СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

22 април 2018 г.

Тема №3.

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

Задача 1. Стойността на израза $\dfrac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ е от интервала:

А) $(-\infty, 12]$ ***Б)*** $(12, 14]$ ***В)*** $(14, 15]$ ***Г)*** $(15, 16]$

Задача 2. Стойността на израза $\dfrac{p^4-q^4}{(p+q)^2-2pq}\,(p-q)^{-1}$ при $p = 1{,}59$ и $q = 2{,}41$ е равна на:

А) $\dfrac{3}{4}$ ***Б)*** 4 ***В)*** $\dfrac{13}{3}$ ***Г)*** 8

Задача 3. Допустимите стойности на израза $\dfrac{y^2-3}{\sqrt{2-|y+1|}}$ са:

А) $y \in (-3, 1)$ ***Б)*** $y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ***В)*** $y \in (-1; 3)$ ***Г)*** $y \in (0, 2)$

Задача 4. Броят на целите решения на неравенството $x^2 - 4x \leq \dfrac{x+5}{2}$ е равен на :

А) 3 ***Б)*** 4 ***В)*** 5 ***Г)*** 6

Задача 5. Стойността на израза $\dfrac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \dfrac{1+\log_3 36}{\log_4 3}$ е равна на:

А) -2 ***Б)*** 1 ***В)*** 2 ***Г)*** 3

Задача 6. Броят на корените на уравнението $\big(|2x-5|+7\big)\sqrt{4x^2+9x+3} = 0$ е равен на:

А) 1 ***Б)*** 2 ***В)*** 3 ***Г)*** 4

Задача 7. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $1 - 4x + 3x^2 = 0$, то стойността на израза $A = x_1^3 + x_2^3$ е равна на :

А) $\dfrac{28}{27}$ ***Б)*** 24 ***В)*** $\dfrac{27}{28}$ ***Г)*** $\dfrac{26}{27}$

Задача 8. Стойността на израза $\sin^2\varphi - 2\cos\left(\varphi - \dfrac{3\pi}{2}\right) + \cos^2(\pi-\varphi)$ при $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ е равна на:

А) -3 ***Б)*** -2 ***В)*** 1 ***Г)*** 2

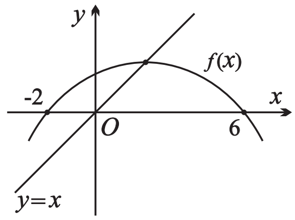
Задача 9. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ са взети съответно точките M и N, така че $AM : AC = BN : BC = 2 : 3$. Ако S е лицето на $\triangle MNC$, а T е лицето на четириъгълника $ABNM$, то отношението $S : T$ е равно на:

А) $2 : 3$ ***Б)*** $1 : 4$ ***В)*** $1 : 8$ ***Г)*** $4 : 9$

Задача 10. В триъгълник ABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ и BL е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$ $(L \in AC)$. Ако $BC = 4\sqrt{3}$ и $AC = 6$, то дължината на BL е равна на:

А) 3 ***Б)*** 4 ***В)*** $5\sqrt{3}$ ***Г)*** 6

Задача 11. На чертежа са изобразени графиката на квадратната функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ и на правата с уравнение $y = x$, като правата пресича графиката на f във върха на параболата. Коефициентът a е равен на:



А) $-\dfrac{1}{8}$ ***Б)*** -2 ***В)*** -3 ***Г)*** -8

Задача 12. Членовете в редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ са определени по правилото:

$$a_1 = 2018, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{5}, & \text{ако } a_n \text{ се дели на } 5, \\ a_n - 2, & \text{ако } a_n \text{ не се дели на } 5, \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Последният положителен член в редицата е:

А) a_8 ***Б)*** a_{10} ***В)*** a_{12} ***Г)*** a_{13}

Задача 13. За растящата аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е известно, че $a_1 + a_5 = 24$ и $a_1\, a_5 = 128$. Разликата на прогресията е равна на:

А) 2 ***Б)*** 3 ***В)*** 4 ***Г)*** 5

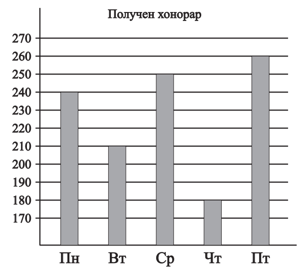
Задача 14. Ако $\operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ) = \dfrac{1}{2}$, то $\sin 2\alpha$ е равно на:

А) $\dfrac{2}{3}$ ***Б)*** $\dfrac{3}{5}$ ***В)*** $\dfrac{3}{2}$ ***Г)*** $\dfrac{5}{3}$

Задача 15. В кутия има бели и черни топки. Осем от черните топки са пребоядисани в бяло и върнати в кутията, при което вероятността да бъде изтеглена бяла топка се е увеличила 3 пъти, а вероятността да бъде изтеглена черна топка е намаляла 5 пъти. Общият брой на топките в кутията е равен на:

А) 14 ***Б)*** 18 ***В)*** 25 ***Г)*** 32

Задача 16. През седмицата програмист работил по задачи за различни фирми. На диаграмата са дадени получените от него хонорари в лева. Договореното заплащане на час за дните от понеделник до петък е било съответно 60 лв., 70 лв., 50 лв., 45 лв., 65 лв. Средното заплащане за час на програмиста за тази седмица е било:



А) *53 лв.* ***Б)*** *56 лв.* ***В)*** *57 лв.* ***Г)*** *59 лв.*

Задача 17. В $\triangle ABC$ е дадено $AB = 6$, $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ и $\sphericalangle ABC = 105^\circ$. Лицето на $\triangle ABC$ е равно на:

А) $3(2+\sqrt{3})$ ***Б)*** $9(3+\sqrt{2})$ ***В)*** $6(3-\sqrt{2})$ ***Г)*** $9(1+\sqrt{3})$

Задача 18. В $\triangle ABC$ е дадено $AB = 10$, $BC = 14$ и $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Дължината на височината през върха C в $\triangle ABC$ е равна на:

А) 7 ***Б)*** $6\sqrt{3}$ ***В)*** $8\sqrt{3}$ ***Г)*** 13

Задача 19. Даден е трапец, с дължини на основите 12 и 8. Около трапеца може да се опише окръжност и в трапеца може да се впише окръжност. Диаметърът на описаната около трапеца окръжност е равен на:

А) $9\sqrt{6}$ ***Б)*** $\dfrac{35}{\sqrt{6}}$ ***В)*** 10 ***Г)*** $\dfrac{20}{\sqrt{3}}$

Задача 20. Диагоналите на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ са $AC = 10$ и $BD = 8$. Нека точките M, N, P и Q са съответно средите на страните AB, CD, BC и AD. Ако $MN = PQ$, то лицето на четириъгълника $ABCD$ е:

А) 24 ***Б)*** 32 ***В)*** 36 ***Г)*** 40

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в листа за отговори!

Задача 21. Стойността на израза $A = \dfrac{9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{4-\sqrt{7}}}$ е равна на:

Задача 22. Решенията на уравнението $\sqrt{\dfrac{x}{x-1}} - 3 \cdot \sqrt{\dfrac{x-1}{x}} = 2$ са:

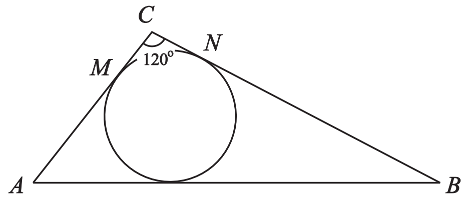
Задача 23. Разликата между сложната лихва и простата лихва, начислявани годишно върху начален капитал K лв. за период от 2 години при еднакъв годишен лихвен процент 8%, е 19,20 лв. Намерете началния капитал K.

Задача 24. Да се намерят числата x и y в растящата редица

$$25,\ 29,\ 31,\ 35,\ x,\ 43,\ 57, y,$$

така че средното аритметично да е равно на 40 и медианата да е равна на 36.

Задача 25. В $\triangle ABC$ е дадено $AB = 14$, $AC = 6$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до AC и BC в точките M и N. Лицето на $\triangle CMN$ е равно на:



Пълните решения на задачи 26., 27. и 28. запишете в свитъка за решения!

Задача 26. За геометричната прогресия a_1, a_2, a_3, a_4 е известно, че

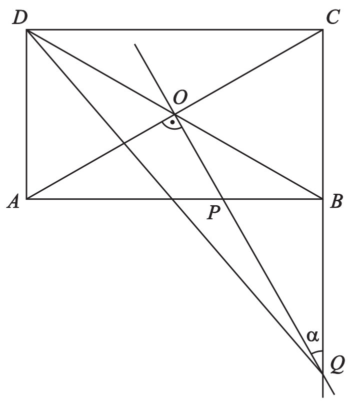
$$a_2 + a_3 = 3 \qquad \text{и} \qquad \frac{a_1 + a_4}{a_3 - a_1} = \frac{7}{2}.$$

Да се намерят членовете на тази прогресия.

Задача 27. а) Даден е правилен седмоъгълник. Да се намери броят на равнобедрените трапеци, върховете на които са върхове и на правилния седмоъгълник.

б) Да се намери броят на равнобедрените трапеци, върховете на които са върхове и на даден правилен 21-ъгълник.

Задача 28. Даден е правоъгълник $ABCD$. През пресечната точка O на диагоналите му е прекарана права, перпендикулярна на диагонала AC, пресичаща страната AB в точка P и продължението на страната BC в точка Q, като $OP = 3$, $OQ = 6$ и $\sphericalangle CQO = \alpha$. Намерете стойността на $\operatorname{tg} \alpha$ и дължината на отсечката QD.



Време за работа 4 часа.

Драги кандидат-студенти,
- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *означавайте ясно началото и края на решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително;*
- *решението на всяка от задачите от 26. до 28., включително, трябва да започва на нова страница;*
- *не смесвайте белова и чернова;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!