Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

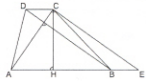
Писмен конкурсен изпит по математика, 12 април 2009г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението $\dfrac{2}{x^2-4}+\dfrac{x-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x^2-2x}$.

Решение. Тъй като $x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x^2+2x=x(x+2)$ и $x^2-2x=x(x-2)$, уравнението има смисъл при $x\neq-2$, $x\neq0$ и $x\neq2$. След привеждане под общ знаменател достигаме до уравнението $x^2-5x+6=0$, чийто корени са $x=2$ и $x=3$. Единственият корен на даденото уравнение е $x=3$.

Задача 2. Да се намери лицето на трапец $ABCD$ $(AB||CD)$ с височина 12, ако диагоналите му AC и BD са взаимно перпендикулярни и $AC=15$.

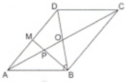


Решение. Построяваме отсечката $CE||BD$ $(E\in AB)$. Тогава $\sphericalangle ACE=90^o$, $BE=CD$ и $AE=AB+CD$. Нека $CH\perp AE$ $(H\in AE)$. От правоъгълните триъгълници AHC и ACE последователно пресмятаме $AH=\sqrt{AC^2-CH^2}=9$ и $AE=AC^2/AH=25$. Следователно $S_{ABCD}=\dfrac{AB+CD}{2}.CH=\dfrac{1}{2}AE.CH=150$.

Задача 3. Да се реши уравнението $\sin^4 x+3\cos^2 x=1$.

Решение. Тъй като $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, уравнението е еквивалентно на квадратното уравнение (относно $\sin^2 x$) $\sin^4 x-3\sin^2 x+2=0$, чиито корени са $\sin^2 x=2$ и $\sin^2 x=1$. Понеже $\sin^2 x\leq1$ за всяко x, уравнението $\sin^2 x=2$ няма решение, а решенията на уравнението $\sin^2 x=1$ са $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \ k=0,\pm1,\ \pm2,\ldots$

Задача 4. В успоредник $ABCD$ ъглополовящата на $\sphericalangle ABD$ пресича диагонала AC в точка P, така че $AP:PC=1:2$. Да се намерят дължините на страните на успоредника, ако $AC=2\sqrt{97}$ и $BP=\frac{16}{3}$.



Решение. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD. Понеже O е среда на AC, от $AP:PC=1:2$ следва $AP=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{2}{3}AO=\dfrac{2}{3}(AP+PO)$, т.е. $AP=2PO=\frac{2}{3}\sqrt{97}$. От тук и свойството на ъглополовящата получаваме $AB=2BO=BD$. От формулата за ъглополовящата в ΔABO, $BP^2=AB.BO-AP.PO$ намираме $AB=10$. От $BD=AB$ и равенството $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$ получаваме $AD=12$.

Задача 5. Да се реши неравенството $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq x-2$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x-1\geq0$ и $x-2\sqrt{x-1}\geq0\Leftrightarrow(\sqrt{x-1}-1)^2\geq0$, т.е. при $x\geq1$. Всяко $x\in[1,2]$ е решение на даденото неравенство, тъй като лявата му страна е положителна, а дясната е неположителна. При $x>2$, след повдигане на квадрат се получава еквивалентното неравенство $x^2-8x+8\leq0$, чиито решения, предвид $x>2$, са $x\in(2,4+2\sqrt{2}]$. Обединяваме двата случая и получаваме, че решенията на даденото неравенство са $x\in[1,4+2\sqrt{2}]$.

Задача 6. Да се определят стойностите на x, за които е дефинирана функцията $f(x)=\log_{\frac{3}{5}}(x^2+8x-9)-2\log_{\frac{3}{5}}x$, и да се намери най-малката стойност на $f(x)$.

Решение. Функцията $f(x)$ е дефинирана при $x^2+8x-9>0$ и $x>1$. От тук намираме, че дефиниционната област на $f(x)$ е $x>1$, и тогава $f(x)=\log_{\frac{3}{5}}\dfrac{x^2+8x-9}{x^2}=\log_{\frac{3}{5}}\left(1+8\dfrac{1}{x}-9\Big(\dfrac{1}{x}\Big)^2\right)$. Разглеждаме функцията $g(x)=-9\Big(\dfrac{1}{x}\Big)^2+8\dfrac{1}{x}+1$, тя е квадратен тричлен относно $\dfrac{1}{x}$, и най-голямата ѝ стойност в интервала $(1,\infty)$ е $g\Big(\dfrac{9}{4}\Big)=\dfrac{25}{9}$. Тъй като логаритмичната функция при основа $\frac{3}{5}<1$ е намаляваща, най-малката стойност на $f(x)$ в интервала $(1,\infty)$ е $f\Big(\dfrac{9}{4}\Big)=\log_{\frac{3}{5}}\dfrac{25}{4}=\log_{\frac{3}{5}}\Big(\dfrac{3}{5}\Big)^{-2}=-2$.

Задача 7. Да се реши уравнението $|x-2|+|2x-8|=3^a x-9^a-1$, където a е реален параметър.

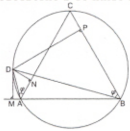
Решение. Случай 1: $x\leq2$. Уравнението е $2-x+8-2x=3^a x-9^a-1\Leftrightarrow(3^a+3)x=9^a+11$, откъдето $x=\dfrac{9^a+11}{3^a+3}$. Условието $\dfrac{9^a+11}{3^a+3}\leq2$ е еквивалентно на $3^{2a}-2.3^a+5\leq0$, и не е изпълнено за никоя стойност на a. Следователно уравнението няма решение в $(-\infty,2]$. *Случай 2:* $2<x<4$. Сега уравнението е $x-2+8-2x=3^a x-9^a-1\Leftrightarrow(3^a+1)x=9^a+7$, откъдето $x=\dfrac{9^a+7}{3^a+1}$. Условието $\dfrac{9^a+7}{3^a+1}>2\Leftrightarrow(3^a)^2-2.3^a+5>0$ е изпълнено за всяко a, а условието $\dfrac{9^a+7}{3^a+1}<4\Leftrightarrow(3^a)^2-4.3^a+3<0\Leftrightarrow(3^a-1)(3^a-3)<0\Leftrightarrow1<3^a<3$ дава $0<a<1$. Така в този случай при $a\leq0$ или $a\geq1$ уравнението няма решение, а при $a\in(0,1)$ има единствен корен $x=\dfrac{9^a+7}{3^a+1}$.

Случай 3: $x\geq4$. Тогава уравнението става $x-2+2x-8=3^a x-9^a-1\Leftrightarrow(3^a-3)x=9^a-9\Leftrightarrow(3^a-3)x=(3^a-3)(3^a+3)$. Ако $3^a=3$, т.е. $a=1$, всяко $x\geq4$ е корен на даденото уравнение. Ако $a\neq1$, тогава $x=3^a+3$, и условието $3^a+3\geq4\Leftrightarrow3^a\geq1$ дава $a\geq0$. Така в този случай, ако $a\in(-\infty,0)$, уравнението няма решение; ако

$a \in [0,1) \cup (1,\infty)$, уравнението има единствен корен $x = 3^a + 3$; ако $a = 1$, всяко $x \in [4,\infty)$ е корен. Отбелязваме, че при $a = 0$, $3^a + 3 = 4$.

Окончателно: при $a \in (-\infty, 0)$ уравнението няма решение; при $a = 0$ - има единствен корен $x = 4$; при $a \in (0,1)$ - има два корена $x_1 = \dfrac{9^a+7}{3^a+1}$ и $x_2 = 3^a + 3$; при $a = 1$, решение е всяко $x \geq 4$; при $a > 1$ - уравнението има единствен корен $x_2 = 3^a + 3$.

Задача 8. В окръжност с радиус 1 е вписан равностранен триъгълник ABC. От точка D, лежаща върху дъгата $\overset{\frown}{AC}$, която не съдържа точката B, са спуснати перпендикуляри към правите AB, AC и BC, които ги пресичат съответно в точките M, N и P. Да се намери най-голямата стойност на $DM + DN + DP$.



Решение. Нека $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. От синусовата теорема за ΔABD намираме $DA = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$, $DB = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)$. От правоъгълните триъгълници ADN, BDM и BDP последователно изразяваме $DN = DA\sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\sin\varphi$, $DM = DB\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$, $DP = DB\sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\sin\varphi$. Тогава

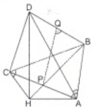
$$DM + DN + DP = 2\Big(\sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\sin\varphi\Big) = f(\varphi).$$

От формулите за преобразуване на произведение и сума от синуси получаваме

$$2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right) = \cos 2\varphi - \cos\frac{2\pi}{3} = \cos 2\varphi + \frac{1}{2},\ \ 2\sin\varphi\Big(\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)\Big) = 4\sin\varphi\sin\frac{\pi}{3}\cos\varphi = \sqrt{3}\sin 2\varphi.$$

От тук, $f(\varphi) = \dfrac{1}{2} + \cos 2\varphi + \sqrt{3}\sin 2\varphi = \dfrac{1}{2} + 2\Big(\cos 2\varphi\cos\dfrac{\pi}{3} + \sin 2\varphi\sin\dfrac{\pi}{3}\Big) = \dfrac{1}{2} + 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2\varphi\right)$. От $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\varphi\right) \leq 1$ и $-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} - 2\varphi \leq \frac{\pi}{3}$ следва, че най-голямата стойност на $f(\varphi)$ е $2\frac{1}{2}$, и тя се достига при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, т.е. когато D е средата на дъгата $\overset{\frown}{AC}$.

Задача 9. В триъгълна пирамида $ABCD$ ортогоналната проекция на върха D върху равнината на основата ABC лежи на описаната около ΔABC окръжност. Ръбовете BD и AC са взаимно перпендикулярни, и околните стени ABD и BCD сключват с основата ъгли, равни на 60^o. Да се намери обемът на пирамидата, ако $\sphericalangle ABC = 60^o$ и разстоянието между правите BD и AC е $3\sqrt{\frac{3}{7}}$.



Решение. Нека H е ортогоналната проекция на върха D върху равнината на основата. Тъй като $BD \perp AC$ и BH е ортогоналната проекция на BD върху (ABC), от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $BH \perp AC$. Понеже околните стени ABD и BCD сключват равни ъгли с основата, то BH е и ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$. Тогава BH е симетралата на отсечката AC, откъдето $AB = BC = AC$ (понеже $\sphericalangle ABC = 60^o$), и BH е диаметър на описаната около ΔABC окръжност. Следователно $HA \perp AB$, и от теоремата за трите перпендикуляра имаме $AD \perp AB$. Така ъгълът, който околната стена ABD сключва с основата ABC, е $\sphericalangle DAH = 60^o$. Нека P е средата на отсечката AC и $PQ \perp BD$ $(Q \in BD)$. Тъй като ортогоналната проекция на PQ лежи на правата BH и $BH \perp AC$, от теоремата за трите перпендикуляра следва $PQ \perp AC$. Така разстоянието между правите BD и AC е $PQ = 3\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Нека $BH = 2R$. Тогава $BP = \frac{3}{2}R$, $AH = R$, $AB = R\sqrt{3}$, и от правоъгълните триъгълници DHA и DAB намираме $DH = R\sqrt{3}$, $DA = 2R$ и $BD = R\sqrt{7}$. От $\Delta DHB \sim \Delta PQB$ имаме $DH : PQ = BD : BP$, откъдето $DH = 2\sqrt{3}$. Сега от $DH = R\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ намираме $R = 2$. Така за обема на пирамидата получаваме $V = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.DH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4}.DH = 6$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^3 - 3x + a$ и $g(x) = x^2 - 1$, където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, такива че при всяко реално число c, уравнението $f(x) + cg(x) = 0$ има три различни реални корена.

Решение. Нека $h(x) = f(x) + cg(x)$, и a е такова, че $h(x)$ има три различни реални корена за всяка стойност на c. Тогава това ще бъде изпълнено и при $c = 0$, т.е. при $h(x) = f(x)$. Имаме $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1,1)$. Затова $f(x)$ расте в интервала $(-\infty,-1)$, намалява в $(-1,1)$ и расте в интервала $(1,\infty)$. Следователно във всеки от тези три интервала $f(x)$ има най-много по един корен. Освен това, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$. От тук и теоремата на Болцано заключаваме, че броят на реалните корени на $f(x)$ се определя от стойностите $f(-1) = a + 2$ и $f(1) = a - 2$. Ако $f(-1) \leq 0$, то $f(x) < 0$ за всяко $x \in (-\infty, 1]$, $x \neq -1$, и $f(x)$ ще има най-много два различни реални корена (само един, ако $f(-1) < 0$). Аналогично, ако $f(1) \geq 0$, то $f(x) > 0$ за всяко $x \in [-1,\infty)$, $x \neq 1$, и $f(x)$ ще има най-много два различни реални корена (само един, ако $f(1) > 0$). Следователно, за да има $f(x)$, а значи и $h(x)$, три различни реални корена, е необходимо $f(-1) > 0$ и $f(1) < 0$, откъдето получаваме $a \in (-2,2)$.

Нека сега $a \in (-2,2)$. При всяко c имаме $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $h(-1) = a+2 > 0$, $h(1) = a-2 < 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = \infty$. От тук и от теоремата на Болцано следва, че $h(x)$ има поне по един корен във всеки от интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,\infty)$, и значи $h(x)$ има точно три различни реални корена. Отговор: $a \in (-2,2)$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.