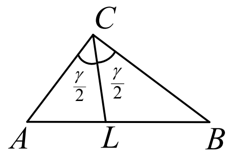
Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика
10 юли 2008 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

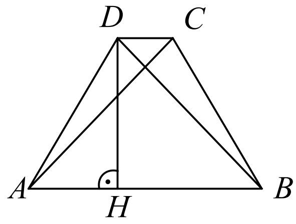
Задача 1. Вторият и петият член на геометрична прогресия са съответно равни на 14 и 112. Да се намери сборът на първите 6 члена.
Решение: Нека a_1 и q са първият член и частното на прогресията. От $a_2 = a_1 q = 14$ и $a_5 = a_1 q^4 = 112$ намираме $q^3 = 8$, откъдето $q = 2$ и $a_1 = 7$. Тогава $S_6 = a_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 7 \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 7.63 = 441$.

Задача 2. Даден е триъгълник *ABC* със страни *CA* = 3, *CB* = 4 и ъглополовяща $CL = \frac{12\sqrt{2}}{7}$. Да се намери лицето на триъгълника.
Решение: Нека $\angle ACB = \gamma$. Тогава по формулата за ъглополовящата $l_c = \frac{2ab}{a+b} \cos\frac{\gamma}{2}$ имаме $\frac{12\sqrt{2}}{7} = \frac{2.3.4}{3+4} \cos\frac{\gamma}{2}$, откъдето $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$ и $\gamma = 90^\circ$. Следователно $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC.CB \sin\gamma = \frac{1}{2} 3.4.1 = 6$.



Задача 3 Да се реши уравнението $\frac{1}{x+1} - \frac{7x+4}{(x+1)(x-2)} = 3$.
Решение: Областта на допустимите стойности е $x \neq -1$ и $x \neq 2$. В нея уравнението е еквивалентно на $x - 2 - 7x - 4 = 3x^2 - 3x - 6$ или $3x(x+1) = 0$, чиито корени са $x = -1$ и $x = 0$. Но $x = -1$ не е от областта на допустимите стойности. Следователно уравнението има единствен корен $x = 0$.

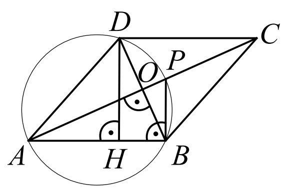
Задача 4. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB > CD)$ с основа *AB* =21, бедро *AD* = 16, и диагонал *AC* = 19. Да се намери периметърът на трапеца.
Решение: Понеже $ABCD$ е равнобедрен трапец, то $AC = BD = 19$. От ΔABD намираме $\cos\angle BAD = \frac{16^2 + 21^2 - 19^2}{2.16.21} = \frac{1}{2}$. Нека $DH \perp AB$. От ΔAHD намираме $AH = 8$. За малката основа CD имаме $CD = AB - 2.AH = 5$. Тогава $P_{ABCD} = AB + CD + 2AD = 58$.



Задача 5. Да се реши уравнението $\sqrt{\sin 3x - \sin x + 2} = \sqrt{2} \sin 2x$.
Решение: Тъй като $|\sin 3x| \leq 1$ и $|\sin x| \leq 1$, то $\sin 3x - \sin x + 2 \geq 0$. При $\sin 2x \geq 0$ уравнението е еквивалентно на $\sin 3x - \sin x + 2 = 2\sin^2 2x$ или $\sin x \cos 2x + \cos^2 2x = 0$, или $\cos 2x\left(\sin x + 1 - \sin^2 2x\right) = 0$, т.е. $\cos 2x(1 - \sin x)(1 + 2\sin x) = 0$. Нека $\cos 2x = 0$, т.е. $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, откъдето $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$, където k е цяло число. Нека $1 - \sin x = 0$, т.е. $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$, където l е цяло число. Нека $1 + 2\sin x = 0$, т.е. $x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$ или $x_4 = \frac{11\pi}{6} + 2n\pi$ където m и n са цели числа.
Проверяваме, кои от получените решения удовлетворяват $\sin 2x \geq 0$: $\sin 2x_1 = 1$, при $k = 2k_1$ – четно; $\sin 2x_1 = -1$, при k – нечетно; $\sin 2x_2 = 0$; $\sin 2x_3 = \sin\frac{\pi}{3} > 0$; $\sin 2x_4 = \sin\frac{5\pi}{3} < 0$.
Окончателно решенията са: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\pi$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ и $x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2m\pi$.

Задача 6. Даден е ромб $ABCD$ с остър ъгъл при върха *A*. Окръжността описана около триъгълника *ABD* пресича диагонала *AC* в точка *P*. Ако $AP = 5\sqrt{5}$ и $PC = 3\sqrt{5}$, да се намери радиусът *r* на окръжността вписана в ромба.

Решение: Тъй като AC е симетрала на BD, то AP е диаметър на окръжността описана около ΔABD. Тогава $\sphericalangle ABP = 90^\circ$ и $\Delta ABP \sim \Delta AOB$. Оттук $\frac{AB}{AO} = \frac{AP}{AB}$, т.е. $AB^2 = AP.AO$. Тъй като $AO = 4\sqrt{5}$, то $AB = 10$. От ΔABD намираме $\sin\sphericalangle DAB = \frac{4}{5}$. Тогава, ако DH е височината на ромба, $DH = AD.\sin\sphericalangle DAB = 10.\frac{4}{5} = 8$. Тъй като $r = \frac{1}{2}DH$, то $r = 4$.



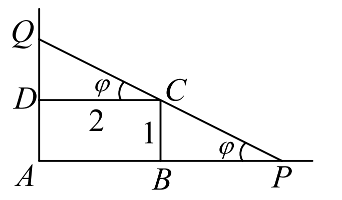
Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството $\frac{x}{ax-1} \geq \frac{2}{x}$ е изпълнено за всяко $x \geq 2$.

Решение: При $x \geq 2$ и $ax - 1 \neq 0$ неравенството е еквивалентно на $(ax-1)\left(x^2 - 2ax + 2\right) \geq 0$. При $a = 0$ имаме $-\left(x^2 + 2\right) \geq 0$, което няма решение. При $a < 0$, $x \geq 2$ имаме $ax - 1 < 0$, така че трябва $g(x) = x^2 - 2ax + 2 \leq 0$. Нека $D = a^2 - 2$ е дискриминантата на $g(x)$. При $D < 0$, $g(x) > 0$, а при $D \geq 0$ решението на $g(x) \leq 0$ е краен интервал. Следователно $a > 0$. При $a > 0$ и $D < 0$ $ax - 1 > 0$ при $a \in \left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$. Ако $D \geq 0$, $g(x) \geq 0$ за всяко $x \geq 2$, при $a \leq 2$ и $g(2) = 6 - 4a \geq 0$, т.е. $a \leq \frac{3}{2}$. Оттук $a \in \left[\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right]$. Окончателно $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Задача 8. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 2$ и $BC = 1$. Права през върха C, която не пресича страните на правоъгълника, пресича правите AB и AD съответно в точки P и Q. Да се намери тангенсът на ъгъла APQ, за който отсечката PQ има най-малка дължина.

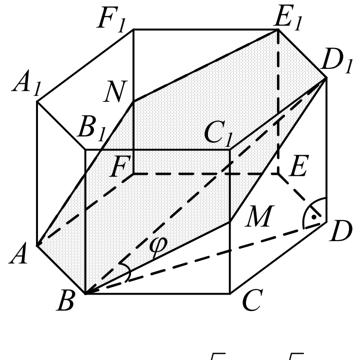
Решение: Нека $\sphericalangle APQ = \varphi$. Тогава $PQ = PC + CQ = \frac{BC}{\sin\varphi} + \frac{CD}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}$. Означаваме $f(\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Имаме $f'(\varphi) = -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{2\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{2\sin^3\varphi - \cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \cos\varphi\frac{2\mathrm{tg}^3\varphi - 1}{\sin^2\varphi}$.

$f'(\varphi) = 0$ при $\mathrm{tg}^3\varphi = \frac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Тъй като $f'(\varphi) < 0$ при $\mathrm{tg}\varphi < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $f'(\varphi) > 0$ при $\mathrm{tg}\varphi > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и $\mathrm{tg}\varphi$ е растяща функция при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, то $f(\varphi)$ има единствен екстремум, който е минимум. Следователно PQ има най-малка дължина при $\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.



Задача 9. Дадена е правилна шестоъгълна призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, такава че основният ръб е равен на околния ръб. Да се намери лицето на сечението на равнина α, определена от точките A, B и D_1 с призмата, ако $AB = 1$.

Решение: Понеже призмата е правилна, то $AB \parallel DE$. Тогава $AB \parallel D_1E_1$ и ръбът E_1D_1 лежи в α. Ако $\alpha \cap CC_1 = M$, $\alpha \cap FF_1 = N$, сечението на α с призмата е шестоъгълника $ABMD_1E_1N$. Ортогоналната проекция на $ABMD_1E_1N$ върху основата на призмата е $ABCDEF$. Ако $S_{ABMD_1E_1N} = S$, $S_{ABCDEF} = S'$ и $\varphi = \sphericalangle\left[\alpha, (ABC)\right]$, то $S' = S\cos\varphi$. Понеже $BD \perp AB$, $DD_1 \perp AB$, то $AB \perp (BDD_1)$ и $\varphi = \sphericalangle DBD_1$. От ΔBCD намираме $BD = \sqrt{3}$, а от правоъгълния ΔBDD_1 – $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тъй като $S' = 6.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, то $S = 3$.



Задача 10. Нека a, b и c са реални числа и $f(x)=x^2+ax+b$. Ако уравнението $f(x)=0$ има два различни реални корена, а уравнението $\left(x^2-2x+c\right)^2+a\left(x^2-2x+c\right)+b=0$ няма реални корени, да се докаже, че $f(c)>1$.

Решение: Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x)=0$. Тогава $f(x)=\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$. Тъй като уравнението $f\left(x^2-2x+c\right)=\left(x^2-2x+c\right)^2+a\left(x^2-2x+c\right)+b=0$ няма реални корени, то $f\left(x^2-2x+c\right)=\left(x^2-2x+c-x_1\right)\left(x^2-2x+c-x_2\right)\neq 0$ за всяко x. Тогава квадратните уравнения $x^2-2x+c-x_1=0$ и $x^2-2x+c-x_2=0$ нямат реални корени, т.е. дискриминантите им са отрицателни: $1-\left(c-x_1\right)<0$ и $1-\left(c-x_2\right)<0$. Оттук следва, че $c-x_1>1$ и $c-x_2>1$. Тогава $f(c)=\left(c-x_1\right)\left(c-x_2\right)>1.1=1$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.