## СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
## ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА II

*24 април 2021 г.*

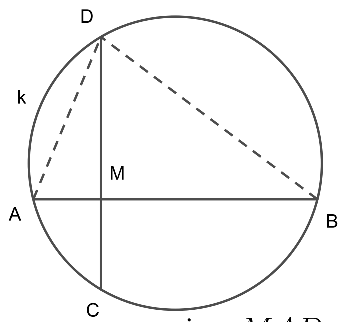
## Тема №1.

### ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

**Задача 1.** Да се реши неравенството $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3x+1}{2-x}\leqq\dfrac{15x-37}{x^2-3x+2}$.

**Решение:** Даденото дробно неравенство има смисъл при $x\in(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,\infty)$. Така последователно имаме $\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3x+1}{2-x}\leqq\dfrac{15x-37}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{4(x-2)-(3x+1)(x-1)-(15x-37)}{(x-1)(x-2)}\leqq 0$, $\dfrac{3(x^2+3x-10)}{(x-1)(x-2)}\geqq 0$, $\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-1)(x-2)}\geqq 0$ или $\dfrac{(x+5)}{(x-1)}\geqq 0$, което при $x\neq 1$ и $x\neq 2$ е еквивалентно на $(x+5)(x-1)\geqq 0$, т.е. решения на даденото дробно неравенство са $x\in(-\infty,-5\big]\cup(1,2)\cup(2,\infty)$.

**Задача 2.** Дадена е окръжност $k$ с радиус $R$. Хордите $AB$ и $CD$ са перпендикулярни и се пресичат в точка $M$. Да се намерят дължините на отсечката $DM$ и диаметъра $d$ на окръжността, при условие че $AM=15$, $BM=48$ и $CM=20$.



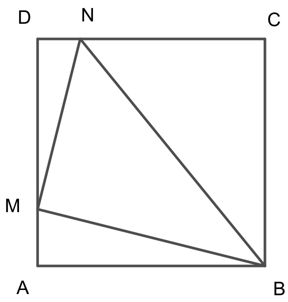

**Решение:** Понеже хордите $AB$ и $CD$ се пресичат в точка $M$, то имаме $AM\cdot BM=CM\cdot DM$ или $DM=\dfrac{15\cdot 48}{20}=36$. Сега от теоремата на Питагор за правоъгълните триъгълници $AMD$ и $BMD$ имаме съответно $AD=\sqrt{15^2+36^2}=3\sqrt{5^2+12^2}=3\cdot 13=39$ и $BD=\sqrt{48^2+36^2}=12\sqrt{4^2+3^2}=12\cdot 5=60$. От триъгълника $AMD$ получаваме $\sin\sphericalangle MAD=\dfrac{DM}{AD}=\dfrac{12}{13}$. Понеже триъгълникът $ABD$ е вписан в окръжността $k$, то от синусовата теорема окончателно получаваме $d=2R=\dfrac{BD}{\sin\sphericalangle MAD}=60\cdot\dfrac{13}{12}=65$. $\Big($За намиране на $R$ може да се използва и формулата $S=\dfrac{abc}{4R}$.$\Big)$

**Задача 3.** В триъгълника $ABC$ мерките на ъглите $\alpha=\sphericalangle BAC$, $\beta=\sphericalangle ABC$ и $\gamma=\sphericalangle ACB$ образуват в този ред аритметична прогресия. Да се намери дължината $R$ на радиуса на описаната около триъгълника $ABC$ окръжност, при условие че $BC=2021$ и $2\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$.

**Решение:** Понеже мерките на ъглите на триъгълника $\alpha,\beta$ и $\gamma$ образуват в този ред аритметична прогресия, то имаме $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $2\beta=\alpha+\gamma$, т.е. $\beta=\dfrac{\pi}{3}$.

От равенството $2\sin\alpha=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)$ получаваме $2\sin\alpha=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cdot\cos\alpha-\cos\dfrac{2\pi}{3}\cdot\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\sin\alpha$ или $3\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$. Ако $\cos\alpha=0$, то от последното равенство ще имаме и $\sin\alpha=0$, което е невъзможно поради $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ . Следователно $\cos\alpha\neq 0$ и от усповието $3\sin\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha$ получаваме $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, откъдето понеже $\alpha$ е големина на ъгъл в триъгълник достигаме до $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

Така получихме, че $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ и $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, т.е. триъгълникът $ABC$ е правоъгълен с остър ъгъл $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ срещу катета $BC$, следователно имаме $2R=AB=2BC$ и $R=BC=2021$.




**Задача 4.** Даден е квадрат $ABCD$. Точките $M$ и $N$ лежат съответно върху страните $AD$ и $CD$. Да се намерят лицето на квадрата $S$ и дължината на диагонала му $AC$, при условие че $BM = 8$, $BN = 10$ и $MN = 6$.

**Решение:** В триъгълника $BMN$ имаме $MN^2 + BM^2 = 36 + 64 = 100 = BN^2$, т.е. триъгълникът $BMN$ е правоъгълен и $\sphericalangle BMN = \dfrac{\pi}{2}$.

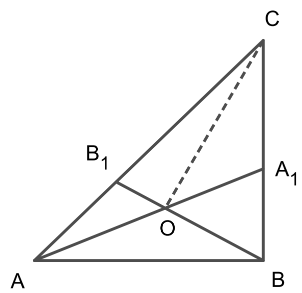
Нека $AB = a$, $AM = x$ и $\sphericalangle ABM = \varphi$, тогава имаме $DM = a - x$, $\sphericalangle AMB = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$ и $\sphericalangle DMN = \pi - \sphericalangle AMB - \sphericalangle BMN = \pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) - \dfrac{\pi}{2} = \varphi$, т.е. триъгълниците $ABM$ и $DMN$ са подобни и $\dfrac{a}{8} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{DM}{MN} = \dfrac{a-x}{6}$ или $x = \dfrac{a}{4}$.

Сега от теоремата на Питагор за правоъгълния триъгълник $ABM$ последователно получаваме $\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 + a^2 = 8^2$, $\dfrac{a^2}{4^2} + a^2 = 8^2$, $17a^2 = (4 \cdot 8)^2$ или $a = \dfrac{32\sqrt{17}}{17}$.

Така за лицето на квадрата получаваме $S = a^2 = \dfrac{1024}{17}$, а за дължината на диагонала $AC$ от триъгълника $ABC$ имаме $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2$ или $AC = \dfrac{32\sqrt{34}}{17}$.

**Задача 5.** Да се реши уравнението $2^{4-2x} + 2^{2x} = 2^{2-x} + 2^x + 4$.

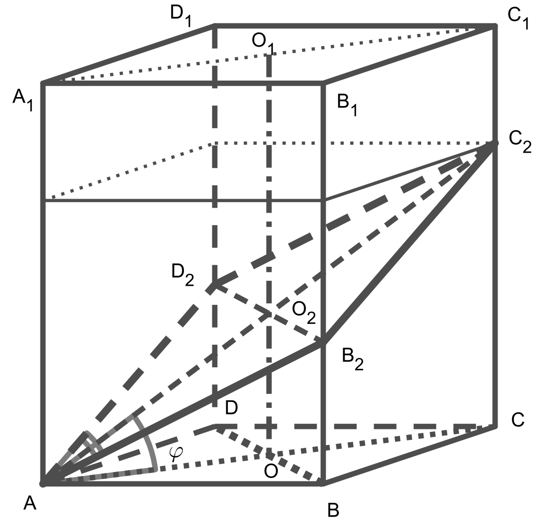
**Решение:** Уравнението има смисъл за $x \in \mathbb{R}$. Въвеждаме ново неизвестно $t = 2^{2-x} + 2^x$, тогава $t^2 = 2^{4-2x} + 2 \cdot 2^{2-x} \cdot 2^x + 2^{2x} = 2^{4-2x} + 2^{2x} + 8$ и даденото уравнение добива вида $t^2 - 8 = t + 4$, откъдето $t^2 - t - 12 = 0$, т.е. $t_1 = 4$ или $t_2 = -3$. Така достигаме до уравненията $2^{2-x} + 2^x = 4$, $2^{2-x} + 2^x = -3$. Сега при $2^x = y \neq 0$ получаваме $\dfrac{4}{y} + y = 4$, $\dfrac{4}{y} + y = -3$ или $y^2 - 4y + 4 = 0$, $y^2 + 3y + 4 = 0$. Квадратното уравнение $y^2 - 4y + 4 = 0$ има двоен корен $y_{1,2} = 2$ и за неизвестното $x$ имаме $2^x = 2 = 2^1$, $x = 1$, докато уравнението $y^2 + 3y + 4 = 0$ няма реални корени. Следователно окончателно получаваме, че решение на даденото показателно уравнение е само $x = 1$.




**Задача 6.** Даден е триъгълник $ABC$. Точките $A_1$ и $B_1$ лежат съответно върху страните $BC$ и $AC$, а $AA_1$ и $BB_1$ се пресичат в точката $O$. Да се намери лицето $S_{ABC}$ на триъгълника $ABC$, при условие че лицата на триъгълниците $AOB_1$, $ABO$ и $BOA_1$ са съответно $S_{AOB_1} = 6$, $S_{ABO} = 12$ и $S_{BOA_1} = 9$.

**Решение:** Нека означим лицата на триъгълниците $OB_1C$ и $OA_1C$ съответно с $S_{OB_1C} = x$ и $S_{OA_1C} = y$. Триъгълниците $OB_1A$ и $OB_1C$, както и $BB_1A$ и $BB_1C$ имат общи височини, следователно лицата им ще се отнасят както техните основи. Имаме $\dfrac{6}{x} = \dfrac{S_{OB_1A}}{S_{OB_1C}} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{S_{BB_1A}}{S_{BB_1C}} = \dfrac{12+6}{x+y+9}$. Аналогично за двойките триъгълници $OA_1B$, $OA_1C$ и $AA_1B$, $AA_1C$ получаваме $\dfrac{9}{y} = \dfrac{S_{OA_1B}}{S_{OA_1C}} = \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{S_{AA_1B}}{S_{AA_1C}} = \dfrac{12+9}{x+y+6}$. От последните равенства имаме $\dfrac{6}{x} = \dfrac{18}{x+y+9}$, $\dfrac{9}{y} = \dfrac{21}{x+y+6}$ и достигаме до следната система за неизвестните $x$ и $y$: $\left|\begin{array}{l} 3x - 4y + 18 = 0 \\ 2x - y - 9 = 0 \end{array}\right.$, откъдето след умножаване на второто уравнение с (-4), събиране на двете уравнения и заместване на получената стойност за $x$ в уравнението $2x - y - 9 = 0$ непосредствено получаваме $\left|\begin{array}{l} x = \dfrac{54}{5} \\ y = \dfrac{63}{5} \end{array}\right.$. Сега за стойността на лицето на триъгълника $ABC$ имаме $S_{ABC} = x + y + 6 + 9 + 12 = \dfrac{54}{5} + \dfrac{63}{5} + 27 = \dfrac{252}{5} = 50,4$.

**Задача 7.** Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основен ръб $AB = \sqrt{6}$ и височина $AA_1 = 9$. Равнина $\lambda$ минава през върха $A$ и точките $B_2$, $C_2$ и $D_2$, които лежат съответно върху ръбовете $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$, така че полученото сечение $AB_2C_2D_2$ е ромб с остър ъгъл $\alpha$. Да се намерят ъгълът $\varphi$ между $\lambda$ и равнината на основата $ABCD$, както и отношението $k$ на обемите на телата, на които равнината $\lambda$ разделя призмата, при условие че $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$.




**Решение:** Понеже сечението на призмата с равнината $\lambda$ е ромб, то триъгълниците $ADD_2$ и $ABB_2$ са еднакви по четвърти признак и $BB_2 = DD_2$, т.е. $B_2D_2 \overset{\parallel}{=} BD$. Освен това $AC_2 \perp B_2D_2$ и $AC \perp BD$, т.е. имаме, че пресечницата на $\lambda$ и $(ABCD)$ минава през точка $A$ и е успоредна на $BD$ и ъгълът между равнината $\lambda$ и $(ABCD)$ лежи в диагоналното сечение $ACC_1A_1$ и е равен на $\sphericalangle(\lambda, (ABCD)) = \sphericalangle CAC_2 = \varphi$.

Понеже в триъгълника $ACC_2$ имаме $\cos\varphi = \dfrac{AC}{AC_2} \leqq 1$, то $B_2D_2 = AC \leqq AC_2$ и острият ъгъл в ромба $AB_2C_2D_2$ е $\alpha = \sphericalangle B_2AD_2$.

От триъгълника $AOO_2$ получаваме още $\cos\varphi = \dfrac{AO}{AO_2}$, но $AO = BO = B_2O_2$, т.е. $\cos\varphi = \dfrac{AO}{AO_2} = \dfrac{B_2O_2}{AO_2} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Поради факта, че $\alpha$ е остър и $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ последователно имаме $\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$. След като означим $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t$ и използваме формулата $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ достигаме до $\dfrac{4}{3} = \dfrac{2t}{1-t^2}$, $2t^2+3t-2=0$, т.е. $t_1 = \dfrac{1}{2}$ или $t_2 = -2$, но $\dfrac{\alpha}{2}$ е остър и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = t > 0$, т.е. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$. $\Big($ За получаване на $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$ може да се използва и формулата $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = +\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. $\Big)$ Така получихме, че $\cos\varphi = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, т.е. $\varphi = 60^\circ$.

Понеже $AB = \sqrt{6}$, а $AC$ е диагонал на квадрата $ABCD$, то имаме $AC = \sqrt{2}\cdot AB = 2\sqrt{3}$. Сега от триъгълника $ACC_2$ получаваме $\sqrt{3} = \operatorname{tg}60^\circ = \dfrac{C_2C}{AC}$ или $CC_2 = \sqrt{3}\cdot AC = 6$.

За да пресметнем отношението на обемите, на които равнината $\lambda$ разделя призмата ще построим през точката $C_2$ равнина, успоредна на основите на призмата. Тогава тялото, разположено над равнината $\lambda$ ще бъде съставено от две тела – едното равнообемно (от симетрията и принципа на Кавалиери) на това под $\lambda$ с обем $V_1$, равен на половината от обема на призма с основа $ABCD$ и височина $CC_2 = 6$, а другото – призма с основа $A_1B_1C_1D_1$ и височина $C_2C_1 = CC_1 - CC_2 = 9-6 = 3$ с обем $V_2$. За обемите $V_1$ и $V_2$ имаме $V_1 = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AB\cdot CC_2 = 18$, $V_2 = AB\cdot AB\cdot C_1C_2 = 18$.

Така окончателно получаваме, че търсеното отношение е $k = \dfrac{V_1+V_2}{V_1} = \dfrac{2}{1}$.

**Задача 8.** Да се реши уравнението:

$$\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}+\sqrt[2021]{\frac{x+4042}{2x+2021}}=\cos\frac{(2021+x)\pi}{47}+\cos\frac{(2021-x)\pi}{43}.$$

**Решение:** Даденото уравнение има смисъл за $x\neq-4042$ и $x\neq-\frac{2021}{2}$. Нека да означим лявата страна на уравнението с $f(x)=\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}+\sqrt[2021]{\frac{x+4042}{2x+2021}}$, а дясната с $g(x)=\cos\frac{(2021+x)\pi}{47}+\cos\frac{(2021-x)\pi}{43}$.

Сега ще изследваме областите на изменение на всяка от двете функции $f(x)$ и $g(x)$.

**1.** Въвеждаме ново неизвестно $t=\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}$. Тогава функцията $f(x)$ добива вида $f(x)=h(t)=t+\frac{1}{t}$, т.е. за да намерим областта на изменение на $f(x)$ при $x\neq-4042$ и $x\neq-\frac{2021}{2}$ е достатъчно да намерим областта на изменение на $h(t)=t+\frac{1}{t}$ при $t\neq0$.

Нека $t+\frac{1}{t}=k$ или $t^2-kt+1=0$, където $k$ е реален параметър. Понеже в уравнението $t^2-kt+1=0$ неизвестното $t$ не може да бъде равно на нула за никое $k$, то въпросът къде се изменя $k$ при $t\neq0$ е еквивалентен на въпроса какво трябва да е $k$ в уравнението $t^2-kt+1=0$, за да бъде $t$ реално. Отговорът на последния въпрос е лесен – дискриминантата $D=k^2-4$ трябва да е неотрицателна, т.е. $k\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$.

Така получихме, че $t+\frac{1}{t}\geqq2$, при $t>0$ и $t+\frac{1}{t}\leqq-2$, при $t<0$, като $t+\frac{1}{t}=2$, при $t=1$, а $t+\frac{1}{t}=-2$, при $t=-1$. $\Big($ Последните неравенства могат да бъдат доказани с помощта на производни, както и директно. $\Big)$

Сега имаме $f(x)\geqq2$, при $\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}>0$ и $f(x)\leqq-2$, при $\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}<0$, като $f(x)=\pm2$, при $\sqrt[2021]{\frac{2x+2021}{x+4042}}=\pm1$, т.е при $\frac{2x+2021}{x+4042}=\pm1$ или за $x=\pm2021$.

**2.** От свойствата на функцията косинус получаваме $-1\leqq\cos\frac{(2021+x)\pi}{47}\leqq1$ и $-1\leqq\cos\frac{(2021-x)\pi}{43}\leqq1$, а след почленното събиране на последните неравенства достигаме до $-2\leqq\cos\frac{(2021+x)\pi}{47}+\cos\frac{(2021-x)\pi}{43}\leqq2$, т.е. $g(x)\in[-2,2]$ за всяко $x\in\mathbb{R}$.

Така получихме, че в дефиниционната област на даденото уравнение двете функции $f(x)$ и $g(x)$ могат да бъдат равни само ако $f(x)=g(x)=\pm2$. Понеже решенията на уравнението $f(x)=\pm2$ са $x=\pm2021$, то трябва да проверим дали някои от тях са решения на и даденото уравнение.

Понеже $2021=43\cdot47$, то при $x=2021$ изразът $g(2021)$ добива вида $g(2021)=\cos\frac{(2021+2021)\pi}{47}+\cos\frac{(2021-2021)\pi}{43}=\cos(43\cdot2\pi)+\cos0=1+1=f(2021)=2$. Следователно $x=2021$ е решение на даденото уравнение. Сега за $x=-2021$ имаме $g(-2021)=\cos\frac{(2021-2021)\pi}{47}+\cos\frac{(2021+2021)\pi}{43}=\cos0+\cos(47\cdot2\pi)=1+1\neq f(-2021)=-2$, т.е. $x=-2021$ не е решение на задачата.

Така окончателно получаваме, че само $x=2021$ е решение на даденото уравнение.