СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“

Писмен конкурсен изпит по Математика

7 април 2024 г.

Тема №1.

ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

- Отбелязан е правилният отговор на всяка задача от 1. до 10.

1.	А	~~Б~~	В	Г
2.	А	Б	В	~~Г~~
3.	А	Б	~~В~~	Г
4.	А	~~Б~~	В	Г
5.	А	~~Б~~	В	Г
6.	А	Б	~~В~~	Г
7.	А	~~Б~~	В	Г
8.	~~А~~	Б	В	Г
9.	~~А~~	Б	В	Г
10.	А	Б	~~В~~	Г

- Отговори на задачи 11. и 12.

11.	$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$
12.	5

- Примерни решения на задачи от 13. до 16.

Задача 13. Решете уравнението $\log_2 x + \log_4 2x + \log_8 4x = 14$.
Решение: Допустимите стойности са $x > 0$. Означаваме $t = \log_2 x$. Тогава

$$\log_4(2x) = \frac{\log_2(2x)}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 x}{2} = \frac{1+t}{2}.$$

Аналогично

$$\log_8(4x) = \frac{\log_2(4x)}{\log_2 8} = \frac{\log_2 4 + \log_2 x}{3} = \frac{2+t}{3}.$$

Началното уравнение приема вида $t + \dfrac{1+t}{2} + \dfrac{2+t}{3} = 14$, откъдето
$6t + 3(1+t) + 2(2+t) = 84$, т.е. $11t = 77$ или $t = 7$.
Следователно единственото решение на даденото уравнение е

$$x = 2^{\log_2 x} = 2^t = 2^7 = 128.$$

. . . .

Задача 14. Правоъгълен триъгълник има лице 60 и радиус на вписаната окръжност 3. Намерете дължините на страните на триъгълника.

Решение: Нека означим страните a, b, c, като c е хипотенузата. Имаме, че $60 = \frac{ab}{2}$ и $3 = \frac{a+b-c}{2}$. Намираме, че $ab = 120$ и $a+b-c = 6$. Следователно $a+b = c+6$. Повдигаме двете страни на квадрат:

$$c^2 + 12c + 36 = (c+6)^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2 \cdot 120 = c^2 + 240.$$

Така, $12c = 240 - 36 = 204$, откъдето $c = 17$. Тогава $a + b = 23$ и $ab = 120$. Дължините a и b са корените на уравнението $t^2 - 23t + 120 = 0$. Но $t^2 - 23t + 120 = (t-8)(t-15)$. Следователно дължините на страните на триъгълника са 8, 15 и 17.

. . . .

Задача 15. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб 1. Нека точка E е от ръба BB_1, такава че $BE = \dfrac{1}{3}$. Намерете лицето на сечението на куба с равнината, определена от точките A, E и C_1.

Решение: Да означим $\pi = (AEC_1)$. BB_1 пресича π и $DD_1 || BB_1$. Тогава π пресича и правата DD_1. Нека $\pi \cap DD_1 = F$. Следователно AE и C_1F са сеченията на π с успоредните равнини (ABB_1) и (DCC_1), откъдето $AE || C_1F$. Аналогично получаваме и $AF || EC_1$. Следователно AEC_1F е успоредник и това е сечението на π с дадения куб.

Намираме $AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Също така $C_1E = \sqrt{C_1B_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

Освен това $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{3}$. Сега от косинусовата теорема за $\triangle AEC_1$ намираме

$$\cos \sphericalangle AEC_1 = \frac{AE^2 + C_1E^2 - AC_1^2}{2 \cdot AE \cdot C_1E} = \frac{\frac{10}{9} + \frac{13}{9} - 3}{2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{-\frac{4}{9}}{\frac{2\sqrt{130}}{9}} = -\frac{2}{\sqrt{130}}.$$

Тъй като $\sin \sphericalangle AEC_1 > 0$, то $\sin \sphericalangle AEC_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle AEC_1} = \sqrt{\frac{126}{130}}$.

Търсеното лице на сечението е

$$S_{AEC_1F} = 2\ S_{AEC_1} = 2 \cdot AE \cdot C_1E \cdot \sin \sphericalangle AEC_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{\frac{126}{130}} = \frac{3\sqrt{14}}{9} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Задача 16. Нека $a > 0$ и $f(x) = \sqrt{a}x^2 + 6ax - \sqrt{a} - 144$. Докажете, че уравнението $f(x) = 0$ има два реални корена. Ако тези корени са x_1 и x_2, намерете минималната възможна стойност на $|x_1 - x_2|$.

Решение: Старшият коефициент на f е положителен, докато $f(0) = -\sqrt{a} - 144 < 0$. Следователно f има два реални корена. Изразяваме $|x_1 - x_2|$ чрез a, като използваме че $x_1 + x_2 = -\dfrac{6a}{\sqrt{a}} = -6\sqrt{a}$ и $x_1 x_2 = \dfrac{-\sqrt{a} - 144}{\sqrt{a}} = -1 - \dfrac{144}{\sqrt{a}}$:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{36a + 4(1 + \frac{144}{\sqrt{a}})}.$$

Да означим $g(a) = \sqrt{36a + 4(1 + \dfrac{144}{\sqrt{a}})} = 2\sqrt{9a + 1 + \dfrac{144}{\sqrt{a}}}$.

Следователно $|x_1 - x_2|$ е минимално точно когато $g(a)$ е минимално. Но $g(a) = 2\sqrt{h(a)}$, където $h(a) = 9a + 1 + \frac{144}{\sqrt{a}}$. Достатъчно е да намерим за кое a функцията h достига минимум.

Имаме $h'(a) = 9 + 144 \cdot \Big(-\dfrac{1}{2a^{3/2}}\Big) = 9 - \dfrac{72}{a^{3/2}} = 9\Big(1 - \dfrac{8}{a^{3/2}}\Big)$.

За $0 < a < 4$ следва, че $h'(a) < 0$. При $a > 4$ имаме, че $h'(a) > 0$. Следователно функцията h намалява в интервала $(0; 4)$ и расте в интервала $(4; +\infty)$.

Така h, а следователно и g достигат минимум при $a = 4$. Търсената стойност е

$$g(4) = 2\sqrt{9 \cdot 4 + 1 + \frac{144}{\sqrt{4}}} = 2\sqrt{37 + 72} = 2\sqrt{109}.$$