СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ”
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

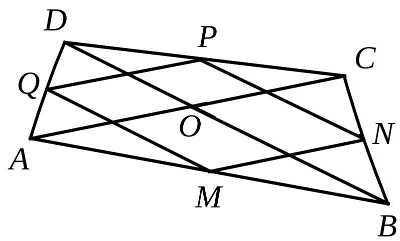
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
24 ЮЛИ 2008 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Да се реши неравенството $2\sqrt{2}x-3\le 3x-2\sqrt{2}$.
Решение: Записваме неравенството във вида $(2\sqrt{2}-3)x\le -(2\sqrt{2}-3)$. Тъй като $2\sqrt{2}<3$, то последното е еквивалентно на $x\ge -1$, т.е. $x\in[-1,+\infty)$.

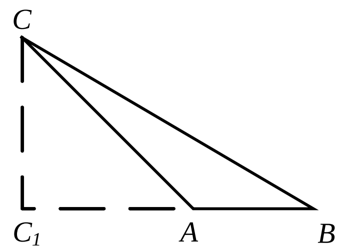
Задача 2. Диагоналите AC и BD на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка O. Нека точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA. Да се намери лицето на четириъгълника $MNPQ$, ако $AC=\sqrt{8}$, $BD=6$ и $\sphericalangle AOB-\sphericalangle BOC=90^0$.

Решение: От $\sphericalangle AOB+\sphericalangle BOC=180^0$ и $\sphericalangle AOB-\sphericalangle BOC=90^0$ следва, че $\sphericalangle BOC=45^0$. От това, че точките M, N, P и Q са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA следва, че
$MN=PQ=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$, $PN=MQ=\frac{1}{2}BD=3$ и
$\sphericalangle PQM=\sphericalangle BOC=45^0$.
Следователно $MNPQ$ е успоредник и $S_{MNPQ}=MQ.PQ.\sin 45^0=3$.



Задача 3. Да се реши уравнението $2.4^{\sqrt{x}}-5.2^{\sqrt{x}}+2=0$.
Решение: При $x\ge 0$ полагаме $y=2^{\sqrt{x}}\ge 2^0=1$ и получаваме $2y^2-5y+2=0$. Последното уравнение има решения $y_1=2$ и $y_2=\frac{1}{2}$. Само $y_1=2$ принадлежи на областта от допустимите стойности, откъдето получаваме, че $2^{\sqrt{x}}=2$ т.е. $x=1$.

Задача 4. Даден е триъгълник ABC с ъгли $\sphericalangle ABC=30^0$ и $\sphericalangle ACB=15^0$. Да се намери периметърът на триъгълника ABC, ако височината му през върха C е равна на 4.



Решение: Нека CC_1 е височина на $\triangle ABC$. Тъй като $\sphericalangle ABC=30^0$ от $\triangle C_1BC$ следва, че $BC=8$ и $BC_1=4\sqrt{3}$. Имаме $\sphericalangle ACB=15^0$, откъдето $\sphericalangle C_1AC=45^0$ и A е между C_1 и B. От $\triangle C_1AC$ получаваме, че $CC_1=C_1A=4$ и $AC=4\sqrt{2}$. Следователно $AB=4\sqrt{3}-4$ и $P_{ABC}=4\sqrt{3}+4\sqrt{2}+4$.

Задача 5. Да се реши системата уравнения $\left|\begin{array}{l}2^{\lg x}+3^{\lg y}=5\\ 2^{\lg x}.3^{\lg y}=4\end{array}\right.$.

Решение: При $x>0$ и $y>0$ полагаме $u=2^{\lg x}$, $v=3^{\lg y}$ и получаваме $\left|\begin{array}{l}u+v=5\\ u.v=4\end{array}\right.$. Получената система уравнения има решения $u_1=4, v_1=1$ или $u_2=1, v_2=4$. Откъдето пресмятаме $x_1=100,\ y_1=1$ или $x_2=1,\ y_2=10^{\log_3 4}$.

Задача 6. Нека p е реално число такова, че уравнението $x^2-x+p=0$ има реални корени x_1 и x_2. Да се намери стойността на параметъра p така, че стойността на израза $A=(x_1^3+1)(x_2^3+1)$ да е най-голяма.

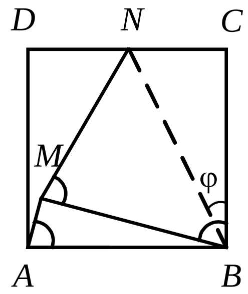
Решение: Корените x_1 и x_2 на даденото уравнение са реални точно тогава, когато $p\le\frac{1}{4}$.

Преобразуваме дадения израз $A=(x_1^3+1)(x_2^3+1)=(x_1.x_2)^3+(x_1^3+x_2^3)+1=$
$(x_1.x_2)^3+(x_1+x_2)\left(x_1{}^2+x_2{}^2-x_1.x_2\right)+1$. От формулите на Виет получаваме, че $A=p^3-3p+2$.

Означаваме с $f(p)=p^3-3p+2$ и търсим най-голямата стойност на функцията $f(p)$ в интервала $(-\infty,\frac{1}{4}]$. Пресмятаме , че $f'(p)=3p^2-3=0$ за $p_{1,2}=\pm 1$, откъдето следва, че $f'(p)>0$ за $p<-1$ и $f'(p)<0$ за $-1<p\le\frac{1}{4}$. Следователно най-голямата стойност на $A=f(p)$ достига при $p=-1$.

Задача 7. Даден е квадратът $ABCD$. Точката M е вътрешна за квадрата и е такава, че $\text{S}\, MAB=\text{S}\, MBC=75^0$. Нека точката N лежи на страната CD и $\text{S}\, NMB=75^0$. Да се намери отношението $CN:ND$.

Решение: Без ограничение приемаме, че $AB=1$.Понеже $\text{S}\, AMB=90^0$,то $BM=\sin 75^0$. Означаваме $\text{S}\, NBC=\varphi$. Тогава $BN=\frac{1}{\cos\varphi}$. От синусовата теорема за триъгълника MBN получаваме $\frac{BN}{\sin 75^0}=\frac{BM}{\sin\left(30^0+\varphi\right)}$, откъдето $\frac{\sin\left(30^0+\varphi\right)}{\cos\varphi}=\sin^2 75^0$. Понеже $\sin 75^0=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, получаваме $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.tg\varphi=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$, откъдето $tg\varphi=\frac{1}{2}$.



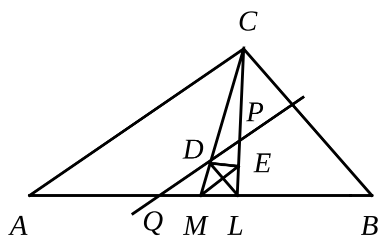
Следователно $CN:ND=1:1$.

Задача 8. Да се реши уравнението $x^2-x+1=\sqrt{2x-1}$.

Решение: При $x\ge\frac{1}{2}$ полагаме $y=\sqrt{2x-1}\ge 0,\ x=\frac{y^2+1}{2}$ и получаваме $y^4-4y+3=0$. Последното уравнение разлагаме по следния начин $y(y^3-1)-3(y-1)=0$ или $(y-1)(y^3+y^2+y-3)=0$. Тъй като $y=1$ е корен на $y^3+y^2+y-3=0$, получаваме $(y-1)^2(y^2+2y+3)=0$. Понеже $y^2+2y+3=$ $(y+1)^2+2>0$, то $y=1$ е единственият корен на полученото уравнение и следователно $x=1$.

Задача 9. В триъгълника ABC ($AC>BC$) CM и CL са съответно медиана и ъглополовяща през върха C. Права g през точката M, успоредна на страната AC, пресича CL в точката E, а права t през точката L, успоредна на страната BC, пресича CM в точката D. Да се намери големината на $\text{S}\, DEC$.

Решение: През точката D построяваме права, успоредна на страната AC. Тя пресича AB и CL съответно в точките Q и P. От теоремата на Талес за $QD\,\text{P}\,AC$ и за $DL\,\text{P}\,BC$ получаваме $\frac{MQ}{MA}=\frac{MD}{MC}=\frac{ML}{MB}$ и следователно $MQ=ML$. От $ME\,\text{P}\,PQ$ следва, че $\frac{ML}{QM}=\frac{LE}{PE}$ и следователно $LE=PE$, т.е. точката E е среда на PL. От друга страна $\text{S}\, DLC=\text{S}\, LCB=\frac{1}{2}\text{S}\, ACB$ (кръстни) и $\text{S}\, DPL=\text{S}\, ACL=\frac{1}{2}\text{S}\, ACB$ ($PQ\,\text{P}\,AC$) и следователно $\text{V}DLP$ е равнобедрен. Понеже DE е медиана в този триъгълник, то $\text{S}\, DEC=90^0$.



Задача 10. Да се намерят стойностите на реалния параметър k, за които уравнението $\sqrt{x^2+k\cos^2 x}=k$ има единствен реален корен.

Решение: От условието следва, че $k\ge 0$. Ако x_0 е решение на даденото уравнение, то и $-x_0$ е решение, защото $\sqrt{(-x_0)^2+k\cos^2(-x_0)}=\sqrt{x_0^2+k\cos^2 x_0}=k$. Следователно, за да има единствен реален корен е необходимо $x_0=-x_0$, т.е. $x_0=0$. Следователно $\sqrt{k}=k$, т.е. $k=0$ или $k=1$.

При $k=0$ получаваме уравнението $\sqrt{x^2}=0$, което има единствен реален корен $x=0$.

При $k=1$ получаваме уравнението $\sqrt{x^2+\cos^2 x}=1$ или $x^2=\sin^2 x$, което също има единствен реален корен $x=0$, защото неравенството $\sin^2 x<x^2$ е изпълнено за всяко $x\ne 0$.

Следователно търсените стойности са $k=0$ и $k=1$.