доказателство:

$$|x_1 + \cdots + x_k|^2 = (x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k) = \sum_{i=1}^{k}(x_i, x_i) + \sum_{i \neq j}(x_i, x_j).$$

Понеже $(x_i, x_j) = 0$, $i \neq j$ имаме

$$|x_1 + \cdots + x_k|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2.$$

Определение. *Нека L е евклидово пространство и $x_1,\dots,\ x_k \in L$. Казваме, че $x_1,\dots,\ x_k$ е ортогонална система, ако:*

1) $x_i \neq 0,\ i = 1,\dots,\ k$

2) всеки два от векторите $x_1,\dots,\ x_k$ са ортогонални

Твърдение 1. *Всяка ортогонална система от вектори е линейно независима.*

Доказателство:

Нека $x_1,\dots,\ x_k$ е ортогонална система. Да допуснем, че

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0.$$

Тогава

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k, x_1) = \lambda_1(x_1, x_1) + \cdots + \lambda_k(x_k, x_1) = 0$$

Понеже $(x_i, x_j) = 0$, когато $i \neq j$, то $\lambda_1(x_1, x_1) = 0$. Но $x_1 \neq 0$ и тогава $(x_1, x_1) \neq 0$. Следователно $\lambda_1 = 0$.

Аналогично се доказва, че $\lambda_2,\dots,\ \lambda_k$ също са равни на нула.

Следствие. *Нека L е крайномерно евклидово пространство,* $\dim L = n$. *Тогава броят на векторите във всяка ортогонална система не надминава n.*

Определение. *Нека L е крайномерно евклидово пространство и $e_1,\dots,\ e_n$ е базис. Казваме, че този базис е ортогонален, ако всеки два негови вектора са ортогонални, т.е. ако елементите на този базис образуват ортогонална система.*

Теорема 2. *Всяко ненулево крайномерно евклидово пространство има ортогонален базис.*

Доказателство:

Нека L е евклидово пространство, $\dim L = n$, $n \geqq 1$ и $f_1,\dots,\ f_n$ е произволен базис на L.

Ортогоналният базис, който търсим ще получим чрез последователна промяна на векторите от базиса $f_1,\dots,\ f_n$. За първи вектор на новия базис вземаме $e_1 = f_1$. Втория вектор го търсим във вида $e_2 = f_2 + \lambda_1 f_1$. Искаме $(e_1, e_2) = 0$. Понеже

$$(e_2, e_1) = (f_2 + \lambda_1 f_1, e_1) = (f_2, e_1) + \lambda_1(e_1, e_1)$$

имаме

$$(e_2, e_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{(f_2, e_1)}{(e_1, e_1)}. \tag{*}$$

Избираме λ_1 от (*). Тогава e_1 и e_2 са ортогонални.

Защо e_2 не е нулев?

Имаме $e_2 = f_2 + \lambda_1 f_1$. Да допуснем, че $f_2 + \lambda_1 f_1 = 0$. Понеже коефициентът пред f_2 е $1 \Rightarrow f_1$ и f_2 са линейно зависими, което е противоречие, защото те са част от базис. И така e_2 е ненулев.

Векторът e_3 търсим във вида $e_3 = f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. ($\lambda_1$ е различно от предишното.) Искаме e_3 да е ортогонален на e_1 и e_2, т. е. $(e_3, e_1) = 0$ и $(e_3, e_2) = 0$. Като вземем под внимание равенството (*), имаме

$$(f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_1) = (f_3, e_1) + \lambda_1 (e_1, e_1).$$

Следователно

$$(e_3, e_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)}.$$

По същия начин виждаме, че

$$(f_3 + \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, e_2) = (f_3, e_2) + \lambda_2 (e_2, e_2)$$

и

$$(e_3, e_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)}.$$

При намерените стойности на λ_1 и λ_2 от тези равенства, e_3 ще бъде ортогонолен на e_1 и e_2.

Защо $e_3 \neq 0$?

Понеже $(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$ е линейна комбинацая на f_1 и f_2, векторът $e_3 = f_3 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$ е линейна комбинация на f_1, f_2, f_3. Коефициентът пред f_3 в тази линейна комбинация е 1. Ако допуснем, че $e_3 = 0$ следва, че векторите f_1, f_2, f_3 са линейно зависими. Това е противоречие, защото те са част от базис.

Векторът e_4 го търсим във вида $e_4 = f_4 + (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3)$. ($\lambda_1$ и λ_2 са различни от предишните.) Повтаряйки горните разсъждения и като използваме равенствата $(e_3, e_1) = 0$, $(e_3, e_2) = 0$ и $(e_1, e_2) = 0$, получаваме, че

$$(e_4, e_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{(f_4, e_1)}{(e_1, e_1)}$$
$$(e_4, e_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{(f_4, e_2)}{(e_2, e_2)}$$
$$(e_4, e_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = -\frac{(f_4, e_3)}{(e_3, e_3)}.$$

При така намерените стойности на λ_1, λ_2 и λ_3 векторът e_4 ще бъде ортогонален на e_1, e_2, e_3. Векторът e_4 не е нулев (доказва се по същият начин както за вектора e_3). Продължавайки по този начин в крайна сметка ще достигнем до ортогоналната система $e_1, \ldots, e_n$. Съгласно **Тв. 1.** те са линейно независими и поради това образуват базис. Ясно е, че това ще бъде търсеният базис. Този алгоритъм за намиране на ортогонален базис е известен като алгоритъм на Грам - Шмид.

Определение. *Нека L е евклидово пространство и $\dim L = n$, $n \geqq 1$ и $e_1, \ldots, e_n$ е базис на L. Казваме, че този базис е ортонормиран, ако:*

1) $|e_i| = 1, \ i = 1, \ldots, \ n$

2) всеки два от тези вектори са ортогонални, т. е. $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонална система.

Ако $e_1, \ldots, e_n$ е ортогонален базис, тогава $\dfrac{e_1}{|e_1|}, \ldots, \dfrac{e_n}{|e_n|}$ е ортонормиран базис така, че съществуването на ортонормиран базис е очевидно.

Нека $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис. Тогава

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

т. е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, където δ_{ij} е символът на Кронекер. Следователно във всеки ортонормиран базис матрицата на скаларното произведение е единичната матрица.

Пресмятане на скаларното произведение чрез координатите в ортонормиран базис

Нека L е евклидово пространство, $\dim L = n$ и $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис. Ако

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots \xi_n e_n$$
$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$$

имаме

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu_i (e_i, e_i) + \sum_{i \neq j} \xi_i \mu_j (e_i, e_j)$$

понеже $(e_i, e_i) = 1$ и $(e_i, e_j) = 0, \ i \neq j$ следва

$$(x, y) = \xi_1 \mu_1 + \xi_2 \mu_2 + \cdots + \xi_n \mu_n.$$

Последното равенство може да се запише в матричен вид по следния начин:

$$(x,y) = (\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_n) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Изоморфизъм на Евклидови пространства

Определение. *Нека L и L' са евклидови пространства. Казваме, че тези пространства са изоморфни като евклидови пространства, ако те са изоморфни като линейни пространства и съществува изоморфизъм $L \xrightarrow{\varphi} L'$, който запазва скаларното произведение в смисъл, че ако $x \xrightarrow{\varphi} x'$ и $y \xrightarrow{\varphi} y'$, тогава $(x,y) = (x',y')$.*

Теорема. *Нека L и L' са евклидови пространства и $\dim L = \dim L' = n$. Тогава L и L' са изоморфни като евклидови пространства.*

Доказателство:

Нека $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис на L и $e'_1, \ldots, e'_n$ е ортонормиран базис на L. Ако $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n \in L$ дефинираме

$$x \xrightarrow{\varphi} x' = \xi_1 e'_1 + \cdots + \xi_n e'_n \in L'.$$

Това, че φ е изоморфизъм между L и L' вече е доказано миналия семестър. Остава да проверим, че φ запазва скаларното произведение.

Нека $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ и $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n$. Тогава

$$x \xrightarrow{\varphi} x' = \xi_1 e'_1 + \cdots + \xi_n e'_n \text{ и } y \xrightarrow{\varphi} y' = \mu_1 e'_1 + \cdots + \mu_n e'_n$$

понеже $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис имаме

$$(x,y) = \xi_1 \mu_1 + \cdots + \xi_n \mu_n.$$

От това, че $e'_1, \ldots, e'_n$ е ортонормиран базис следва

$$(x',y') = \xi_1 \mu_1 + \cdots + \xi_n \mu_n.$$

Доказахме, че $(x,y) = (x',y')$. Следователно φ е изоморфизъм на L и L' като евклидови пространства.