СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

31 март 2019 г.

Тема №1

Задача 1. Да се реши уравнението

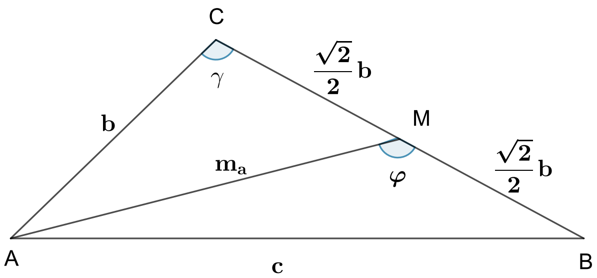
$$(x-1)|x-2| = x^2 - x - 6.$$

Решение: 1.) При $x < 2$, от $|x-2| = -x+2$ следва, че уравнението е еквивалентно на $(x-1)(-x+2) = x^2-x-6$ и последователно получаваме $-x^2+3x-2 = x^2-x-6$, $2x^2-4x-4 = 0$ и $x^2-2x-4 = 0$. Корени на последното са $x_1 = 1-\sqrt{3} < 2$ и $x_2 = 1+\sqrt{3} \geq 2$. Така решение на задачата е $x_1 = 1-\sqrt{3}$.

2.) При $x \geq 2$, от $|x-2| = x-2$ следва, че уравнението е еквивалентно на $(x-1)(x-2) = x^2-x-6$ и последователно получаваме $x^2-3x+2 = x^2-x-6$ и $-2x = -8$ с корен $x_3 = 4 \geq 2$, който е решение на задачата. Окончателно получаваме, че решения на задачата са $x = 1-\sqrt{3}$ и $x = 4$.

Задача 2. За $\triangle ABC$ е известно, че $BC = \sqrt{2}AC$, $\sphericalangle BAC = 19^\circ$ и AM ($M \in BC$) е медиана. Намерете големината на $\sphericalangle AMB$.

Решение:



Първи начин: За $\triangle ABC$ и $\triangle MAC$ имаме, че $\sphericalangle\gamma$ е общ. От условието следва, че $CM = \dfrac{CB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}CA$ и тогава $\dfrac{BC}{AC} = \sqrt{2} = \dfrac{CA}{CM}$. Така $\triangle ABC$ и $\triangle MAC$ са подобни по втори признак и следователно $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BAC = 19^\circ$.
Тогава $\sphericalangle AMB = 180^\circ - 19^\circ = 161^\circ$.

Втори начин: При стандартните означения за $\triangle ABC$ от формулата за медианата имаме $m_a^2 = \dfrac{1}{4}(2c^2+2b^2-(\sqrt{2}b)^2)$ и от тук (1) $m_a = \dfrac{c}{\sqrt{2}}$. От условието и косинусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме $(\sqrt{2}b)^2 = b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ и тогава (2) $b^2 = c^2-2bc\cos\alpha$. От условието и косинусова теорема за $\triangle ABM$ получаваме $c^2 = m_a^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}b}{2}\right)^2 - 2m_a\dfrac{\sqrt{2}b}{2}\cos\varphi$ и от (1), $c^2 = \left(\dfrac{c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \dfrac{b^2}{2} - 2\dfrac{c}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{2}b}{2}\cos\varphi$, $\dfrac{c^2}{2} = \dfrac{b^2}{2} - bc\cos\varphi$ и (3) $b^2 = c^2+2bc\cos\varphi$.

Тогава от (2) и (3) следва, че $\cos\varphi = -\cos\alpha$, $\sphericalangle\varphi = 180^\circ - \sphericalangle\alpha = 180^\circ - 19^\circ = 161^\circ$.

Окончателно $\sphericalangle AMB = 161^\circ$.

Задача 3. Да се реши неравенството

$$\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{20-|x^2-11x+10|} \leq 0.$$

Решение: Неравенството има смисъл при $-x^2+7x-6 \geq 0$ и $20-|x^2-11x+10| \neq 0$. Първото условие се удовлетворява от $x \in [1,\,6]$. Непосредствено се проверява, че $x = 1$ е решение на задачата, а за $x = 6$ неравенството няма смисъл. При $x \in (1,\,6)$ неравенството е еквивалентно на $|x^2-11x+10| > 20$ и от това, че $x^2-11x+10 < 0$ за $x \in (1,\,10)$, последователно получаваме $-(x^2-11x+10) > 20$, $x^2-11x+30 < 0$ с решение $x \in (5,\,6)$.

За решението на неравенството окончателно получаваме $x \in \{1\} \cup (5,\,6)$.

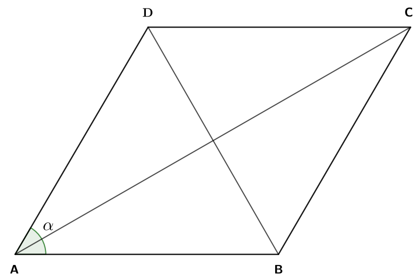
Задача 4. Намерете острия $\sphericalangle BAD$ и лицето на ромба $ABCD$, ако радиусите на описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ окръжности са съответно $\sqrt{3}$ и 1.

Решение: Нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $AB = a$. Тогава $\sphericalangle BAC = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle ABD = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$. От синусова теорема за $\triangle ABC$ имаме $a = BC = 2.\sqrt{3}.\sin\dfrac{\alpha}{2}$, а от синусова теорема за $\triangle ABD$ имаме $a = AD = 2.1.\sin\dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$.

Приравнявайки тези резултати за страната на ромба получаваме $2\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$, $\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Последователно получаваме $\dfrac{\alpha}{2} = 30^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $a = 2.\sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$ и

$S_{ABCD} = a^2\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.



Задача 5. Намерете стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$\frac{a.2^x + 1}{2^x - 2} - \frac{a.2^x - 1}{2^x - 3} = a$$

има единствено решение.

Решение: Понеже $y = 2^x > 0$, то даденото уравнение има единствено решение тогава и само тогава, когато уравнението $\dfrac{a.y + 1}{y - 2} - \dfrac{a.y - 1}{y - 3} = a$ има само едно положително решение, т.е. когато уравнението $(*)$ $\quad ay^2 - 2(2a+1)y + 6a + 5 = 0$ има само едно положително решение, различно от 2 и 3.

Всички възможни случаи за последното са:

1) $a = 0$. Тогава $(*)$ е линейно с единствен положителен корен $y = \dfrac{5}{2}$, от където $a = 0$ е от отговорите на задачата.

2) $D = (2a+1)^2 - a(6a+5) = -2a^2 - a + 1 = 0$. Това се случва при $a = -1$ и $a = \dfrac{1}{2}$ със съответни единствени корени $y = 1 > 0$ и $y = 4 > 0$.. Следователно $a = -1$ и $a = \dfrac{1}{2}$ са от отговорите на задачата.

3) Когато $y = 2$ е решение на $(*)$. Тогава $a = -\dfrac{1}{2}$ и другият корен на $(*)$ е $y = -2 < 0$. Няма положително решение, различно от 2 и 3. Следователно $a = -\dfrac{1}{2}$ не е от отговорите на задачата.

4) Когато $y = 3$ е решение на $(*)$. Тогава $a = \dfrac{1}{3}$ и другият корен на $(*)$ е $y = 7 > 0$. Има само едно положително решение, различно от 2 и 3. Следователно $a = \dfrac{1}{3}$ е от отговорите на задачата.

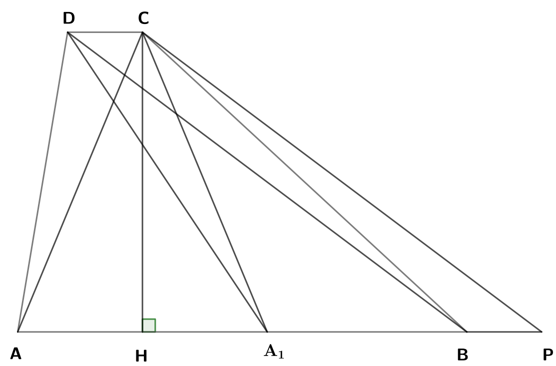
5) $\dfrac{6a+5}{a} \leq 0$. При $a = -\dfrac{5}{6}$ решения на $(*)$ са $y = 0$ и $y = \dfrac{8}{5} > 0$. Има само едно положително решение, различно от 2 и 3 и следователно $a = -\dfrac{5}{6}$ е от отговорите на задачата. Тъй като $a = -\dfrac{1}{2}$

е вече разгледан, нека сега да разгледаме случая $a \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Тогава $D > 0$ и от формулите на Виет $y_1.y_2 = \dfrac{6a+5}{a} < 0$ имаме, че уравнението $(*)$ има два реални корена y_1 и y_2 с различни знаци, като положителният е различен от 2 и 3. Така $a \in \left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ са от отговорите на задачата.
Обобщавайки получените резултати за отговора на задачата имаме:

$$a \in \{-1\} \cup \left[-\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Задача 6. Да се пресметне лицето на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$), ако $AC = 13$, $BD = 20$ и височината на трапеца е $h = 12$.

Решение: Нека P е точката от правата AB, такава че $PC \parallel BD$. Тогава четириъгълникът $BPCD$ е успоредник и за него имаме имаме $PC = BD = 20$ и $BP = DC$. Триъгълникът APC е равнолицев с трапеца $ABCD$ понеже $S_{\triangle BPC} = S_{\triangle ACD}$. Търсим лицето на $\triangle APC$:



Първи начин: Нека CH ($H \in AB$) е височина за трапеца $ABCD$. От $CH = 12$ и питагорова теорема за $\triangle AHC$ и $\triangle PHC$ намираме съответно $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 5$ $PH = \sqrt{PC^2 - CH^2} = 16$. Тогава за AP имаме следните възможности:

$$AP = AB + CD = \begin{cases} AH + HP = 5 + 16 = 21, \text{ ако } \sphericalangle PAC < 90^\circ; \\ HP - AP = 16 - 5 = 11, \text{ ако } \sphericalangle PAC > 90^\circ, \end{cases}$$

а за лицето - съответно $S_{ABCD} = \dfrac{AB+CD}{2}.CH = \dfrac{AP.CH}{2} = 6.AP = \begin{cases} 126, \text{ ако } \sphericalangle PAC < 90^\circ; \\ 66, \text{ ако } \sphericalangle PAC > 90^\circ. \end{cases}$

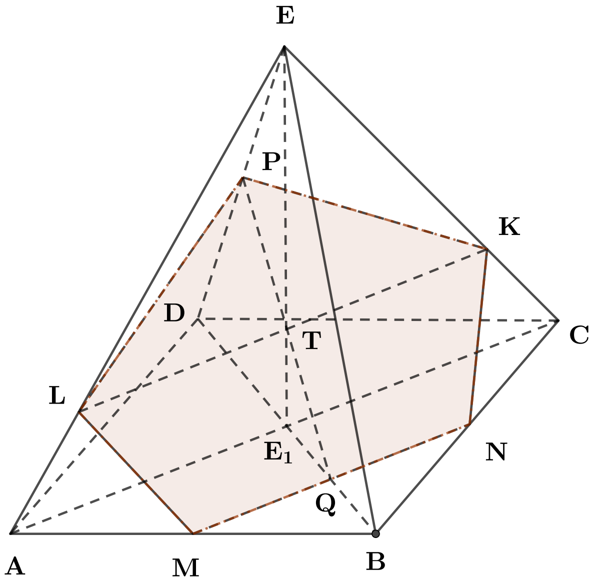
(**Забележка:** От $AC < PC$ следва, че $\sphericalangle APC < 90^\circ$ и при фиксиран правоъгълен $\triangle PCH$ точка A удовлетворява условията: лежи на правата HP и е на разстояние 13 от точка C. Такива има две. На чертежа A и A_1.)

Втори начин: Нека $\sphericalangle ACP = \gamma$. Изразявайки по два начина лицето на $\triangle APC$ имаме $\dfrac{AC.PC}{2} \sin\gamma = S_{APC} = \dfrac{AP.CH}{2}$ и за AP имаме $AP = \dfrac{65}{3}\sin\gamma$. От друга страна от косинусова теорема за $\triangle APC$ имаме $AP^2 = AC^2 + PC^2 - 2AP.PC\cos\gamma$ и $AP^2 = 569 - 520\cos\gamma$. От тези две връзки за AP и γ получаваме $(65\cos\gamma)^2 - 72(65\cos\gamma) + 896 = 0$. Последното уравнение има две решения 16 и 56 за $65\cos\gamma$. От тук съответно $\cos\gamma$ е $\dfrac{56}{65}$ или $\dfrac{16}{65}$, а $\sin\gamma$ е $\dfrac{33}{65}$ или $\dfrac{63}{65}$. Окончателно за лицето (по формулата $S_{APC} = \dfrac{AC.PC}{2}\sin\gamma$) получаваме $S_{APC} = 66$ и $S_{APC} = 126$.

Задача 7. Основата $ABCD$ на четириъгълна пирамида $ABCDE$ е квадрат със страна 4 , а околните ръбове сключват с равнината на основата ъгъл 45° . През средите на ръбовете AB, BC и DE е прекарана равнина γ . Да се намери лицето на сечението на γ с пирамидата.

Решение: От условието за околните ръбове следва, че проекцията E_1 на върха на пирамидата E е пресечната точка на диагоналите на основата, а $\triangle ACE$ и $\triangle BDE$ са еднакви равнобедрени и правоъгълни и са еднакви на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB от основата. Така околните стени са равностранни триъгълници.

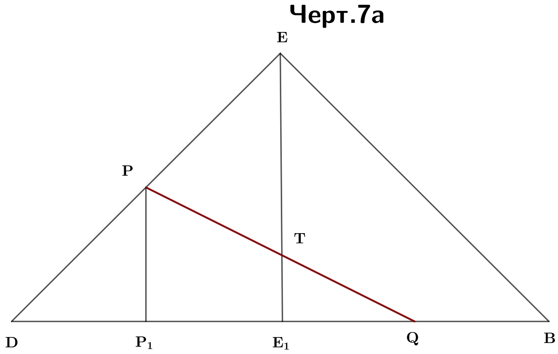
Означаваме (на Черт.7а) с M, N и P средите съответно на AB, BC и DE. Нека Q е средата на MN, а T е пресечната точка на PQ и EE_1. Означаваме с L и K пресечните точки на правата през T и успоредна на AC, съответно с околните ръбове AE и CE. От това, че P и Q са от равнината γ, последователно получаваме, че от тази равнина са и точка T и отсечката LK. Така сечението на γ с пирамидата е петоъгълникът $MNKPL$.



Черт.7а

В равнината DBE (на Черт.7б) построяваме отсечка PP_1, такава че $PP_1 \perp DB$ и $P_1 \in DB$). От условието на задачата следва, че PP_1 е средна отсечка в $\triangle DE_1E$ и $PP_1 = \dfrac{EE_1}{2}$.

Тогава $DP_1 = P_1E_1 = E_1Q = QB$, TE_1 е средна отсечка в $\triangle PP_1Q$ и $TE_1 = \dfrac{PP_1}{2} = \dfrac{EE_1}{4}$. От $EE_1 = DE_1 = 2\sqrt{2}$ имаме $PP_1 = \sqrt{2}$ и $P_1Q = 2\sqrt{2}$. От питагорова теорема за $\triangle PP_1Q$ получаваме $PQ = \sqrt{10}$ и тогава $PT = TQ = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.



Черт.7б

$\triangle ACE$ и $\triangle LKE$ (на Черт.7а) са подобни по първи признак. От полученото вече $TE_1 = \dfrac{EE_1}{4}$ имаме, че $ET = \dfrac{3}{4}EE_1$ и тогава $\dfrac{LK}{AC} = \dfrac{ET}{EE_1} = \dfrac{3}{4}$. Следователно $LK = 3\sqrt{2}$. От еднаквостите $\triangle LPE \cong \triangle KPE$ и $\triangle AML \cong \triangle CNK$ получаваме че $\triangle LKP$ и трапецът $MNKL$ са равнобедрени, а съответно PT и TQ са техни височини. За лицата им имаме:

$$S_{LKP} = \frac{LK.PT}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ и } S_{MNKL} = TQ.\frac{MN+LK}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Тогава $S_{MNKPL} = S_{LKP} + S_{MNKL} = 4\sqrt{5}$.

Задача 8. Лицето на $\triangle ABC$ е 64. Върху страните му AB, BC и CA лежат съответно точките K, L и M, така, че $AK = x\,AB$, $BL = x^2BC$, $AM = 2xAC$ и $AM \geq MC$, където x е реална променлива. Намерете най-малката стойност на лицето на триъгълника KLM и стойността на x, за която се достига най-голямата стойност на лицето на триъгълника KLM.

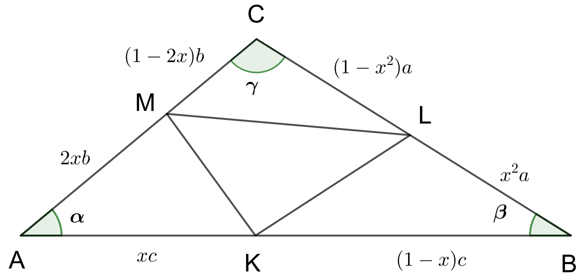
Решение: От условията $AM = 2xAC$ и $AM \geq MC$ получаваме ограниченията $x \leq \dfrac{1}{2}$ и $x \geq \dfrac{1}{4}$. При стандартните означения за $\triangle ABC$ от условието на задачата имаме

$AK = xc$, $BK = (1-x)c$,

$BL = x^2a$, $CL = (1-x^2)a$,

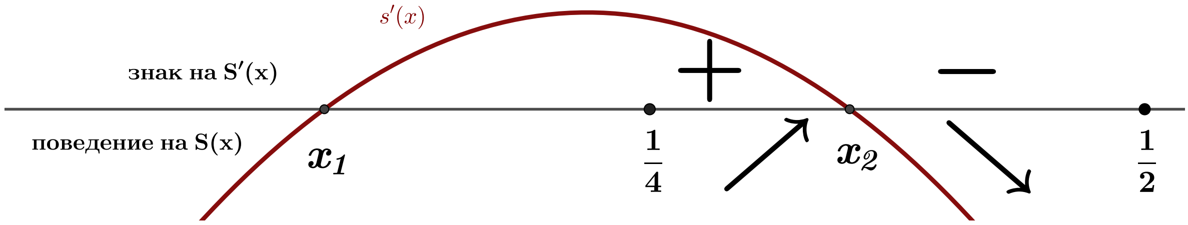
$CM = (1-2x)b$ и $AM = 2xb$. Следователно

$S_{MAK} = \dfrac{xc.2xb}{2}\sin\alpha = x2xS_{ABC} = 64.2x^2$,



$S_{KBL} = \dfrac{(1-x)c.x^2 a}{2}\sin\beta = (1-x)x^2 S_{ABC} = 64(1-x)x^2$ и
$S_{LCM} = \dfrac{(1-x^2)a.(1-2x)b}{2}\sin\gamma = (1-x^2)(1-2x)S_{ABC} = 64(1-x^2)(1-2x)$.
Тогава $S_{KLM} = S_{ABC} - S_{MAK} - S_{KBL} - S_{LCM} = 64\left(1-2x^2-(1-x)x^2-(1-x^2)(1-2x)\right) = 64\left(-x^3-2x^2+2x\right)$.

Разглеждаме функцията $s(x) = 64(-x^3-2x^2+2x)$ за $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right]$. За производната на тази функция имаме $s'(x) = 64(-3x^2-4x+2)$. Уравнението $s'(x) = 0$ има корени $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{10}}{3} < 0$ и $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{3} \in \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$. $s'(x)$ е положителна в интервала $\left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}\right)$ и отрицателна в интервала $\left(\dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$ и съответно $s(x)$ расте в първия и намалява във втория интервал.



Тогава стойността на x, за която се достига най-голямата стойност на лицето на $\triangle KLM$ е $x = \dfrac{-2+\sqrt{10}}{3}$. Най-малката стойност на лицето на $\triangle KLM$ е по-малкото от числата $s\left(\dfrac{1}{4}\right) = 23$ и $s\left(\dfrac{1}{2}\right) = 24$, което е 23.