СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

11 юни 2023 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	~~А~~	Б	В	Г
2.	А	~~Б~~	В	Г
3.	А	Б	В	~~Г~~
4.	А	Б	~~В~~	Г
5.	~~А~~	Б	В	Г
6.	А	~~Б~~	В	Г
7.	А	~~Б~~	В	Г
8.	А	Б	В	~~Г~~
9.	~~А~~	Б	В	Г
10.	А	Б	В	~~Г~~

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$x \in \left(2;\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$
12.	2

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Решете уравнението

$$\cos 4x + \sqrt{3}\ \sin 4x = 2.$$

Решение: Делим двете страни на 2 и преобразуваме:

$$1 = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \sin 4x = \sin\frac{\pi}{6}\ \cos 4x + \cos\frac{\pi}{6}\ \sin 4x = \sin(4x + \frac{\pi}{6})$$

Последното е възможно само когато $4x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за някое цяло число k. Решенията на това линейно уравнение за x са

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},$$

където $k \in \mathbb{Z}$.

. . . .

Задача 14. За кои стойности на a функцията $f(x) = ax^2 + 2x + a + 1$ приема неотрицателни стойности за всяко $x \in \mathbb{R}$?

Решение: При $a = 0$ функцията f е линейна и приема всяка реална стойност, така че $a = 0$ не е решение.

Нататък $a \neq 0$. Квадратната функция f приема само неотрицателни стойности точно когато старшият ѝ коефициент е положителен и дискриминантата ѝ е неположителна.

Така получаваме системата $\left|\begin{array}{l} a > 0 \\ D' = 1 - a(a+1) \leq 0 \end{array}\right.$.

Решенията на $1 - a - a^2 \leq 0$ са $a \in \big(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\big] \cup \big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\big)$.

Тъй като $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, то получаваме окончателен отговор $a \in \big[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \infty\big)$.

Задача 15. Даден е ромб $ABCD$ с диагонали $AC = 4$ и $BD = 4\sqrt{3}$. Вписаната в ромба окръжност допира страните AB, BC, CD и DA в точките M, N, P и Q съответно. Намерете лицето на четириъгълника $MNPQ$.

Решение: Нека AC и BD се пресичат в точка O. Тогава $\sphericalangle AOB = 90^\circ$, $AO = \frac{1}{2}AC = 2$ и $OB = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{3}$. По Питагоровата теорема за $\triangle ABO$ намираме $AB = \sqrt{4+12} = 4$.

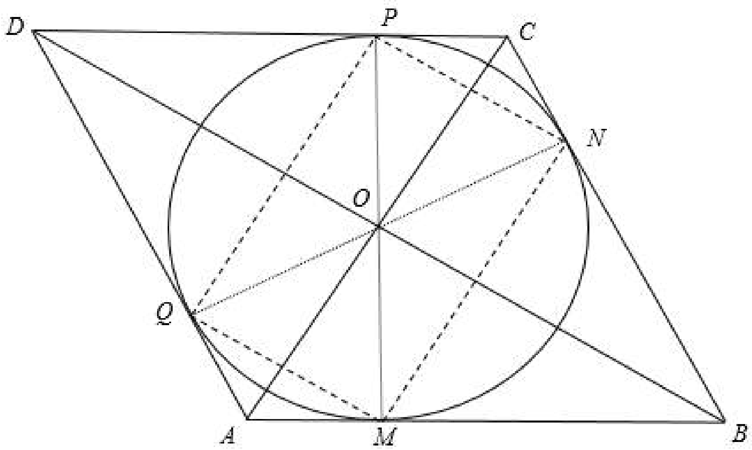
Следователно $\triangle ABC$ е равностранен и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

Точките M, O и P лежат на една права. Точките N, O и Q също лежат на една права. Тогава MP и QN са равни на височината в равностранния тригълник $\triangle ABC$. Следователно $MP = NQ = 2\sqrt{3}$.

$$S_{MNPQ} = \frac{1}{2} \cdot MP \cdot NQ \cdot \sin \sphericalangle MON = \frac{(2\sqrt{3})^2 \sin \sphericalangle MON}{2} = 6 \sin \sphericalangle MON$$

Но $\sphericalangle MON = 180^\circ - \sphericalangle MBN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Следователно $S_{MNPQ} = 6 \cdot \sin(120^\circ) = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.



. . . .

Задача 16. Намерете максималния възможен обем на прав кръгов цилиндър, чиято пълна повърхнина е равна на 120π.

Решение: Да означим с r и h радиуса и височината на цилиндъра. Пресмятаме повърхнината:

$$120\pi = S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h).$$

Така, $r(r+h) = 60$, откъдето изразяваме $h = \frac{60}{r} - r = \frac{60-r^2}{r}$. Тъй като $h > 0$, то $0 < r < \sqrt{60}$.

Обемът на цилиндъра можем да представим като функция на r:

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r(60 - r^2).$$

Търсим максимума на V за $r \in (0; \sqrt{60})$.

Намираме производната $V'(r) = \pi(60 - 3r^2)$. Следователно, $V'(r) > 0$ за $r \in (0; \sqrt{20})$ и $V'(r) < 0$ за $r \in (\sqrt{20}; \sqrt{60})$.

Функцията V расте в интервала $(0; \sqrt{20})$ и намалява в интервала $(\sqrt{20}; \sqrt{60})$.

Максималният възможен обем е $V(\sqrt{20}) = \pi\sqrt{20}(60 - 20) = 80\pi\sqrt{5}$.