ЛЕКЦИЯ 24
НОРМАЛНИ ПОДГРУПИ

Определение. *Нека G е група и $t,\ h \in G$. Казваме, че елементът t е спрегнат с h, ако съществува елемент $g \in G$ такъв, че $t = g^{-1}hg$.*

Твърдение 1. *Ако t е спрегнат с h, тогава h също е спрегнат с t, т. е. спрегнатостта е симетрична.*

Доказателство:
Имаме, че $t = g^{-1}hg$, от където $h = gtg^{-1} = (g^{-1})^{-1}tg^{-1}$. Следователно h е спрегнат с t.

Определение. *Нека G е група и H е подгрупа. Казваме, че H е нормална подгрупа на G, ако от това, че $h \in H$ следва, че всеки спрегнат с h елемент също принадлежи на H, т. е. за всеки елемент $h \in H$ и всеки елемент $g \in G$ елементът $g^{-1}hg \in H$. Ако H е нормална подгрупа пишем: $H \lhd G$.*

Примери.

1. Несобствените подгрупи са нормални подгрупи.

2. В Абелевите групи всяка подгрупа е нормална, защото $g^{-1}hg = g^{-1}gh = h$. Има и неабелеви групи, в които всяка подгрупа е нормална.

3. $\mathrm{GL}_n(F) \rhd \mathrm{SL}_n(F)$, защото ако $A \in \mathrm{SL}_n(F)$, т. е. $\det A = 1$ имаме

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(B^{-1})\det(B) = 1,$$

   т.е. $B^{-1}AB \in \mathrm{SL}_n(F)$ за всяко $B \in \mathrm{GL}_n(F)$ и за всяко $A \in \mathrm{SL}_n(F)$.

4. В $\mathrm{GL}_n(F)$ обратимите диагонални матрици образуват подгрупа, която не е нормална (защо?).

5. В S_3, $H = \{e, (12)(3)\}$ е подгрупа, която не е нормална (защо?).

Твърдение 2. *Нека G е група и N е подгрупа на G. Тогава*

$$N \lhd G \Leftrightarrow g^{-1}Ng = N \text{ за всяко } g \in G.$$

Доказателство:

1) Нека $g^{-1}Ng = N$ за всяко $g \in G$.

Ако $h \in N$ и $g \in G$, тогава $g^{-1}hg \in g^{-1}Ng$. Понеже $g^{-1}Ng = N$ имаме $g^{-1}hg \in N$ за всяко $h \in N$ и всяко $g \in G$. Следователно $N \lhd G$.

2) Нека $N \lhd G$.

Трябва да проверим, че тази нормална група има свойството: $g^{-1}Ng = N$ за всяко $g \in G$.

Произведението $g^{-1}Ng$ се състои от елементи, които са спрегнати на елементи от N. Понеже N е нормална имаме $g^{-1}Ng \subseteq N$. За да докажем обратното включване разглеждаме $h \in N$. Нека $h_1 = ghg^{-1}$. Понеже $h_1 = (g^{-1})^{-1}hg^{-1}$, елементът h_1 е спрегнат на h. Поради това $h_1 \in N$. От $h_1 \in N$ и $h = g^{-1}h_1g$, имаме $h \in g^{-1}Ng$. По този начин доказахме, че $N \subseteq g^{-1}Ng$. Следователно $N \equiv g^{-1}Ng$ за всяко $g \in G$.

Твърдение 3. *Нека G е група и N е подгрупа на G. Тогава*

$$N \lhd G \Leftrightarrow gN = Ng \text{ за всяко } g \in G,$$

т. е. левите съседни класове по N съвпадат с десните съседни класове по N.

Доказателство:

Тъй като $g^{-1}Ng = N \Leftrightarrow gN = Ng$, твърдението следва от Твърдение 2.

Твърдение 4. *Нека G и G' са групи и изображението $G \xrightarrow{\varphi} G'$ е хомоморфизъм. Тогава* $\operatorname{Ker}\varphi \lhd G$.

Доказателство:

Това, че $\operatorname{Ker}(\varphi)$ е подгрупа го доказахме на миналата лекция.

Нека $h \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ и $g \in G$. Тогава $h \xrightarrow{\varphi} e'$. Ако $g \xrightarrow{\varphi} g'$, съгласно Свойство 2 на хомоморфизмите имаме $g^{-1} \xrightarrow{\varphi} (g')^{-1}$. Поради това

$$g^{-1}hg \xrightarrow{\varphi} (g')^{-1}e'g' = e'.$$

Следователно $g^{-1}hg \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, за всяко $h \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ и всяко $g \in G$. Следователно $\operatorname{Ker}(\varphi) \lhd G$.

Теорема 1. *Нека G е група и $N \lhd G$. С G/N означаваме множеството на всички съседни класове на G по N. Тогава G/N наследява операцията „умножение на подмножества в G" и относно тази наследена операция G/N е група. Тази група се нарича факторгрупа на G по нормалната подгрупа N.*

Доказателство:

Нека $a, b \in G$. Тогава като използваме $NN = N$ и че левите и десните съседни класове съвпадат получаваме

$$(aN)(bN) = a(Nb)N = a(bN)N = (ab)(NN) = abN$$

Доказахме, че

$$(aN)(bN) = abN. \tag{*}$$

Равенството (*) означава, че произведението на съседни класове по N също е съседен клас по N. Поради това G/N наследява операцията умножение на подмножества в G. От равенствата

$$\begin{array}{l} (aN)N = a(NN) = aN \\ N(aN) = (Na)N = (aN)N = a(NN) = aN \end{array}$$

следва, че $N \in G/N$ е неутрален елемент. От равенството (*) получаваме равенствата

$$\begin{array}{l} (a^{-1}N)(aN) = (a^{-1}a)N = eN = N \\ (aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = N \end{array}.$$

От последните равенства става ясно, че всеки съседен клас aN има обратен и той е $(aN)^{-1} = a^{-1}N$. Теорема 1 е доказана.

Забележка. *Ако групата G е адитивна и $N \lhd G$, тогава $G/N = \{a + N \mid a \in G\}$ и адитивният вариант на равенството (*) е*

$$(a + N) + (b + N) = (a + b) + N.$$

Теорема 2. *Нека G е група и $N \lhd G$. Тогава изображението $a \xrightarrow{\pi} aN$, което на всеки елемент съпоставя неговия съседен клас е епиморфизъм на G върху факторгрупата G/N. Този епиморфизъм се нарича естествен епиморфизъм на G върху G/N. Освен това* $\operatorname{Ker}(\pi) = N$.

Доказателство:

Нека $a, b \in G$. Тогава имаме

$$a \xrightarrow{\pi} aN, \ b \xrightarrow{\pi} bN \text{ и } ab \xrightarrow{\pi} abN.$$

Тъй като $abN = (aN)(bN)$, следва $ab \xrightarrow{\pi} (aN)(bN)$. С това доказахме, че π е хомоморфизъм. Ако aN е произволен съседен клас, тогава $a \xrightarrow{\pi} aN$. Следователно π е „върху“ и поради това е епиморфизъм.

Остава да докажем равенството $\operatorname{Ker}(\pi) = N$.

Нека $h \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Тогава $h \xrightarrow{\pi} N$. От друга страна $h \xrightarrow{\pi} hN$. Следователно $N = hN$. От свойствата на съседните класове (Твърдение 5) имаме $h \in N$.

С това доказахме, че $\operatorname{Ker}(\pi) \subseteq N$.

За да докажем обратното включване разглеждаме $h \in N$. Имаме $h \xrightarrow{\pi} hN = N$. Следователно $h \in \operatorname{Ker}(\pi)$. Доказахме, че $N \subseteq \operatorname{Ker}(\pi)$ и $N = \operatorname{Ker}(\pi)$.