# *ЛЕКЦИЯ 19*
# БИНАРНИ ОПЕРАЦИИ. ПОЛУГРУПИ. НЕЗАВИСИМОСТ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕТО ОТ СКОБИТЕ.

**Определение.** *Нека $X$ е множество, $X \neq \emptyset$. Казваме, че в $X$ е дефинирана бинарна операция, ако на всяка наредена двойка елементи от $X$ е съпоставен еднозначно определен елемент от $X$, т. е. бинарната операция е изображение на Декартовия квадрат на множеството $X$ в множеството $X$.*

Ако $x$, $y \in X$ и резултатът от прилагането на бинарната операция за елементите $x$ и $y$ е означен с $x+y$, казваме, че бинарната операция е *адитивна*.

$x + y$ се нарича сума на $x$ и $y$

Ако резултатът от прилагането на бинарната операция за елементите $x$ и $y$ е означен с $x.y$, казваме, че бинараната операция е *мултипликативна*.

$x.y$ се нарича произведение на $x$ и $y$

Във всеки пръстен са зададени две операции, едната адитивна, а другата мултипликативна. Във всяко линейно пространство е дефинирана само една адитивна бинарна операция. Другата операция не е бинарна.

Нека в множеството $X$ е дефинирана бинарна операция. Казваме, че тази операция е *комутативна*, ако

$$xy = yx \qquad (x + y = y + x), \quad \forall x, y \in X.$$

Тази операция се нарича *асоциативна*, ако

$$(xy)z = x(yz) \qquad \big((x + y) + z = x + (y + z)\big), \quad \forall x, y \in X$$

Комутативността и асоциативността са независими свойства, в смисъл, че едното не следва от другото.

**Примери.**

1) Умножението на квадратни матрици е асоциативно, но не е комутативно.

2) В $\mathbb{Z}$ дефинираме нова операция:

$$m * n = -(m + n), \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Пресмятаме

$$\begin{aligned}(1 * 2) * 3 &= (-3) * 3 = 0\\ 1 * (2 * 3) &= 1 * (-5) = 4\end{aligned}$$

Виждаме, че тази операция не е асоциативна Обаче очевидно тази операция е комутативна.

3) Векторното произведение не е нито комутативно, нито асоциотивна операция.

**Определение.** *Нека $\Gamma$ е множество, $\Gamma \neq \emptyset$, в което е дефинирана бинарна операция. Казваме, че относно тази операция $\Gamma$ е полугрупа, ако тази операция е асоциативна.*

При квадратните матрици от даден ред и двете операции са асоциативни, което означава, че квадратните матрици от даден ред относно двете операции са полугрупи. Всъщност това е вярно за всеки пръстен.

# Полугрупа на изображенията на дадено множество в себе си

Нека $\Omega$ е множество, $\Omega \neq \emptyset$. С $M(\Omega)$ означаваме множеството на всичките изображения на $\Omega$ в $\Omega$, т. е.

$$M(\Omega) = \{\varphi \mid \Omega \xrightarrow{\varphi} \Omega\}.$$

Нека $\varphi$, $\psi \in M(\Omega)$, тогава произведението $\varphi\psi$ е изображение, което се дефинира по следния начин:

$$\varphi\psi(\alpha) = \varphi(\psi(\alpha)) \text{ за всяко } \alpha \in \Omega$$

$\varphi\psi$ се нарича произведение на $\varphi$ и $\psi$. Ясно е че $\varphi\psi \in M(\Omega)$. Поради това произведението на изображения е бинарна операция в $M(\Omega)$.

**Твърдение.** *Относно въведената операция, $M(\Omega)$ е полугрупа.*

***Доказателство:***

Трябва да проверим, че операцията е асоциативна.

Нека $\alpha \in \Omega$ и $\eta$, $\varphi$, $\psi \in M(\Omega)$ и

$$(\#) \qquad \alpha \xrightarrow{\psi} \alpha' \xrightarrow{\varphi} \alpha'' \xrightarrow{\eta} \alpha'''$$

От $(\#)$ следва

$$[(\eta\varphi)\psi]\alpha = \eta\varphi(\psi(\alpha)) \overset{(\#)}{=} \eta\varphi(\alpha') = \eta(\varphi(\alpha')) \overset{(\#)}{=} \eta(\alpha'') \overset{(\#)}{=} \alpha'''$$

и

$$[\eta(\varphi\psi)](\alpha) = \eta(\varphi\psi(\alpha)) = \eta(\varphi(\psi(\alpha))) \overset{(\#)}{=} \eta(\varphi(\alpha')) \overset{(\#)}{=} \eta(\alpha'') \overset{(\#)}{=} \alpha'''$$

следователно $(\eta\varphi)\psi(\alpha) = \eta(\varphi\psi)(\alpha)$, за всяко $\alpha \in \Omega$, т. е. $(\eta\varphi)\psi = \eta(\varphi\psi)$.

Нека в множеството $X$ е дефинирана мултипликативна бинарна операция и $a$, $b$, $c$, $d \in X$. Произведението на тези четири елемента може да се пресметне според скобите по следните пет начина:

$$\big((ab)c\big)d; \quad a\big(b(cd)\big); \quad \big(a(bc)\big)d; \quad a\big((bc)d\big); \quad (ab)(cd).$$

При някои бинарни операции всичките тези пет произведения са различни. Поради това произведението $abcd$ няма еднозначен смисъл. Ако операцията е асоциативна, обаче тези пет произведения са равни. Поради това означението $abcd$ е коректно. Всъщност вярно е следното по-общо твърдение.

**Теорема.** *Във всяка полугрупа произведението (сумата) на краен брой елементи не зависи от начина, по който са поставени скобите.*

***Доказателство:***

Доказателството ще направим за мултипликативна операция (за адитивна е същото).

Нека $\Gamma$ е полугрупа и $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \Gamma$.

Дефинираме $[x_1] = x_1$, $[x_1x_2] = x_1x_2$; $[x_1x_2x_3] = (x_1x_2)x_3$ и т. н.

$$[x_1x_2\ldots x_n] = \Big(\ldots\big((x_1x_2)x_3\big)\ldots x_{n-1}\Big)x_n.$$

Ясно е, че

$$[x_1x_2\ldots x_n] = [x_1x_2\ldots x_{n-1}]x_n, \quad n \geq 2. \tag{*}$$

Достатъчно е да докажем, че:

(#) $\quad$ *<u>За произволни $x_1,\ x_2,\ \ldots x_n \in \Gamma$, $n \geq 2$ всяко произведение</u>*

*<u>на $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ е равно на $[x_1x_2\ldots x_n]$.</u>*

Ще докажем (#) по индукция относно $n$. При $n = 2$ (#) е очевидно, а при $n = 3$ следва от асоциативния закон. Това е базата на индукцията.

Нека $n \geq 4$. Ще предполагаме, че за по-малко от $n$ множителя (#) е вярно. С $\{x_1x_2\ldots x_n\}$ означаваме произведението на $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, в което скобите са поставени по някакъв начин.

Трябва да докажем,че $\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_n]$.

Тъй като операцията е бинарна, на всеки етап се умножават два елемента. Следователно при окончателното пресмятане на произведението също се умножават два елемента.

Поради това

$$\{x_1x_2\ldots x_n\} = AB,$$

където $A$ е произведението на $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k$, $1 \leq k \leq n-1$, което е пресметнато според скобите в $\{x_1x_2\ldots x_n\}$, а $B$ е произведението на $x_{k+1}$, $x_{k+2},\ \ldots,\ x_n$, което е пресметнато според скобите в $\{x_1x_2\ldots x_n\}$. Ако $k \geq 2$, съгласно индуктивната хипотеза $A = [x_1x_2\ldots x_k]$. При $k = 1$ това равенство е вярно по дефиниция. По същите съображения имаме $B = [x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n]$. Следователно

$$\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_k]\,[x_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n] \tag{**}$$

Ако $k = n-1$, понеже $[x_n] = x_n$, от (**) имаме, че $\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_{n-1}]x_n$ и от (*) получаваме

$$\{x_1x_2\ldots x_n\} = [x_1x_2\ldots x_n]$$

Нека $k < n-1$. Съгласно (*) е изпълнено равенството

$$[x_{k+1}\dots x_n] = [x_{k+1}\dots x_{n-1}]x_n$$

поради това, от (**) и асоциативния закон, имаме

$$\{x_1x_2\dots x_n\} = [x_1x_2\dots x_k]\big([x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{n-1}]x_n\big) = \big([x_1x_2\dots x_k]\,[x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{n-1}]\big)x_n.$$

Съгласно индуктивната хипотеза

$$[x_1x_2\dots x_k]\,[x_{k+1}x_{k+2}\dots x_{n-1}] = [x_1x_2\dots x_{n-1}]$$

Следователно

$$\{x_1x_2\dots x_n\} = [x_1x_2\dots x_{n-1}]x_n \overset{(*)}{=} [x_1x_2\dots x_n]$$

Теоремата е доказана.