СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика I

23 май 2021 г.

Тема №3.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- **Максималният брой точки** от трите части на изпита е **100**
- Правилно отбелязаният отговор на всяка задача от 1. до 20. се оценява както следва:

задачи от 1. до 10. – 2 точки **задачи от 11. до 20. – 3 точки**

1. ~~А~~ Б В Г
2. А ~~Б~~ В Г
3. А Б В ~~Г~~
4. А Б ~~В~~ Г
5. А ~~Б~~ В Г
6. ~~А~~ Б В Г
7. А Б В ~~Г~~
8. А ~~Б~~ В Г
9. А Б ~~В~~ Г
10. ~~А~~ Б В Г
11. А ~~Б~~ В Г
12. А Б В ~~Г~~
13. А Б ~~В~~ Г
14. ~~А~~ Б В Г
15. А ~~Б~~ В Г
16. А Б ~~В~~ Г
17. А Б В ~~Г~~
18. ~~А~~ Б В Г
19. А Б ~~В~~ Г
20. А Б В ~~Г~~

- Правилно попълненият отговор на **всяка задача от 21. до 25.** се оценява с **4 точки**

21.	$n = 2021$
22.	$x = 2$
23.	$p = 5$
24.	165 млн. евро
25.	$BC = 9$

• **Пълното решение на всяка задача от 26. до 28. се оценява с 10 точки.**

Задача 26. Три числа образуват геометрична прогресия. Сборът на първите две числа от прогресията е равен на (-8), а сборът от квадратните корени на първото и третото число е равен на 10. Да се намерят числата на прогресията.

Решение: Нека геометричната прогресия е от числата a_1, a_2, a_3. За тях е дадено

$$a_1 + a_2 = -8 \qquad \text{и} \qquad \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} = 10.$$

От второто условие имаме $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$. Тогава, от първото условие следва $a_2 < 0$.
Полагаме $a_1 = a$, $a_2 = aq$, $a_3 = aq^2$, като $q < 0$.
От горните условия за a и q получаваме системата $\left| \begin{array}{l} a + aq = -8, \\ \sqrt{a} + \sqrt{aq^2} = 10. \end{array} \right.$

Тъй като $q < 0$, то $\sqrt{aq^2} = |q|\sqrt{a} = -q\sqrt{a}$ и системата приема вида $\left| \begin{array}{l} a(1+q) = -8, \\ \sqrt{a}(1-q) = 10. \end{array} \right.$
Ясно е, че $q \neq -1$ и $q \neq 1$. Тогава $\dfrac{-8}{1+q} = \dfrac{100}{(1-q)^2}$, откъдето получаваме уравнението

$$2q^2 + 21q + 27 = 0, \qquad \text{с корени } q_1 = -\frac{3}{2}, \; q_2 = -9.$$

При $q = -\dfrac{3}{2}$ намираме $a = 16$ и в този случай прогресията е: $16, -24, 36$.
При $q = -9$ намираме $a = 1$ и в този случай прогресията е: $1, -9, 81$.

Решения на задачата са геометричните прогресии: $16, -24, 36$ и $1, -9, 81$.

. . . .

Задача 27. Конспект за изпит съдържа 36 въпроса. Всеки изпитен билет съдържа 2 различни въпроса от конспекта. Колко е най-малкият брой въпроси от конспекта, които трябва да научи студент, така че вероятността да знае и двата въпроса от произволно изтеглен билет да бъде поне $60\,\%$?

Решение: Броят на възможните различни изпитни билети е равен на $C_{36}^2 = \dfrac{36\,.\,35}{2}$. Нека студентът е научил n въпроса от конспекта. Броят на благоприятните билети, за които студентът знае и двата въпроса е $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Търсим най-малкото естествено число n, $n \leq 36$, за което $\dfrac{C_n^2}{C_{36}^2} \geq 60\,\%$. Положителните решения на неравенството

$$\frac{n(n-1)}{36\,.\,35} \geq \frac{3}{5}, \qquad n^2 - n - 27\,.\,28 \geq 0, \qquad (n-28)(n+27) \geq 0,$$

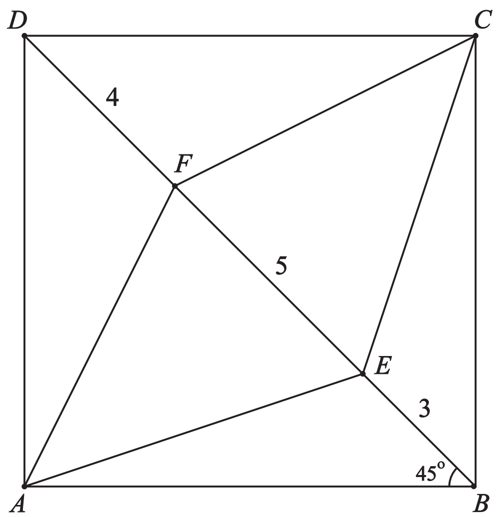
са числата $n \geq 28$.

Следователно, най-малкият брой въпроси, които студентът трябва да научи за да си гарантира с вероятност поне $60\,\%$, че знае и двата въпроса от изтегления билет, е $n = 28$.

. . . .

Задача 28. Даден е квадрат $ABCD$. Точките E и F лежат върху диагонала BD, като E е между B и F, $BE = 3$, $EF = 5$ и $FD = 4$. Да се докаже, че в четириъгълника $AECF$ може да се впише окръжност и да се намери радиусът на тази окръжност.

Решение: От $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ (по I признак) следва $AE = CE$. Аналогично, от еднаквостта $\triangle ADF \cong \triangle CDF$ получаваме $AF = CF$. Поради $AE + CF = CE + AF$ в четириъгълника $AECF$ може да се впише окръжност.



Тъй като $BD = 3 + 5 + 4 = 12$, то квадратът $ABCD$ има страна с дължина $AB = 6\sqrt{2}$.
От косинусовата теорема за $\triangle ABE$ имаме:

$$AE^2 = 3^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2\,.\,3\,.\,6\sqrt{2}\,\cos 45^\circ,$$

откъдето намираме $CE = AE = 3\sqrt{5}$.
От косинусовата теорема за $\triangle ADF$ имаме:

$$AF^2 = 4^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2\,.\,4\,.\,6\sqrt{2}\,\cos 45^\circ,$$

откъдето намираме $CF = AF = 2\sqrt{10}$.

Четириъгълникът $AECF$ има взаимно перпендикулярни диагонали AC и EF. Следователно $AECF$ има лице

$$S_{AECF} = \frac{AC\,.\,EF}{2} = \frac{12\,.\,5}{2} = 30.$$

За полупериметъра на четириъгълника $AECF$ имаме

$$p = AE + CF = AF + CE = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}.$$

Ако r е радиусът на вписаната окръжност в четириъгълника $AECF$, тогава

$$S_{AECF} = pr, \qquad (3\sqrt{5} + 2\sqrt{10})r = 30.$$

Оттук, за радиуса r намираме $r = \dfrac{30}{3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}} = 6\sqrt{5}\,(3 - 2\sqrt{2})$.

. . . .