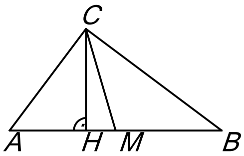
Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика
18 май 2008 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Петият и деветнадесетият член на аритметична прогресия са съответно равни на 9 и 37. Да се намери сборът на първите 29 члена.

Решение: Нека a_1 и d са първият член и разликата на прогресията. От $a_5 = a_1 + 4d = 9$ и $a_{19} = a_1 + 18d = 37$ намираме $a_1 = 1$ и $d = 2$. Тогава $S_{29} = \frac{2a_1+28d}{2}.29 = 841$



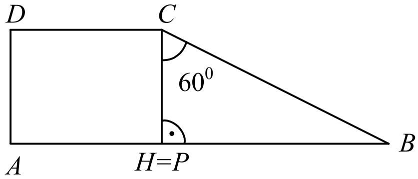
Задача 2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$) с медиана $CM = \frac{5}{2}$ и височина $CH = \frac{12}{5}$. Да се намерят дължините на катетите на триъгълника.

Решение: Тъй като $AB = 2CM = 5$, то $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = 6$. От друга страна, $AC.BC = 2S_{ABC} = 12$ и $AC^2 + BC^2 = AB^2 = 25$. Оттук намираме $AC = 3$, $BC = 4$ или $AC = 4$, $BC = 3$.

Задача 3. Да се реши уравнението $\left(2^{4x^2-1} - 5\right)^2 = 9$.

Решение: Уравнението е еквивалентно на $2^{4x^2-1} = 8$ или $2^{4x^2-1} = 2$. Оттук $4x^2 - 1 = 3$ или $4x^2 - 1 = 1$. Следователно корените на уравнението са, $x_{1,2} = \pm 1; x_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Даден е трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD, AB > CD)$ с лице 6, бедра $AD = 2$, $BC = 4$ и ъгъл между бедрата 60^0. Да се намерят основите на трапеца.

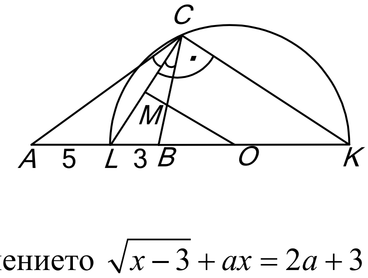


Решение: Нека $AB = a$, $CD = b$ и $CP \parallel AD$. Тогава $CP = AD$, $\sphericalangle BCP = 60^\circ$ и $PB = a - b$. От ΔBCP намираме $PB^2 = PC^2 + BC^2 - 2PC.BC\cos 60^\circ = 3$, т.е. $a - b = 2\sqrt{3}$ (1). Ако $CH \perp AB$, за ΔBCP имаме $2S_{BCP} = CH.PB = CP.BC\sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$, откъдето $CH = 2$. От $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}.2 = 6$ получаваме $a + b = 6$ (2). От (1) и (2): $a = 3 + \sqrt{3}$, $b = 3 - \sqrt{3}$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_3 \frac{x-1}{x-3} - 2\log_3 \frac{1-x}{x-5} < 0$.

Решение: Множеството от допустимите стойности е $(3;5)$. Даденото неравенството е еквивалентно на $\frac{3x-11}{(x-1)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)(3x-11) > 0$, откъдето $x \in (1;3) \cup \left(\frac{11}{3}; +\infty\right)$. Като вземем предвид множеството от допустимите стойности, намираме, че $x \in \left(\frac{11}{3}; 5\right)$.

Задача 6. В триъгълника ABC вътрешната ъглополовяща през върха C пресича страната AB в точка L. Ако $AL = 5$ и $BL = 3$, да се намери радиусът на окръжността, минаваща през точките C и L, с център върху правата AB.



Решение: Нека O и R са центърът и радиусът на k. Тъй като CL е хорда в k, то $MO \perp CL$. Ако CK е външната ъглополовяща през върха C, $CK \perp CL$ и MO е средна отсечка в ΔCLK. Тогава $LK = 2R$.

От свойствата на ъглополовящата имаме $\frac{KA}{KB} = \frac{LA}{LB} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$.

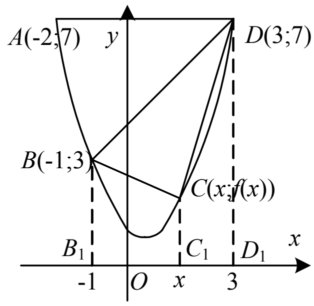
Но $KA = KB + AB = KB + 8$, откъдето $KB = 12$, $LK = 15$ и $R = 7{,}5$.

Задача 7. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравнението $\sqrt{x-3} + ax = 2a + 3$ има единствено решение.

Решение: При $x \geq 3$ полагаме $t = \sqrt{x-3} \geq 0$ и получаваме $at^2 + t + a - 3 = 0$ (1). Тогава (1) трябва да има точно един неотрицателен корен. При $a = 0$ получаваме $t = 3$. Нека $a \neq 0$. Разглеждаме дискриминантата $D = 1 - 4a^2 + 12a$. $D = 0$ за $a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{10}}{2}$. При $a = \frac{3-\sqrt{10}}{2}$ (1) има единствен положителен корен, а при $a = \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ – единствен отрицателен корен. Нека $\frac{3-\sqrt{10}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{10}}{2}$ и $a \neq 0$. Уравнението

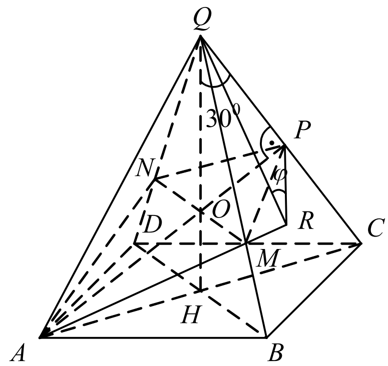
(1) ще има един положителен и един отрицателен корен, когато $a(a-3)<0$, т.е. $0<a<3$, а при $a=3$ корените са $t_1=0$ и $t_2=-3$. Окончателно решенията на задачата са $a\in\left\{\frac{3-\sqrt{10}}{2}\right\}\cup[0;3]$

Задача 8. Спрямо правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(-2;7), B(-1;3)$ и $D(3;7)$. Върховете на четириъгълника $ABCD$ с диагонали AC и BD лежат върху графиката на функцията $f(x)=ax^2+bx+c$. Да се намерят координатите на върха C, при които лицето на $ABCD$ е най-голямо, и да се пресметне това лице.



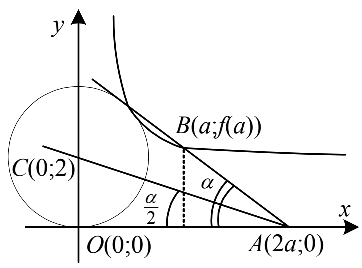
Решение: Тъй като A, B и D лежат върху графиката на функцията $f(x)$, то: $f(-2)=7$; $f(-1)=3$; $f(3)=7$, откъдето: $a=1, b=-1, c=1$. Следователно $f(x)=x^2-x+1$. Ако $B_1(-1;0), D_1(3;0)$ и $C_1(x;0)$ са проекциите на B, C, D върху Ox, то $x\in(-1;3)$, защото AC и BD са диагонали. Понеже $S_{ABD}=10$, лицето на $ABCD$ е най-голямо, когато $S_{BCD}=S(x)$ е най-голямо. Но $S(x)=S_{BB_1D_1D}-S_{BB_1C_1C}-S_{CC_1D_1D}=\frac{1}{2}\big(40-(3+f(x))(x+1)-(7+f(x)).(3-x)\big)=-2x^2+4x+6$. Тъй като $S(x)$ има локален максимум при $x_0=1$ в интервала $(-1;3)$, то $\max S(x)=S(1)=8$. Следователно за точката $C_0(1,1)$ S_{ABCD} е най-голямо и $S_{ABC_0D}=S_{ABD}+S_{BC_0D}=10+8=18$.

Задача 9. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $QABCD$ с връх Q. Ъгълът между околния ръб CQ и равнината BDQ е 30^0. През върха A е построена равнина α, перпендикулярна на ръба CQ. Да се намери тангенсът на ъгъла между равнината α и равнината QAB.



Решение: Нека $\alpha\cap CQ=P$, $\alpha\cap BQ=M$, $\alpha\cap DQ=N$ и $AC\cap BD=H$. Тъй като пирамидата е правилна, то $QH\perp(ABCD)$ и $CH\perp(BDQ)$. Тогава QH е ортогоналната проекция на QC в равнината (BDQ) и $\angle[CQ,(BDQ)]=\angle CQH=30°$. Но ΔCQA е равнобедрен, $QH\perp AC$, така че $\angle CQA=60°$, т.е. $AQ=CQ=AC=2a$. Понеже $QC\perp MN$, то $MN\parallel BD$. Също така, от $AP\perp BD$ следва, че $MN\perp AP$. Тъй като $\alpha\cap(ABQ)=AM$, ако $PR\perp AM$, то $\angle[\alpha,(ABQ)]=\angle PRQ=\varphi$. Тогава $\mathrm{tg}\varphi=\frac{PQ}{PR}$. От $AP\perp QC$ следва, че $PQ=a$ и $AP=a\sqrt{3}$. Ако $AP\cap HQ=O$, то $MN\cap HQ=O$. Тъй като $\frac{QO}{QH}=\frac{AO}{AP}=\frac{2}{3}$, то $MN=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}AC$. Тогава ΔAMN е равностранен и $\angle OAM=\angle PAR=30°$ От ΔAPR намираме $PR=\frac{1}{2}AP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следователно $\mathrm{tg}\varphi=\frac{PQ}{PR}=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Задача 10. Дадена е функцията $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}, x>1$. Нека спрямо правоъгълна координатна система Oxy точка A има координати $(2a;0)$, където a е реален параметър, а точка B лежи на графиката на $f(x)$ и е такава, че ΔOAB е равнобедрен $(OB=AB)$. Да се докаже, че съществува единствена окръжност k, която се допира до оста Ox в точка O и до всички прави AB. Да се намери радиусът на тази окръжност.



Решение: Понеже ΔOAB е равнобедрен, то $B\big(a;f(a)\big)$ и $a>1$. Ако C е центърът на k, то C е пресечната точка на ъглополовящата на $\angle OAB=\alpha$ и оста Oy. Тогава радиусът на k е $R=OC$ и от ΔOAC имаме $\frac{R}{2a}=\frac{OC}{OA}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. От ΔOAB намираме $\mathrm{tg}\alpha=\frac{f(a)}{a}=\frac{2a}{a^2-1}$. Оттук $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{a}$ или $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=-a$. Но $\frac{\alpha}{2}<90°$, така че $\frac{R}{2a}=\frac{1}{a}$, т.е. $R=2$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.