СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „Св. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Писмен конкурсен изпит по математика, 25 юли 2006 г.
ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 1

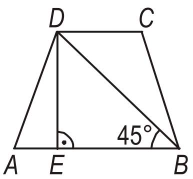
Задача 1. Да се реши уравнението $\left|x^2-2x-3\right|=3-3x$.

Решение. При $3-3x\geq 0$, т.е. $x\leq 1$ имаме $\left|x^2-2x-3\right|=3-3x \Leftrightarrow (1)\ x^2-2x-3=3-3x$ и $(2)\ x^2-2x-3=-(3-3x)$. Корените на (1) и (2) са съответно $x=2$, $x=-3$ и $x=0$, $x=5$. Предвид $x\leq 1$ решенията на даденото уравнение са $x=-3$ и $x=0$.

Задача 2. Да се реши системата уравнения $\begin{vmatrix} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2-y^2+x+y=6 \end{vmatrix}$.

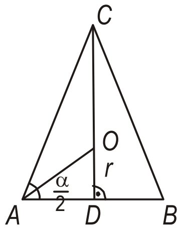
Решение. Ясно е, че ако $(x;y)$ е решение на системата, то $x\neq 0$ и $y\neq 0$. Разделяме първото уравнение на y^2 и получаваме $\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}\right)+2=0$, откъдето $\frac{x}{y}=1$ и $\frac{x}{y}=2$. При $x=y$ от второто уравнение намираме $y=3$ и оттук $x=3$. При $x=2y$ от второто уравнение намираме $y=1$ и $y=-2$ и оттук съответно $x=2$ и $x=-4$. Решенията на дадената система са $(3;3)$, $(2;1)$ и $(-4;-2)$.

Задача 3. Даден е трапец *ABCD* с основи $AB=24$, $CD=10$ и бедра $AD=BC=13\sqrt{2}$. Да се намери дължината на радиуса на описаната около трапеца окръжност.



Решение. Нека $DE\perp AB$ $(E\in AB)$. Имаме $AE=\frac{AB-CD}{2}=7$, $BE=AB-AE=17$ и $DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=17$. Тъй като $DE=BE$, то $\sphericalangle ABD=45^\circ$. Тогава за радиуса *R* на описаната около трапеца окръжност от ΔABD по синусовата теорема получаваме $R=\frac{AD}{2\sin\sphericalangle ABD}=13$.

Задача 4. Даден е равнобедрен триъгълник *ABC* с основа $AB=4$ и радиус на вписаната окръжност $r=\sqrt{2}$. Да се намерят дължината на бедрото и лицето на триъгълника.



Решение. Нека *D* е средата на *AB*, *O* е центърът на вписаната окръжност и $\sphericalangle BAC=\alpha$. Тогава $\sphericalangle OAD=\frac{\alpha}{2}$ и (от ΔADO) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OD}{AD}=\frac{2r}{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Оттук $\cos\alpha=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{3}$. От ΔADC намираме $AC=\frac{AD}{\cos\alpha}=6$. Лицето на ΔABC е $S=pr=8\sqrt{2}$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{x^2-5x+4}\geq 2-3x$.

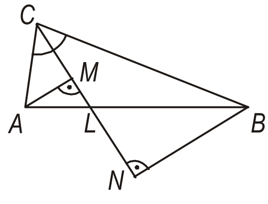
Решение. Неравенството има смисъл при $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. При $2-3x\leq 0$, т.е. $x\geq\frac{2}{3}$, то очевидно е изпълнено. Следователно всички $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]\cup[4;+\infty)$ са решения. Нека $x\leq\frac{2}{3}$. Тогава $\sqrt{x^2-5x+4}\geq 2-3x \Leftrightarrow x^2-5x+4\geq(2-3x)^2$ $\Leftrightarrow 8x^2-7x\leq 0$. Решенията на това неравенство са $x\in\left[0;\frac{7}{8}\right]$ и предвид $x\leq\frac{2}{3}$ получаваме $x\in\left[0;\frac{2}{3}\right]$.

Окончателно, решенията на даденото неравенство са $x\in[0;1]\cup[4;+\infty)$.

Задача 6. Дадена е функцията $f(x)=x^3-ax^2+abx$, която при $x=a$ има локален минимум**,** чиято стойност е равна на *b*. Да се намерят числата *a* и *b*.

Решение. От условието на задачата имаме $\begin{vmatrix} f(a)=b \\ f'(a)=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a^2b=b \\ a^2+ab=0 \end{vmatrix}$. Решенията на последната система са: $a=0$, $b=0$; $a=-1$, $b=1$ и $a=1$, $b=-1$. Числата $a=0$, $b=0$ не са решение на задачата, защото $f(x)=x^3$ е растяща функция и няма локален екстремум. Числата $a=-1$, $b=1$ също не са решение на задачата, защото функцията $f(x)=x^3+x^2-x$ при $x=-1$ има локален максимум, а не минимум. Функцията $f(x)=x^3-x^2-x$ при $x=1$ има локален минимум, равен на –1. Следователно $a=1$, $b=-1$ са единственото решение на задачата.

Задача 7. Даден е триъгълник *ABC* с лице $S=4\sqrt{10}$. Разстоянията от върховете *A* и *B* до ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ са съответно равни на 1 и 3. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

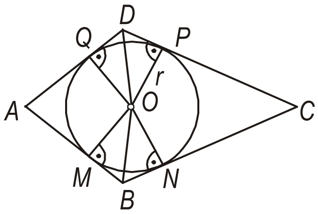


Решение. Съгласно условието $AM=1$, $BN=3$. От $\Delta AML\sim\Delta BNL$ намираме $\frac{AL}{AM}=\frac{BL}{BN}$, откъдето $BL=3AL$ или $AL=x$, $BL=3x$. От друга страна, от свойството на ъглополовящата имаме $\frac{AC}{AL}=\frac{BC}{BL}$, откъдето $BC=3AC$ или $AC=y$, $BC=3y$. От хероновата формула за лицето S на триъгълника получаваме $S=\sqrt{(2y+2x)(2y-2x)(2x-y)(2x+y)}=2\sqrt{(y^2-x^2)(4x^2-y^2)}$, откъдето (1) $2\sqrt{10}=\sqrt{(y^2-x^2)(4x^2-y^2)}$. От друга страна $S=S_{ALC}+S_{BLC}$, $4\sqrt{10}=S=\frac{1}{2}CL(1+3)$ или $CL=2\sqrt{10}$. От формулата за ъглополовящата имаме $CL^2=AC.BC-AL.BL$ или $(2)\ 40=3(y^2-x^2)$. Сега от (1) получаваме $2\sqrt{10}=\sqrt{\frac{40}{3}(4x^2-y^2)}$ или $(3)\ 3=4x^2-y^2$. От равенствата (2) и (3) намираме $x=\frac{7}{3}$, $y=\frac{13}{3}$, откъдето получаваме $AB=\frac{28}{3}$, $BC=13$ и $AC=\frac{13}{3}$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, за които всяко решение на неравенството $ax^2-(2a-1)x-2\geq 0$ е решение и на неравенството $x+a\geq 0$.

Решение. Ако $a=0$, неравенството (1) $ax^2-(2a-1)x-2\geq 0$ става $x-2\geq 0$ и очевидно всяко негово решение е решение на неравенството $x\geq 0$, т.е $a=0$ е решение на задачата. При $a>0$, понеже $D=(2a+1)^2>0$, решението на (1) е обединение на два безкрайни непресичащи се интервала и очевидно не всяко решение на (1) е решение на $x+a\geq 0$. Ако $a<0$, решението на (1) е интервалът $[x_1;x_2]$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $ax^2-(2a-1)x-2=0$. Всяко решение на (1) е решение на $x+a\geq 0$ тогава и само тогава, когато корените x_1 и x_2 удовлетворяват неравенството $x+a\geq 0$. Понеже корените са 2 и $-\frac{1}{a}$, то $2\geq -a\Leftrightarrow a\geq -2$ и $-\frac{1}{a}\geq -a\Leftrightarrow a^2\leq 1$, т.е. решение е всяко $a\in[-1;0)$. Окончателно, решението на задачата е всяко $a\in[-1;0]$.

Задача 9. Около окръжност с радиус $r=1$ е описан изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с диагонал $BD=\sqrt{5}$ и $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=120^\circ$. Да се намери лицето на четириъгълника.



Решение. Нека *O* е центърът на вписаната в четириъгълника окръжност, а *M*, *N*, *P* и *Q* са допирните точки на окръжността със страните *AB*, *BC*, *CD* и *DA*. От $\sphericalangle ABO=\sphericalangle CBO=\sphericalangle CDO=\sphericalangle ADO=60^\circ$ и $\sphericalangle OMB=\sphericalangle ONB=\sphericalangle OPD=\sphericalangle OQD=90^\circ$ получаваме, че $\Delta OMB\cong\Delta ONB\cong\Delta OPD\cong\Delta OQD$. Следователно $BM=BN==DP=DQ$. От друга страна, от свойството на допирателните имаме $AM=AQ$ и $CN=CP$. Така получаваме, че $AB=AD=x$ и $CB=CD=y$. От тези равенства имаме, че $\Delta ACB\cong\Delta ACD$ и че правата *AC* е симетрала на *BD*. Поради това $S_{ABCD}=2S_{ACD}=AD.CD\sin 120^\circ=xy\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC.BD$. Понеже четириъгълникът е описан, $S_{ABCD}=pr=x+y$. Така намираме $(1)\ x+y=xy\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $(2)\ xy\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}AC$, а от косинусовата теорема за ΔACD имаме $x^2+y^2+xy=AC^2$. От последното равенство, (2) и (1) последователно получаваме $(x+y)^2-xy=\frac{3}{5}(xy)^2$, $\frac{3}{20}(xy)^2-xy=0$, $xy=\frac{20}{3}$ и $S_{ABCD}=\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

Задача 10. Да се намерят стойностите на реалните параметри *b* и *c*, за които неравенството $|8x^2+bx+c|\leq 1$ е изпълнено за всяко число *x* от интервала $[0;1]$.

Решение. Нека неравенството $|8x^2+bx+c|\leq 1$ е изпълнено за всяко $x\in[0;1]$.Тогава то е изпълнено при $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$, т.е. $|c|\leq 1$, $\left|2+\frac{b}{2}+c\right|\leq 1$ и $|8+b+c|\leq 1$. Тези неравенства са равносилни съответно с $(1)\ -1\leq c\leq 1$, $(2)\ -6\leq b+2c\leq -2$ и $(3)\ -9\leq b+c\leq -7$. Лявото неравенство (2) е $b+2c\geq -6$, а дясното неравенство (3) е равносилно с $-b-c\geq 7$. Събираме почленно тези две неравенства и получаваме $c\geq 1$. От друга страна $c\leq 1$ от (1). Следователно $c=1$. При $c=1$ неравенството $b+2c\geq -6$ става $b\geq -8$, а неравенството $-b-c\geq 7$ става $-b\geq 8$, т.е. $b\leq -8$. Следователно $b=-8$.

Остава да докажем, че при $b=-8$ и $c=1$ условието на задачата действително е изпълнено, т.е. че неравенството $|8x^2-8x+1|\leq 1$ е изпълнено за всяко $x\in[0;1]$. Имаме $|8x^2-8x+1|\leq 1\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}8x^2-8x+1\geq -1\\8x^2-8x+1\leq 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}(2x-1)^2\geq 0\\x(x-1)\leq 0\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow x\in[0;1]$. Така неравенството $|8x^2-8x+1|\leq 1$ наистина е изпълнено за всяко $x\in[0;1]$ (и само за тези *x*). Следователно търсените стойности на параметрите са $b=-8$ и $c=1$.

Всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.