ЛЕКЦИЯ 17
ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА. СЛЕДСТВИЯ.

Основна теорема на алгебрата(Теорема на Даламбер). *Всеки неконстантен полином $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ има комплексен корен.*

Ще са ни необходими следните две леми.

Лема 1. *Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и* ст. $f(x)$ *е нечетно число. Тогава $f(x)$ има реален корен.*

Доказателство:

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, ст. $f(x) = n$, n — нечетно число. Разглеждаме унитарния полином

$$h(x) = \frac{1}{a_n}f(x) = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}x + \cdots + x^n\right).$$

Ясно е, че $f(x)$ има реален корен тогава и само тогава, когато $h(x)$ има реален корен. Поради това достатъчно е да докажем, че $h(x)$ има реален корен. Тъй като ст. $(h(x))$ е нечетна имаме

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)) = -\infty \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(h(x)) = +\infty.$$

Следователно съществува $x_1 \in \mathbb{R}$ такова, че $h(x_1) < 0$ и съществува $x_2 \in \mathbb{R}$ такова, че $h(x_2) > 0$. Тъй като $h(x)$ е непрекъсната функция, съществува $x_0 \in [x_1, x_2]$, такова че $h(x_0) = 0$, т. е. x_0 е корен на $h(x)$.

Лема 2. *Нека $ax^2+bx+c \in \mathbb{C}[x]$, $a \neq 0$. Тогава ax^2+bx+c има комплексен корен.*

Доказателство:

Ако $f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$, тогава корените на $f(x)$ се получават от формулите

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

Знаем, че за всяко $\alpha \in \mathbb{C}$ и всяко естествено число n съществува $\beta \in \mathbb{C}$, такова че $\beta^n = \alpha$. Понеже a, b, $c \in \mathbb{C}$, $b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$. Нека $z \in \mathbb{C}$ и $z^2 = b^2 - 4ac$. Тогава комплексните числа

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm z}{2a}. \tag{2}$$

са корени на $ax^2 + bx + c$. Наистина

$$a\left(\frac{-b \pm z}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b \pm z}{2a}\right) + c = \frac{z^2 \mp 2bz + b^2 - 2b^2 \pm 2bz + 4ac}{4a} = 0.$$

С това лема 2 е доказана.

Забележка. *Ако $b^2 - 4ac \neq 0$, формулите (2) дават два различни комплексни корена на ax^2+bx+c. Ако $b^2 - 4ac = 0$, тогава от (2) получаваме $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Като използваме, че в тази ситуация $c = \dfrac{b^2}{4a}$ получаваме*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Следователно, когато $b^2 - 4ac = 0$, $x = -\dfrac{b}{2a}$ е двукратен комплексен корен на $ax^2 + bx + c$. Тъй като $ax^2 + bx + c$ не може да има повече от два различни комплексни корена или повече от един двукратен комплексен корен, с тези разсъждения доказахме, че освен получените от (2) комплексни корени, $ax^2 + bx + c$ няма други комплексни корени.

Лема 3. *Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$ и $\overline{f}(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \cdots + \overline{a}_nx^n \in \mathbb{C}[x]$, където $\overline{a_i}$ е комплексно спрегнатото число на a_i.*

а) Ако $\alpha \in \mathbb{C}$ е корен на единия от полиномите $f(x)$, $\overline{f}(x)$, тогава $\overline{\alpha}$ е корен на другия;

б) Ако $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ е корен на $f(x)$, тогава $\overline{\alpha}$ също е корен на $f(x)$.

Доказателство:

Нека $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n = 0$. Понеже $\overline{f}(\overline{\alpha}) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\overline{\alpha} + \cdots + \overline{a}_n(\overline{\alpha})^n$ и $f(\alpha)$ са комплексно спрегнати, следва че $\overline{f}(\overline{\alpha}) = 0$. Ако $\overline{f}(\alpha) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\alpha + \cdots + \overline{a}_n\alpha^n = 0$, понеже $f(\overline{\alpha}) = a_0 + a_1\overline{\alpha} + \cdots + a_n\overline{\alpha}^n$

и $\overline{f}(\alpha)$ са комплексно спрегнати числа, следва че $f(\overline{\alpha}) = 0$. С това а) е доказано.

Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. В тази ситуация $\overline{f}(x) = f(x)$ и поради това б) следва от а).

Преди доказателството на теоремата на Даламбер ще докажем следното по-слабо твърдение:

Теорема 1. *Нека $f(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти. Тогава $f(x)$ има комплексен корен.*

Доказателство:

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, $a_n \neq 0$ и ст. $f(x) = n$.

Нека $n = 2^s.k$, k — нечетно число.

Доказателството ще извършим по индукция относно s.

База $s = 0$. В тази ситуация n е нечетно число и от Лема 1 следва, че $f(x)$ има даже реален корен.

Нека $s \geq 1$. Разглеждаме разширение E на полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ над което $f(x)$ се разлага на линейни множители, т. е.

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n),$$

където $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in E$ и са корени на $f(x)$ в E. Трябва да докажем, че някое $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

Разглеждаме

$$H(x; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \big(x - (x_i + x_j + cx_ix_j)\big) \qquad \left(\binom{n}{2} \text{ множителя}\right),$$

където c е произволно реално число и x, x_1, x_2, $\dots$, x_n са променливи. След като развием дясната част и направим съответните опростявания ще получим полином на променливата x, коефициентите на който са от пръстена на полиномите $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Нека разменим местата на x_i и x_j. При това разместване имаме

$$\begin{gathered} x_i + x_j + cx_ix_j \leftrightarrow x_j + x_i + cx_jx_i \\ x_i + x_k + cx_ix_k \leftrightarrow x_j + x_k + cx_jx_k, \quad k \neq j \end{gathered}$$

Множителите на $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$, в които не участват x_i и x_j не се променят. Следователно при разместване местата на две от променливите x_1, x_2, $\dots$, x_n, множителите на $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$ се разместват, но тяхното произведение не се променя. Следователно при всяко разместване на променливите x_1, x_2, $\dots$, x_n, $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$ не се променя, т. е. коефициентите на $H(x; x_1, x_2, \dots, x_n)$ не се променят. Това означава, че коефициентите пред степените на x са симетрични полиноми от пръстена $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Съгласно основното следствите на теоремата за симетрични полиноми, коефициентите на $h(x) = H(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ще бъдат реални числа, т. е.

$$(*) \qquad h(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} \big(x - (\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j)\big) \in \mathbb{R}[x]$$

Имаме

$$\text{ст.}\, h(x) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^s k(2^s k - 1)}{2} = 2^{s-1}k(2^s k - 1) = 2^{s-1}k',$$

където k' е нечетно число.

И така $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ и ст. $h(x) = 2^{s-1}k'$, където k' е нечетно число. Съгласно индуктивната хипотеза $h(x)$ има комплексен корен $\beta \in \mathbb{C}$. Заместваме в (*) и получаваме

$$h(\beta) = \prod_{1 \le i < j \le n} \big(\beta - (\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j)\big) = 0.$$

Тъй като в E няма делители на нулата, имаме $\beta = \alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j$ за някои индекси i и j. И така за всяко реално число $c \in \mathbb{R}$ съществуват индекси i и j, такива че $\alpha_i + \alpha_j + c\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}$. Понеже двойките индекси (i, j), където $1 \le i \le n$ и $1 \le j \le n$, са краен брой, а реалните числа са безброй много, съществуват реални числа $c_1 \ne c_2$, за които при едни и същи индекси i и j имаме:

$$\begin{aligned} \alpha_i + \alpha_j + c_1\alpha_i\alpha_j &= z_1 \in \mathbb{C} \\ \alpha_i + \alpha_j + c_2\alpha_i\alpha_j &= z_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

като извадим тези равенства получаваме

$$(c_1 - c_2)\alpha_i\alpha_j = z_1 - z_2 \in \mathbb{C}, \quad c_1 \ne c_2$$

и

$$\alpha_i\alpha_j = q = \frac{z_1 - z_2}{c_1 - c_2} \in \mathbb{C}.$$

Поради това $\alpha_i + \alpha_j = p = z_1 - c_1\alpha_i\alpha_j \in \mathbb{C}$.

Разглеждаме

$$(**) \qquad \begin{aligned} t(x) = (x - \alpha_i)(x - \alpha_j) &= x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = \\ &= x^2 - px + q \in \mathbb{C}[x] \end{aligned}$$

От Лема 2 имаме, че $t(x)$ има комплексен корен γ. Заместваме в (**) и получаваме

$$t(\gamma) = (\gamma - \alpha_i)(\gamma - \alpha_j) = 0$$

Тъй като в E няма делители на нулата имаме, че $\gamma = \alpha_i$ или $\gamma = \alpha_j$. Следователно α_i или α_j е комплексно число. Теорема 1 е доказана.

Доказателство на Теоремата на Даламбер:

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Разглеждаме полинома

$$\overline{f}(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \cdots + \overline{a}_nx^n,$$

където $\overline{a}_i$ е комплексно спрегнатото число на a_i. Разглеждаме също

$$h(x) = f(x).\overline{f}(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{2n}x^{2n}.$$

Тъй като $b_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i\overline{a}_j$, имаме $\overline{b}_k = \sum\limits_{i+j=k} \overline{a}_ia_j$. Следователно $b_k = \overline{b}_k$ за всяко $k = 0, 1, \ldots, 2n$, т. е. $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. От Теорема 1 имаме, че $h(x)$ има комплексен корен $\alpha \in \mathbb{C}$. Следователно

$$h(\alpha) = f(\alpha).\overline{f}(\alpha) = 0.$$

Тъй като в полето няма делители на нулата, или $f(\alpha) = 0$, или $\overline{f}(\alpha) = 0$.

Ако $f(\alpha) = 0$, тогава $f(x)$ има комплексен корен α и теоремата е доказана.

Нека $\overline{f}(\alpha) = 0$. Съгласно Лема 3 комплексното число $\overline{\alpha}$ е корен на $f(x)$.

Следствие 1. *Над полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ неразложими са само полиномите от първа степен.*

Доказателство:

Трябва да се докаже, че за всеки полином от степен по-голяма или равна на две е разложим над $\mathbb{C}$. Нека $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и ст. $f(x) \geq 2$. Съгласно Теоремата на Даламбер $f(x)$ има корен $\alpha \in \mathbb{C}$. Следователно $f(x) = (x - \alpha)g(x)$ и $(x - \alpha)$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$. От ст. $f(x) \geq 2$ следва, че ст. $g(x) \geq 1$. Следователно $f(x)$ е разложим над полето на комплексните числа.

Следствие 2. *Всеки неконстантен полином от $\mathbb{C}[x]$ се разлага на линейни множители над $\mathbb{C}$.*

Доказателство:

Съгласно Следствие 1 в каноничното разлагане на всеки неконстантен полином ще участват само полиноми от първа степен, което представлява желаното разлагане.

Определение. *Казваме, че полето F е алгебрично затворено, ако всеки неконстантен полином от $F[x]$ се разлага на линейни множители над F.*

От Следствие 2 става ясно, че полето на комплексните числа е алгебрично затворено. Ясно е, че $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}$ не са алгебрически затворени (защото например x^2+1 не е разложим над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{Q}$).

Следствие 3. *Над полето на реалните числа неразложими са полиномите от първа степен и тези полиноми над $\mathbb{R}$ от втора степен, които нямат реални корени. Други неразложими полиноми в $\mathbb{R}[x]$ няма.*

Доказателство:

Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, ст. $f(x) \geq 2$ и $f(x)$ е неразложим над $\mathbb{R}$. Тогава както доказахме в Твърдение 5 на лекцията за неразложими полиноми, $f(x)$ няма реални корени. От теоремата на Даламбер следва, че $f(x)$ има комплексен корен α, който не е реален, т. е. $\alpha \neq \overline{\alpha}$. Съгласно Лема 3 (б), $\overline{\alpha}$ също е корен на $f(x)$. Следователно в каноничното разлагане на $f(x)$ ще участват $(x-\alpha)$ и $(x-\overline{\alpha})$, т. е.

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})g(x)$$
$$f(x) = (x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha.\overline{\alpha})g(x)$$

Тъй като $(x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha.\overline{\alpha}) \in \mathbb{R}[x]$ следва, че $g(x) \in \mathbb{R}[x]$. Понеже $f(x)$ е неразложим над $\mathbb{R}$, следва, че $g(x) = \mathrm{const}$ и ст. $f(x) = 2$.

С тези разсъждения доказахме, че неразложимите и нелинейни полиноми над $\mathbb{R}$ са квадратни тричлени с реални коефициенти. Съгласно Твърдение 6 от втората част на Лекция 12 неразложими над $\mathbb{R}$ са тези и само тези квадратни тричлени, които нямат реални корени, с което Следствие 3 е доказано.

Следствие 4. *Всеки неконстантен полином $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ може да се разложи по следния начин:*

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\dots(x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t},$$

където $\alpha_i \in \mathbb{R}$ и $x^2+p_jx+q_j \in \mathbb{R}[x]$ и нямат реални корени.

Доказателство:

От Следствие 3 в каноничното разлагане на $f(x)$ над $\mathbb{R}$ ще участват линейни множители и квадратни тричлени, които нямат реални корени.

Следствие 5. *Ако един неконстантен полином с реални коефициенти няма реални корени, тогава той се разлага в произведение на квадратни тричлени с реални коефициенти, които нямат реални корени. В тази ситуация полиномът има четна степен.*

Следствие 6. *Характеристичният полином на реална симетрична матрица се разлага над $\mathbb{R}$ на линейни множители*

Доказателство:

От лекцията за симетрични оператори знаем, че комплексните корени на симетричните матрици са реални. Поради това линейните множители в разлагането от Следствие 2 са с реални коефициенти.