СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

2 април 2023 г.

Тема №3.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	~~А~~	Б	В	Г
2.	~~А~~	Б	В	Г
3.	А	Б	~~В~~	Г
4.	А	~~Б~~	В	Г
5.	~~А~~	Б	В	Г
6.	А	Б	В	~~Г~~
7.	А	~~Б~~	В	Г
8.	~~А~~	Б	В	Г
9.	А	Б	В	~~Г~~
10.	~~А~~	Б	В	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$(a_1, b_1) = (-6, -3)$ и $(a_2, b_2) = (3, \frac{3}{2})$
12.	$3\sqrt{3}$ или $\frac{7}{6}\sqrt{3}$

- Примерни решения на задачи 13., 14., 15. и 16.

Задача 13. Числата a, b и c в този ред образуват аритметична прогресия с разлика 12. Ако от b извадим 2, трите числа биха образували геометрична прогресия. Намерете a.

Решение: От условието получаваме система за a, b и c:

$$\left| \begin{array}{l} b-a=12 \\ \dfrac{a+c}{2}=b \\ (b-2)^2=ac \end{array} \right.$$

Заместваме b от второто уравнение в другите две и след кратки преобразувания получаваме

$$\left| \begin{array}{l} c-a=24 \\ (a-c)^2-8a-8c+16=0 \end{array} \right.$$

Намираме $a=25$, $b=37$ и $c=49$. Отговор $a=25$.

....

Задача 14. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-2}\leq\sqrt{3x-7}.$$

Решение: Допустимите стойности са $x\in[3,+\infty)$. След повдигане на квадрат и кратко преобразуване получаваме:

$$2\sqrt{(x-3)(x-2)}\leq x-2.$$

Отново повдигаме на квадрат двете страни на неравенството ($0\leq x-2$ при $x\in[3,+\infty)$) и получаваме:

$$3x^2-16x+20\leq 0.$$

Решенията на това неравенство са $x\in\left[2,\dfrac{10}{3}\right]$. Като пресечем с множеството от допустимите стойности, намираме $x\in\left[3,\dfrac{10}{3}\right]$.

Задача 15. Даден е ΔABC, като $AB = 8$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Нека H е петата на височината спусната от C към страната AB. Намерете лицето на ΔABC, ако вписаните в ΔAHC и ΔBHC окръжности се допират.

Решение 1: От това, че вписаните в ΔAHC и ΔBHC окръжности се допират имаме равенството

$$\frac{AH + HC - AC}{2} = \frac{BH + HC - BC}{2},$$

т.е.

$$AH - AC = BH - BC.$$

Използваме стандартни означения $BC = a$, $AC = b$, $\sphericalangle BAC = \alpha$ и $\sphericalangle ABC = \beta$. От правоъгълните ΔAHC и ΔBHC намираме:

$$AH = b\cos\alpha, \qquad BH = a\cos\beta.$$

Получаваме

$$b\cos\alpha - b = a\cos\beta - a.$$

От синусова теорема за $\triangle ABC$ намираме

$$a = 2R\sin\alpha, \qquad b = 2R\sin\beta.$$

Намираме

$$2R\sin\beta(\cos\alpha - 1) = 2R\sin\alpha(\cos\beta - 1).$$

Изразяваме тригонометричните функции с половинка ъгли (с $\dfrac{\alpha}{2}$ и $\dfrac{\beta}{2}$) получаваме:

$$-8R\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} = -8R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Съкращаваме на $-8R\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и получаваме:

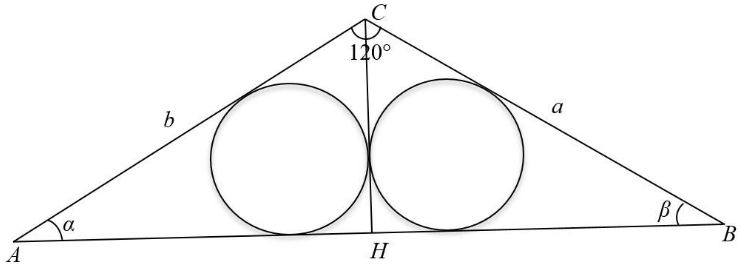
$$\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Понеже $\alpha, \beta \in (0, 60^\circ)$ имаме $\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0$. Следователно $\alpha = \beta$. От тук и от $\alpha + \beta = 60^\circ$ получаваме

$$\alpha = \beta = 30^\circ.$$

От правоъгълния ΔAHC намираме $HC = AH\tan\alpha = 4\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

За лицето на ΔABC намираме $S = \dfrac{AB.HC}{2} = 16\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Решение 2: От това, че вписаните в $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ окръжности се допират имаме равенството

$$\frac{AH + HC - AC}{2} = \frac{BH + HC - BC}{2},$$

т.е.

$$AH - AC = BH - BC.$$

Означаваме $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$, $AH = x$ и $CH = h$. Тоагва последното равенство става:

$$2x = c + b - a. \tag{1}$$

По-нататък от Питагоровата теорема за правоъгълните $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ получаваме

$$h^2 = b^2 - x^2, \quad h^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Приравняваме десните страни и след картко преобразуване получаваме:

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

От (1) змаестваме $2x = c + b - a$ в последното равенство:

$$b^2 = a^2 - c^2 + c(c + b - a).$$

Прехвърляме всички събираеми от едната страна:

$$b^2 - a^2 - c(b - a) = 0$$

т.е.

$$(b - a)(b + a - c) = 0.$$

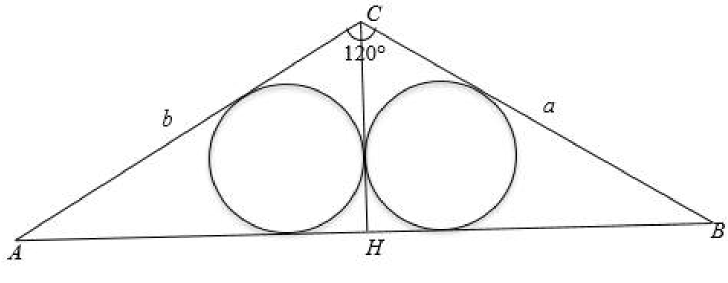
От неравенството на триъгълника имаме $b + a - c > 0$. Следователно

$$b = a,$$

т.е. $\triangle ABC$ е равнобедрен. Тогава в правоъгълния $\triangle AHC$ имаме $AH = 4$, $\sphericalangle HAB = 30^\circ$ и следователно за катета HC получаваме

$$HC = \tan 30^\circ AH = 4\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

За лицето на $\triangle ABC$ намираме $S = \dfrac{AB.HC}{2} = 16\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Задача 16. В сфера с радиус R е вписана четириъгълна пирамида $ABCDE$. Основата $ABCD$ е квадрат, а околният ръб EA е перпендикулярен на равнината на основата. Намерете максималния възможен обем на пирамидата.

Решение: Означаваме височината $EA = h$ на пирамидата $ABCDE$. Нека центърът на сферата е O. O се проектира ортогонално върху равнината на основата $ABCD$ на пирамидата в т. P, която е пресечна точка на диагоналите на квадрата $ABCD$. Имаме $OP = \dfrac{h}{2}$. От питагоровата теорема за правоъгълния ΔOPC намираме $PC = \sqrt{OC^2 - OP^2}$, т.е $PC = \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}$.

Лицето на квадрата $ABCD$ е

$$S = 2PC^2 = 2\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right).$$

Обемът V на пирамидата $ABCDE$ е равен на

$$V = \frac{1}{3}S\ h = \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h.$$

Търсим най-голямата стойност на обема V като функция на h за $h \in (0, 2R)$. Имаме

$$V' = \frac{2}{3}\left(hR^2 - \frac{h^3}{4}\right)' = \frac{2}{3}\left(R^2 - \frac{3h^2}{4}\right) = 0$$

Намираме $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$. Тогава $V'(h) > 0$ за $h \in (0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R)$ и $V'(h) < 0$ за $h \in (\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R, 2R)$. Това означава, че $V(h)$ е растяща в интервала $(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R)$ и намаляваща в интервала $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R, 2R)$. Следователно, функцията $V(h)$ достига най-голяма стойност в интервала $(0, 2R)$ при $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$ и $V\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}R\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.