ЛЕКЦИЯ 5
КВАДРАТИЧНИ ФОРМИ. ПРИВЕЖДАНЕ В КАНОНИЧЕН ВИД.

Определение. *Квадратична форма на променливите x_1, x_2, $\dots$, x_n наричаме функция от вида:*

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \dots\dots\dots + c_{1n}x_1x_n &+ \\ c_{22}x_2^2 + c_{23}x_2x_3 + \dots\dots + c_{2n}x_2x_n &+ \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &+ \\ + c_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + c_{n-1,n}x_{n-1}x_n &+ \\ + \quad c_{nn}x_n^2 \,, & \end{aligned}$$

където c_{ij} се наричат коефициенти на квадратичната форма и ще предполагаме,че са реални числа.

Дефинираме $a_{ii} = c_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ и $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}c_{ij}$, ако $i \neq j$. Така получаваме симетричната матрица $A = (a_{ij})$. С помощта на елементите на тази матрица можем да запишем квадратичната форма в следния вид:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

От лемата (вж. първата лекция) получаваме, че

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 \ x_2 \dots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Това равенство се нарича *матрично представяне* на квадратичната форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Симетричната матрица A се нарича *матрица на квадратичната форма*. Рангът на A се нарича *ранг на квадратичната форма* и се бележи $\operatorname{rg}(f)$, т. е. $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A)$.

Определение. *Равенствата:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \cdots + \tau_{1n}y_n \\ x_2 &= \tau_{21}y_1 + \tau_{22}y_2 + \cdots + \tau_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \cdots + \tau_{nn}y_n \end{aligned} \tag{1}$$

се наричат линейна трансформация на променливите x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Матрицата $T = (\tau_{ij})$ се нарича матрица на тази трансформация.

С помощта на матрицата T записваме (1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{1'}$$

Казваме,че линейната трансформация (1) е *обратима*, ако T е обратима. Ако T е ортогонална матрица, казваме че (1) е ортогонална трансформация. Ясно е, че ортогоналните трансформации са обратими.

Ще разглеждаме само обратими линейни трансформации. Ако (1) е обратима тогава

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

Линейната трансформация на променливите y_1, y_2, $\ldots$, y_n в (2) се нарича *обратна* линейна трансформация на (1). Ако $T^{-1} = (\alpha_{ij})$, тогава

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n \end{aligned} \quad . \tag{2'}$$

Това, че (1) и (2′) са взаимно обратни означава, че ако пресметнем $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ от (2′) при $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и след това заместим $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ в (1) ще получим първоначалните числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$.

Преобразуване матрицата на квадратична форма при линейна трансформация

Нека е дадена квадратичната форма

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{*}$$

където A е матрицата на f.

Разглеждаме линейната трансформация

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \cdots + \tau_{1n}y_n \\ x_2 &= \tau_{21}y_1 + \tau_{22}y_2 + \cdots + \tau_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \cdots + \tau_{nn}y_n \end{aligned}\right., \tag{1}$$

която записваме в матричен вид по следния начин

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad T = (\tau_{ij}). \tag{1'}$$

След като в квадратичната форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ заместим x_1, x_2, $\dots$, x_n чрез техните равни от равенството ($1'$) ще получим нова квадратична форма $\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ на променливите y_1, y_2, $\dots$, y_n.

Транспонираме ($1'$) и получаваме

$$(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) = (y_1,\ y_2, \dots,\ y_n)\, T' \tag{1''}$$

Заместваме ($1'$) и ($1''$) в (*) и получаваме

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1,\ y_2, \dots,\ y_n)\, \underbrace{T'AT}_{B} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1,\ y_2, \dots,\ y_n)\, B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{**}$$

Имаме $B' = (T'AT)' = T'A'(T')' = T'A'T = T'AT = B$ и следователно матрицата B е симетрична.

Нека $B = (b_{ij})$. От Лемата (вж. първата лекция) и (**) става ясно, че коефициентът пред y_i^2 е b_{ii} и коефициентът пред y_iy_j, $i \neq j$ е $b_{ij} + b_{ji}$. Понеже $b_{ij} = b_{ji}$ имаме, че b_{ij} е $\dfrac{1}{2}$ от коефициента пред y_iy_j.

Следователно B е матрицата на новата квадратична форма.

Така доказахме следната теорема:

Теорема 1. *Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е квадратичната форма с матрица A. Квадратичната форма $\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, получена от $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ след прилагането на линейната трансформация (1) има матрица $T'AT$, където T е матрицата на линейната трансформация.*

Следствие 1. *При обратима линейна трансформация, рангът на квадратичната форма не се променя.*

Доказателство:

Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е квадратична форма с матрица A и $\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ се получава след прилагането на (1). Тогава $\tilde{f}$ има матрица $T'AT$. Имаме

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) \quad \text{и} \quad \operatorname{rg}(\tilde{f}) = \operatorname{rg}(T'AT)$$

Понеже T е обратима, то $\operatorname{rg}(T'AT) = \operatorname{rg}(A)$. Следователно $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(\tilde{f})$.

Следствие 2. *При обратима линейна трансформация знакът на детерминантата на матрицата на квадратичната форма не се променя.*

Доказателство:

Нека f има матрица A. Тогава $\tilde{f}$ има матрица $T'AT$. Имаме

$$\det(T'AT) = \det T'.\det A.\det T = \det T'.\det T.\det A = (\det T)^2.\det A.$$

Понеже $\det(T) \neq 0$

$$\operatorname{sign}(\det(T'AT)) = \operatorname{sign}(\det A).$$

Следствие 3. *Нека $\tilde{f}$ се получава като към f приложим линейната трансформация (1) и тази линейна трансформация е обратима. Нека обратната линейна трансформация на (1) е*

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n \\ y_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \cdots + \alpha_{nn}x_n \end{aligned}, \qquad (2)$$

Тогава, ако приложим към квадратичната форма $\tilde{f}$ линейната трансформация (2) ще получим първоначалната квадратична форма.

Доказателство:

Нека след прилагането на (2) към $\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ означим новополучената квадратична форма с $\tilde{\tilde{f}}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Понеже матрицата на (2) е T^{-1}, квадратичната форма $\tilde{\tilde{f}}$ има матрица

$$(T^{-1})'(T'AT)T^{-1} = ((T^{-1})'T')A(TT^{-1}) = (TT^{-1})'A(TT^{-1}) = A.$$

Следователно $\tilde{\tilde{f}} = f$.

Забележка. *Нека y_1^0, y_2^0, $\ldots$, y_n^0 са пресметнати от (2) при $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$. От Следствие 3 става ясно, че*

$$\tilde{f}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0) = f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

От последното равенство следва, че ако искаме да пресметнем $f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, освен с непосредствено заместване, можем най-напред да пресметнем y_1^0, y_2^0, $\ldots$, y_n^0 от (2) и тогава $\tilde{f}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$.

Каноничен вид на квадратичната форма

Нека е дадена линейната трансформация

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad T = (\tau_{ij}) \tag{1}$$

Определение. *Казваме, че линейната трансформация (1) привежда квадратичната форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в каноничен вид, ако (1) е обратима и след прилагането ѝ към $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ получаваме квадратична форма от вида*

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \tag{2}$$

Квадратичната форма (2) се нарича *каноничен вид* на $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Теорема 2. *Всяка квадратична форма може да се приведе в каноничен вид, даже с ортогонална трансформация.*

Доказателство:

Нека

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

където A е матрица на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Понеже матрицата A е симетрична от следствието на Теорема 2 за симетричните оператори имаме, че съществува ортогонална матрица T такава, че

$$(*) \qquad T'AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Разглеждаме ортогоналната трансформация

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

където T е взета от равенство (*).

Съгласно Теорема 1, след като приложим тази линейна трансформация към f, ще получим квадратичната форма

$$\tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_1 \ y_2 \dots y_n)\,(T'AT) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$(y_1 \ y_2 \dots y_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Твърдение. *Броят на ненулевите коефициенти във всеки каноничен вид на дадена квадратична форма е равен на ранга на квадратичната форма.*

Доказателство:

Нека

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

където T е обратима матрица и нека след прилагането на тази линейна трансформация получаваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Съгласно **Следствие 1** $\mathrm{rg}\,(f) = \mathrm{rg}\,(\tilde{f})$. Понеже

$$\mathrm{rg}\,(\tilde{f}) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} =$$

$$= \text{ броя на ненулевите числа } \lambda_i, i = 1, \dots, n,$$

става ясно, че броят на ненулевите коефициенти λ_i в каноничния вид на $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е равен на $\mathrm{rg}\,(f)$.