Турнир по елементарна математика "Проф. Борислав Боянов"
Първи кръг, 14 февруари 2010

Задачи и примерни решения

Задача 1. Да се реши неравенството:

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1 \quad .$$

Решение. *Отговор:* $(-\infty,\,-7) \cup (-4,\,-2)$
Неравенството е еквивалентно на

$$\frac{-(13\,x^2+56)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 0$$

и на $(x+2)(x+4)(x+7) < 0$. Решенията са $x < -7$ или $-4 < x < -2$.

Задача 2. За аритметична прогресия с 2010 члена, сумата на първата половина от членовете е три пъти по-малка от сумата на втората половина от членовете. Да се намери колко пъти сумата на първата третина от членовете е по-малка от сумата на последната третина от членовете.

Решение. *Отговор:* 5
Означаваме $2010 = 6n$. По условие $S_{6n} - S_{3n} = 3S_{3n}$ или $S_{6n} = 4S_{3n}$.

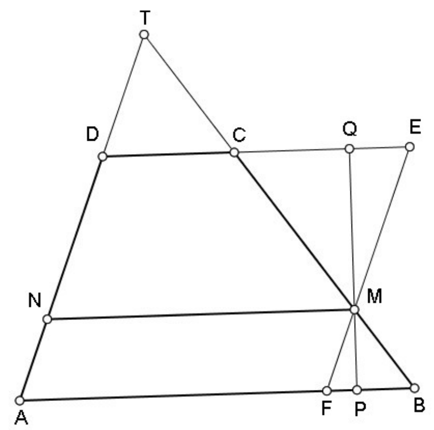
От $\dfrac{6n}{2}\,(2a_1 + (6n-1)\,d) = 4\dfrac{3n}{2}\,(2a_1 + (3n-1)\,d)$ намираме $d = 2a_1$.

Тогава $S_m = \dfrac{m}{2}\,(2a_1 + (m-1)\,2a_1) = a_1 m^2$ за всяко m .

Следователно $S_{6n} - S_{4n} = a_1\,(6n)^2 - a_1\,(4n)^2 = (3^2-2^2)\,a_1\,(2n)^2 = 5S_{2n}$.
Забележка: Решението показва, че същесвеното условие е броят на членовете на прогресията да се дели на 6 .

Задача 3. Основите на трапец са $AB = 9$ и $CD = 3$. Отсечката MN е успоредна на основите, $M \in BC$ и $N \in AD$. Да се намери отношението $S_{ABMN} : S_{NMCD}$, ако $MN = 7$.

Решение. *Отговор:* $4:5$



Нека T е пресечната точка на бедрата на трапеца. Тогава триъгълниците ABT , NMT и DCT са подобни. Следователно
$S_{ABT} : S_{NMT} : S_{DCT} = AB^2 : NM^2 : DC^2$, откъдето $S_{ABT} = 81S$, $S_{NMT} = 49S$, $S_{DCT} = 9S$,
$S_{ABMN} = S_{ABT} - S_{NMT} = 32S$ и
$S_{NMCD} = S_{NMT} - S_{DCT} = 40S$. Окончателно $S_{ABMN} : S_{NMCD} = 32S : 40S = 4:5$.

Алтернативен подход: През M построяваме права FE ($F \in AB,\ E \in CD$), успоредна на AD . Тогава $FB = AB - NM = 2$, $CE = NM - CD = 4$ и триъгълниците FBM и ECM са подобни. За отношението на височините им MP и MQ намираме $\dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{FB}{CE} = \dfrac{1}{2}$.

Тогава
$$\frac{S_{ABMN}}{S_{NMCD}} = \frac{\dfrac{(AB+MN)\,MP}{2}}{\dfrac{(MN+CD)\,MQ}{2}} = \frac{8MP}{5MQ} = \frac{4}{5}\,.$$

Задача 4. Да се реши системата:
$$\left|\begin{array}{l} \left(x^2+y^2\right)^2 \;=\; 2xy \\ |x+y| \;=\; \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \qquad .$$

Решение. *Отговор:* $\left(\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{8}\,;\,\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{8}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{8}\,;\,\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{8}\right)$,

$\left(-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{8}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{8}\,;\,-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{8}\right)$

Повдигаме второто уравнение на квадрат и, след заместване на $2xy$ от първото уравнение, намираме $\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right) = \dfrac{5}{16}$. Уравнението $v^2+v-\dfrac{5}{16} = 0$ има един неотрицателен корен $v=\dfrac{1}{4}$. Тогава $xy=\dfrac{1}{32}$. Решенията на системата

$$\left|\begin{array}{l} xy \;=\; \dfrac{1}{32} \\ x+y \;=\; \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \qquad \text{се състоят от корените на уравнението} \quad t^2-\frac{\sqrt{5}}{4}t+\frac{1}{32} \;=\; 0 \;\;,$$

$$\text{а на} \quad \left|\begin{array}{l} xy \;=\; \dfrac{1}{32} \\ x+y \;=\; -\dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \qquad \text{— от противоположните числа} \;\;.$$

Алтернативен подход: преставяме първото уравнение във вида $\left(|x+y|^2-2xy\right)^2 \;=\; 2xy$. След заместване на $|x+y|$ от второто уравнение и полагане $u=2xy$, достигаме до уравнението $u^2-\dfrac{13}{8}u+\dfrac{25}{256}=0$, с корени $u_1=\dfrac{1}{16}$ и $u_2=\dfrac{25}{16}$. Системата

$$\left|\begin{array}{l} 2xy \;=\; \dfrac{25}{16} \\ |x+y| \;=\; \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \qquad \text{няма решение,}$$

а решенията на другата система се намират по показания вече начин.

Задача 5. Да се реши уравнението:
$$(2\sin x\,-\,1)\,(\sin x\,+\,1) \;=\; \cos x \quad .$$

Решение. *Отговор:* $\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$, $\pi+2m\pi$; k, n, m — цели числа.

Представяме уравнението във вида
$$2\sin^2 x\,+\,\sin x\,-\,\left(\sin^2 x\,+\,\cos^2 x\right) \;=\; \cos x \quad ,$$
или
$$(\sin x\,-\,\cos x)\,(\sin x\,+\,\cos x) \;=\; \cos x\,-\,\sin x \quad .$$

Тогава $\sin x - \cos x = 0$, с решения $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; k — цяло; или $\sin x + \cos x = -1$, еквивалентно на $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, с решения $-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\pi + 2m\pi$; n, m — цели.

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{x^2 - x} < (x+2)\,|x-3| \quad .$$

Решение. *Отговор:* $\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\ 0\right] \cup \left[1,\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2},\ +\infty\right)$

Допустимите стойности са $x^2 - x \geq 0$. Неравенството няма решения за $x < -2$. Следователно неравенството е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - x \geq 0 \\ x \geq -2 \\ x^2 - x < \left((x+2)\,|x-3|\right)^2 \end{array}\right. \quad .$$

Решенията на първото неравенство са $(-\infty,\ 0] \cup [1,\ +\infty)$. За да решим третото, полагаме $y = x^2 - x - 6$. Решенията на $y + 6 < y^2$ са $(-\infty,\ -2) \cup (3,\ +\infty)$. От $x^2 - x - 6 < -2$ намираме $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$, а $x^2 - x - 6 > 3$ дава $x \in \left(-\infty,\ \dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2},\ +\infty\right)$, т.е. решенията на третото неравенство са $\left(-\infty,\ \dfrac{1-\sqrt{37}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{37}}{2},\ +\infty\right)$.

Задача 7. Да се намерят всички реални стойности на b, за които уравнението $\log_{x+b}\left(4x + b^2\right) = 2$ има единствен корен.

Решение. *Отговор:* $(-\infty,\ 0] \cup \{1,\ 2,\ 3\} \cup [4,\ +\infty)$

Всяко решение на даденото уравнение е решение и на уравнението $(x+b)^2 = 4x + b^2$, т.е. възможните решения са 0 и $4 - 2b$. Решението е единствено когато:

1) двете решения съвпадат и общата им стойност е допустима — намираме $b = 2$.

2) 0 е допустима стойност, а $4 - 2b$ — не е, т.е. $b > 0$, $b \neq 1$, $b^2 > 0$ и е изпълнено поне едно от трите: $4 - b \leq 0$ или $4 - b = 1$ или $4\,(4 - 2\,b) + b^2 \leq 0$. Намираме $b \in \{3\} \cup [4,\ +\infty)$.

3) $4 - 2b$ е допустима стойност, а 0 — не е, т.е. $4 - b > 0$, $4 - b \neq 1$, $4\,(4 - 2\,b) + b^2 > 0$ и е изпълнено поне едно от трите: $b \leq 0$ или $b = 1$ или $b^2 \leq 0$. Намираме $b \in (-\infty,\ 0] \cup \{1\}$.

Забележка: условието на задачата включва малко двусмислие: "Стойностите на b, за които даденото уравнение няма решение, са ли или не са решения на задачата?". Такива стойности обаче няма, както е видно по-горе.

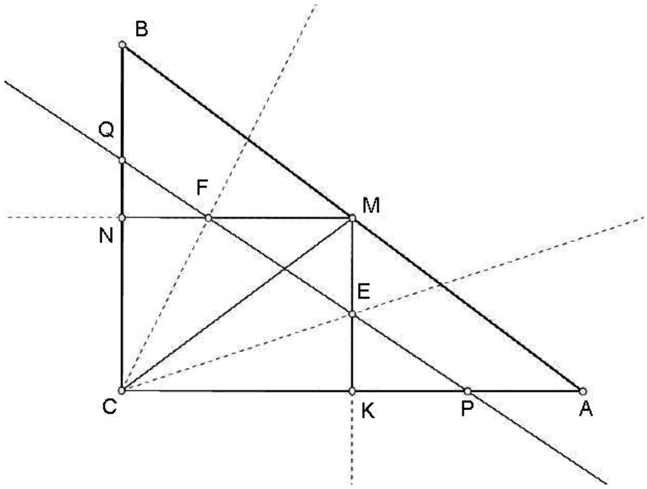
Задача 8. В правоъгълния триъгълник ABC катетите са $AC = 8$ и $BC = 6$, а M е средата на хипотенузата. Да се намери лицето на триъгълника, който правата, минаваща през центровете на вписаните в $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ окръжности, отсича от $\triangle ABC$.

Решение. *Отговор:* 12

Нека средите на AC и BC са съответно K и N, центровете на вписаните в $\triangle ACM$ и в $\triangle BCM$ — E и F, пресечните точки на правата EF с AC и с BC — P и Q. Използваме и стандартните означения $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Тогава $CM = \dfrac{c}{2}$, а понеже $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ са равнобедрени, то $E \in MK$ и $F \in MN$. CE и CF са ъглополовящи съответно в $\triangle CKM$ и $\triangle CNM$, откъдето $\dfrac{EK}{EM} = \dfrac{CK}{CM} = \dfrac{b}{c}$ и $\dfrac{FN}{FM} = \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{a}{c}$.

От друга страна, триъгълниците EKP, EMF и QNF са подобни, което ни дава $\dfrac{S_{EKP}}{S_{EMF}} = \left(\dfrac{EK}{EM}\right)^2 = \dfrac{b^2}{c^2}$ и $\dfrac{S_{QNF}}{S_{EMF}} = \left(\dfrac{FN}{FM}\right)^2 = \dfrac{a^2}{c^2}$.

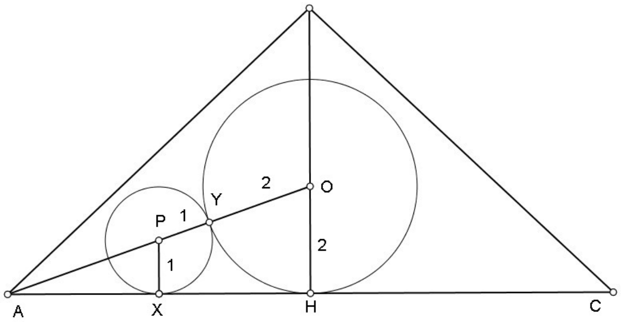
Следователно $S_{EKP} + S_{QNF} = \left(\dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{a^2}{c^2}\right) S_{EMF} = S_{EMF}$, откъдето
$S_{CPQ} = S_{CKMN} - S_{EMF} + S_{EKP} + S_{QNF} = S_{CKMN} = \dfrac{1}{2} S_{ABC} = 12$.

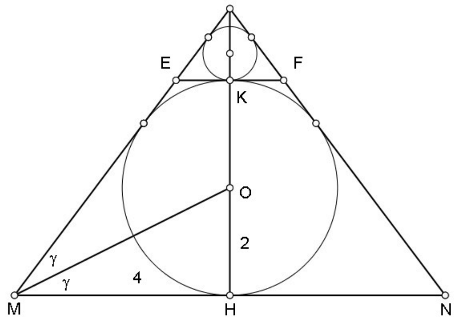


Задача 9. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ е вписана сфера с радиус $R = 2$. Втора сфера, с радиус $r = 1$ се допира до първата, до основата $ABCD$ и до околните стени ABV и ADV. Да се намери радиусът на сферата, която се допира до всички околни стени и до вписаната в пирамидата сфера.

Решение. *Отговор:* $\dfrac{1}{2}$

Означаваме с O центъра на вписаната сфера, а с H — допирната ѝ точка с основата (центъра на основата). Понеже втората се допира до равнините ABV и ADV, а пирамидата е правилна, то центърът ѝ лежи в равнината ACV. Тя се допира и до основата (както и вписаната сфера) — следователно $P \in (ABO)$ и $P \in AO$. Допирната точка Y на двете сфери лежи на AO, а допирната точка X на втората с основата е върху AH. PX е средна отсечка в $\triangle AHO$, откъдето $AO = 6$, $AH = 4\sqrt{2}$ и $AB = 8$.





Нека M и N са средите на AD и BC. Центърът на третата сфера, а заедно с него и допирната ѝ точка K с вписаната сфера, лежи на височината VH. Следователно централна окръжност на тази сфера се допира до MV и NV и до централната окръжност на вписаната сфера, вписана в $\triangle MNV$.

Ако $\sphericalangle HMO = \gamma$, то $\sphericalangle HMV = 2\gamma$ и $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{OH}{MK} = \dfrac{1}{2}$. Тогава
$VH = MH \operatorname{tg} 2\gamma = 4. \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma} = \dfrac{16}{3}$ и $VK = VH - KH = \dfrac{4}{3}$. От подобието на $\triangle MNV$ и $\triangle EFV$

получаваме за търсения радиус ρ : $\dfrac{\rho}{R} = \dfrac{VK}{VH} = \dfrac{1}{4}$, т.е. $\rho = \dfrac{1}{2}$.

Задача 10. Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, не по-голямо от x (примери: $[7] = 7$, $\left[\dfrac{22}{7}\right] = 3$, $\left[-\dfrac{7}{2}\right] = -4$).

Да се реши уравнението:

$$\left[\frac{2009}{x}\right] + \left[\frac{2010}{x}\right] + \left[\frac{2011}{x}\right] = 2010 \quad .$$

Решение. *Отговор:* Решение е всяко число от интервала $\left(\dfrac{2011}{671}, \dfrac{2009}{670}\right]$

Ясно е, че уравнението не може да има неположителни решения.

Имаме $\left[\dfrac{2009}{x}\right] \le \left[\dfrac{2010}{x}\right] \le \left[\dfrac{2011}{x}\right]$. Ако $\left[\dfrac{2009}{x}\right] \le 669$, то $\left[\dfrac{2010}{x}\right] + \left[\dfrac{2011}{x}\right] \ge 1341$ и,

следователно, $\left[\dfrac{2011}{x}\right] \ge 671$. Тогава $\dfrac{2009}{x} < 670$ и $\dfrac{2011}{x} \ge 671$, откъдето $\dfrac{2}{x} > 1$ и $x < 2$.

Това означава, че $\dfrac{2009}{x} > 1004$, което противоречи на допускането.

Следователно $\left[\dfrac{2009}{x}\right] = \left[\dfrac{2010}{x}\right] = \left[\dfrac{2011}{x}\right] = 670$, което е еквивалентно на

$670 \le \dfrac{2009}{x} < \dfrac{2010}{x} < \dfrac{2011}{x} < 671$ или $\dfrac{2011}{671} < x \le \dfrac{2009}{670}$.