Софийски Университет “Св. Климент Охридски”

Писмен конкурсен изпит по математика, 26 юли 2007г.

ТЕМА 3

Задача 1. Решете уравнението $\log_2 \dfrac{5-x}{\sqrt{1-x}} = 2$.

Задача 2. Лицето на ромб $ABCD$ е равно на 120, а радиусът на вписаната в него окръжност е равен на $\dfrac{60}{13}$. Намерете дължините на диагоналите AC и BD.

Задача 3. Намерете всички решения на уравнението $\sin^2 x + 6\sin^2 \dfrac{x}{2} = 4$.

Задача 4. Около остроъгълен триъгълник ABC със страна $BC = \sqrt{3}$ е описана окръжност с радиус 1. От върха A е спуснат перпендикуляр към допирателната към окръжността през върха C, който пресича допирателната в точка M и $CM = 1$. Намерете големината на $\sphericalangle ACB$.

Задача 5. Намерете всички стойности на реалния параметър p, при които неравенствата

$$-9 \leq \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} \leq 6$$

са изпълнени за всяко реално число x.

Задача 6. Най-малката и най-голямата страни в триъгълника ABC са $BC = 4$ и $AB = 9$. Намерете дължината на страната AC, ако е дадено, че ΔABC е подобен на триъгълник с дължини на страните, равни на височините на ΔABC.

Задача 7. Нека n е естествено число. Докажете, че за всяко число $x > 0$ е изпълнено неравенството

$$(x+1)^n + \left(\frac{1}{x} + 1\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Задача 8. В триъгълника ABC дължините на медианата CM от върха C $(M \in AB)$ и ъглополовящата BL на $\sphericalangle ABC$ $(L \in AC)$ се отнасят както $5:6$, около четириъгълника $MBCL$ може да се опише окръжност и $AB = 18$. Намерете дължините на страните AC и BC.

Задача 9. Нека G е медицентър на правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Намерете възможно най-голямата стойност на $\operatorname{cotg} \sphericalangle AGB$.

Задача 10. Дадени са функциите $f(x) = x^2 + ax + b$ и $g(x) = x^2 - ax + c$, където реалните числа a, b и c удовлетворяват неравенството $2a^2(b+c) + (b-c)^2 < 0$. Докажете, че всяко от уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ има реални и различни корени.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!