ЛЕКЦИЯ 6
ЗАКОН ЗА ИНЕРЦИЯТА

Определение. *Броят на положителните коефициенти в каноничния вид на дадена квадратична форма се нарича положителен индекс на инерцията на тази квадратична форма. Броят на отрицателните коефициенти се нарича отрицателен индекс на инерцията.*

Съгласно Твърдението доказано по-горе е вярно равенството:

$$\textit{положителен индекс} + \textit{отрицателен индекс} = \operatorname{rg}(f) \qquad (*)$$

Теорема (закон за инерцията).
В различните канонични видове на дадена квадратична форма броят на положителните коефициенти е един и същ. Същото е вярно и за броя на отрицателните коефициенти.

Доказателство:

От (*) следва, че е достатъчно да докажем твърдението само за положителните коефициенти.

Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е произволна квадратична форма и линейната трансформация

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \cdots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \cdots + \alpha_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \cdots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (1)$$

привежда квадратичната форма f в каноничен вид:

$$(\#) \qquad \begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{(1)}{\rightarrow} \tilde{f}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_k y_k^2 - \lambda_{k+1} y_{k+1}^2 - \cdots - \lambda_r y_r^2 \end{gathered},$$

където $r = \mathrm{rg}\,(f)$ и $\lambda_i > 0$, k е броят на положителните коефициенти в $(\#)$.

Нека обратната линейна трансформация на (1) е

$$\begin{array}{l} y_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n \\ y_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \beta_{n1}x_1 + \beta_{n2}x_2 + \cdots + \beta_{nn}x_n \end{array} . \tag{2}$$

Разглеждаме линейната трансформация

$$\begin{array}{l} x_1 = c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + \cdots + c_{1n}z_n \\ x_2 = c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + \cdots + c_{2n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = c_{n1}z_1 + c_{n2}z_2 + \cdots + c_{nn}z_n \end{array} , \tag{3}$$

която също привежда квадратичната форма f в каноничен вид:

$$(\#\#) \qquad \begin{array}{c} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{(3)}{\to} \tilde{\tilde{f}}(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ \mu_1 z_1^2 + \mu_2 z_2^2 + \cdots + \mu_s z_s^2 - \mu_{s+1} z_{s+1}^2 - \cdots - \mu_r z_r^2 \end{array} ,$$

където $\mu_i > 0$ и $r = \mathrm{rg}\,(f)$, s е броят на положителните коефициенти в $(\#\#)$.

Да разгледаме и обратната линейна трансформация на (3)

$$\begin{array}{l} z_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n \\ z_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots + d_{nn}x_n \end{array} \tag{4}$$

Трябва да докажем, че $k = s$. Допускаме, че това не е така и нека например $k < s$. Разглеждаме равенствата:

$$y_1 = 0, \ldots, y_k = 0 \text{ и } z_{s+1} = 0, \ldots, z_n = 0.$$

Заместваме в левите части на тези равенства техните равни от (2) и (4). По този начин получаваме хомогенна линейна система на променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Понеже $k < s$ броят на уравненията в тази система е по-малък от n. Следователно тази хомогенна система има ненулево решение $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, т. е. някое $x_i^0 \neq 0$. Числата $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ са избрани така,че като ги заместим в (2) получаваме

$$y_1^0 = 0, \ldots, y_k^0 = 0, y_{k+1}^0, \ldots, y_n^0.$$

Изчисляваме $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чрез (#) и получаваме

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \tilde{f}(0, \dots, 0, y_{k+1}^0, \dots, y_n^0) = -\lambda_{k+1}(y_{k+1}^0)^2 - \dots - \lambda_r(y_r^0)^2.$$

От последното равенство следва

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \leq 0, \text{ защото } \lambda_i > 0. \tag{5}$$

Числата x_1^0, x_2^0, …, x_n^0 са избрани така, че като ги заместим в (4), получаваме z_1^0, z_2^0, …, z_s^0, $z_{s+1}^0 = 0$, …, $z_n^0 = 0$. Изчисляваме $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чрез (##) и получаваме

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \tilde{\tilde{f}}(z_1^0, z_2^0, \dots, z_s^0, 0, \dots, 0) = \mu_1(z_1^0)^2 + \dots + \mu_s(z_s^0)^2.$$

От последното равенство и от (5) следва, че $\mu_1(z_1^0)^2 + \dots + \mu_s(z_s^0)^2 \leq 0$. Понеже $\mu_i > 0$,то $z_1^0 = \dots = z_s^0 = 0$. Освен това $z_{s+1}^0 = 0$, …, $z_n^0 = 0$. Като заместим $z_1^0 = \dots = z_n^0 = 0$ в (3) ще получим, че $x_1^0 = \dots = x_n^0 = 0$. Това е противоречие, защото x_1^0, x_2^0, …, x_n^0 е ненулево решение на получената по-горе хомогенна система. Полученото противоречие доказва, че $k = s$.

Положително дефинитни квадратични форми

Определение. *Казваме, че квадратичната форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е положително дефинитна, ако $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ за всяко $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, само когато $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.*

Теорема. *Квадратичната форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е положително дефинитна, тогава и само тогава, когато положителният индекс на инерцията е равен на броя на променливите, т. е. когато в каноничния вид на тази квадратична форма всичките n коефициенти са положителни.*

Доказателство:

Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ е квадратична форма и линейната трансформация

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n \end{aligned} \tag{1}$$

привежда тази квадратична форма в каноничен вид:

(*) $\quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \tilde{f}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$

Да разгледаме и обратната линейна трансформация

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \cdots + \beta_{1n}x_n \\ y_2 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \cdots + \beta_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= \beta_{n1}x_1 + \beta_{n2}x_2 + \cdots + \beta_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2}$$

I. Да предположим, че в (*) имаме $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Нека x_1^0, $x_2^0, \dots, x_n^0$ са произволни числа и y_1^0, $y_2^0, \dots, y_n^0$ се получават от (2) при $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$. От (*) получаваме, че

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \tilde{f}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) = \lambda_1(y_1^0)^2 + \lambda_2(y_2^0)^2 + \cdots + \lambda_n(y_n^0)^2,$$

Понеже $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$, то $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$. Нека $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0$. От

$$\tilde{f}(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

имаме

$$\lambda_1(y_1^0)^2 + \lambda_2(y_2^0)^2 + \cdots + \lambda_n(y_n^0)^2 = 0.$$

Следователно $y_1^0 = y_2^0 = \cdots = y_n^0 = 0$, защото $\lambda_i > 0$. Заместваме в (1) и получаваме $x_1^0 = x_2^0 = \cdots = x_n^0 = 0$. Следователно f е положително дефинитна.

II. Нека в (*) някое $\lambda_i \leq 0$. Разглеждаме $y_1^0 = 0, \dots, y_i^0 = 1, \dots, y_n^0 = 0$. Заместваме в (1) и получаваме $x_1^0 = \alpha_{1i}, \dots, x_n^0 = \alpha_{ni}$. Тъй като линейната трансформация (1) е обратима, то стълбовете на матрицата на тази линейна трансформация не са нулеви. Следователно $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \neq (0, 0, \dots, 0)$. От (*) имаме

$$f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \tilde{f}(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \lambda_i \leq 0.$$

Получихме, че квадратичната форма f приема неположителна стойност за ненулеви стойности на променливите, което означава, че тя не е положително дефинитна.

Критерий на Силвестър (без доказателство)

Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е квадратична форма с матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Разглеждаме

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \Delta_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{3n} \end{pmatrix}\ \textit{и т. н. } \Delta_n = \det A$$

Квадратичната форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е положително дефинитна, тогава и само тогава, когато* $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$,..., $\Delta_n > 0$.

Определение. *Квадратичната форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *се нарича отрицателно дефинитна, ако* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$, *за всяко* $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ *и* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ *само когато* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Ясно е, че

f *е отрицателно дефинитна* $\Leftrightarrow -f$ *е положително дефинитна.*

Поради това изучаването на отрицателно дефинитните форми е еквивалентно на изучаването на положително дефинитните форми.

Накрая на тази лекция ще се върнем отново към дефинирането на скаларно произведение в дадено линейно пространство над $\mathbb{R}$.

Нека L е линейно пространство над $\mathbb{R}$, $\dim L = n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е базис на L. Нека A е матрицата на положително дефинитната квадратична форма f. Разглеждаме

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$$
$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_n e_n$$

и дефинираме

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_n)\, A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Както отбелязахме в Лекция 1 първите три аксиоми на скаларно произведение са изпълнени за произволна симетрична матрица A. При сегашния избор на матрицата A ще докажем, че е изпълнена и четвъртата аксиома. Наистина

$$(x, x) = (\xi_1 \ \xi_2 \ldots \xi_n)\, A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = f\,(\xi_1 \ \xi_2 \ldots \xi_n)\,.$$

Понеже f е положително дефинитна, от тези равенства виждаме, че $(x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0$ тогава и само тогава, когато $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = 0$, т. е. когато $x = 0$.