Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика, 23 юли 2009г.

ТЕМА 3

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\log_2(x+14) + 2\log_4(x+2) = 6\,.$$

Задача 2. Да се намерят дължините на катетите AC и BC в правоъгълен триъгълник ABC, ако радиусите на описаната и на вписаната за триъгълника окръжности са съответно $R = \frac{17}{2}$ и $r = 3$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е геометрична прогресия, за която $a_1 + a_3 = 20$, $a_2 + a_4 = 40$ и $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1020$. Да се намери n.

Задача 4. Нека $ABCD$ е правоъгълен трапец с прави ъгли при върховете A и D, като $AB > CD$. Пресечните точки на диагоналите AC и BD със средната отсечка на трапеца я разделят на три равни части. Да се намери лицето на трапеца, ако в него може да се впише окръжност с радиус $r = 4$.

Задача 5. Нека $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, и $\cos^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$. Да се намери стойността на $\cos 2\alpha$.

Задача 6. Да се реши неравенството

$$2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10\,.$$

Задача 7. В триъгълника ABC медианата CM ($M \in AB$) и ъглополовящата AL ($L \in BC$) са взаимно перпендикулярни, като $CM = 2\sqrt{5}$ и $AL = \frac{8}{3}$. Да се намерят дължините на страните на ΔABC.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, $a \geq 0$, за които най-малката стойност на функцията $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + (a+1)x$ е равна на 1.

Задача 9. Нека AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини в остроъгълния триъгълник ABC, точката M е среда на AB, и $AB = 12$. Нека K е пресечната точка на AA_1 и MB_1, а L е пресечната точка на BB_1 и MA_1. Да се намери намери лицето на триъгълника KLM, ако $MK : KB_1 = 1 : 2$ и $ML : LA_1 = 5 : 1$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^2 + bx + c$, и уравнението $f(x) = 0$ има два различни реални корена. Да се докаже, че множеството от решенията на неравенството

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

е обединение на два непресичащи се интервала, и да се намери сумата на дължините им.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!

Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика, 23 юли 2009г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ - ТЕМА 3

Задача 1. Да се реши уравнението

$$\log_2(x+14) + 2\log_4(x+2) = 6\,.$$

Решение. Уравнението има смисъл при $x > -2$. След като преминем към логаритми при основа 2 получаваме $\log_2(x+14)+\log_2(x+2) = \log_2 64 \Rightarrow (x+14)(x+2) = 64 \Rightarrow x^2+16x-36 = 0$. Оттук намираме, че първоначалното уравнение има единствен корен $x = 2$.

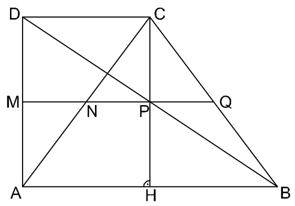
Задача 2. Да се намерят дължините на катетите AC и BC в правоъгълен триъгълник ABC, ако радиусите на описаната и на вписаната за триъгълника окръжности са съответно $R = \frac{17}{2}$ и $r = 3$.

Решение. При обичайните означения за елементите на ΔABC, имаме $c = 2R = 17$ и $\frac{a+b-c}{2} = r = 3$, откъдето $a + b = 23$. От тук и от $a^2 + b^2 = c^2 = 289$ намираме $a = 15$, $b = 8$ или $a = 8$, $b = 15$.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е геометрична прогресия, за която $a_1 + a_3 = 20$, $a_2 + a_4 = 40$ и $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1020$. Да се намери n.

Решение. Нека q е частното на прогресията. От $a_1+a_3 = a_1(1+q^2) = 20$ и $a_2+a_4 = a_1q(1+q^2) = 40$ намираме $q = 2$ и $a_1 = 4$. От равенството $S_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} = 4(2^n - 1) = 1020$ получаваме $2^n = 256 = 2^8$, следователно $n = 8$.

Задача 4. Нека $ABCD$ е правоъгълен трапец с прави ъгли при върховете A и D, като $AB > CD$. Пресечните точки на диагоналите AC и BD със средната отсечка на трапеца я разделят на три равни части. Да се намери лицето на трапеца, ако в него може да се впише окръжност с радиус $r = 4$.



Решение. Тъй като в правоъгълния трапец $ABCD$ може да се впише окръжност, то височината на трапеца е равна на диаметъра на тази окръжност, т.е. $AD = 2r = 8$, и $AD + BC = AB + CD$, т.е. $BC = AB + CD - 8$. Нека M и Q са средите съответно на AD и BC, а N и P са пресечните точки на MQ с диагоналите AC и BD. Означаваме $x = MN$. По условие $MP = 2x$ и $MQ = 3x$. Тъй като MN и MP са средни отсечки съответно в ΔACD и ΔABD, то $CD = 2x$ и $AB = 4x$. Нека $CH\perp AB$ ($H \in AB$). Тогава $BH = 2x$, и от Питагоровата теорема за ΔBCH имаме $4x^2 + 64 = (6x - 8)^2$, откъдето намираме $x = 3$. За лицето S на трапеца получаваме $S = MQ.AD = 24x = 72$.

Задача 5. Нека $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, и $\cos^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$. Да се намери стойността на $\cos 2\alpha$.

Решение. Заместваме $\cos^2\alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$ и $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, и получаваме $\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha + 7 = 0$, или $\cos 2\alpha + 7 = 8\sin 2\alpha$. При указания интервал за α двете страни са положителни, и след повдигане на квадрат получаваме еквивалентното квадратно уравнение $65\cos^2 2\alpha + 14\cos 2\alpha - 15 = 0$. Неговите корени са $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$. Понеже $\cos 2\alpha < 0$ при $\alpha \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, търсената стойност е $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$.

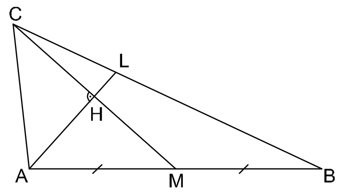
Задача 6. Да се реши неравенството

$$2^{|x|} + 2^{4-|x|} < 10\,.$$

Решение. Полагаме $y = 2^{|x|}$, $y > 0$, и получаваме неравенството $\frac{y^2-10y+16}{y} < 0$, което предвид $y > 0$ е равносилно на квадратното неравенство $y^2 - 10y + 16 < 0$ с решения $y \in (2, 8)$. От $2 < 2^{|x|} < 8$ следва, че $1 < |x| < 3$, и от там намираме $x \in (-3, -1) \cup (1, 3)$.

Задача 7. В триъгълника ABC медианата CM ($M \in AB$) и ъглополовящата AL ($L \in BC$) са взаимно перпендикулярни, като $CM = 2\sqrt{5}$ и $AL = \frac{8}{3}$. Да се намерят дължините на страните на ΔABC.

Решение. Нека H е пресечната точка на CM и ъглополовящата AL на $\sphericalangle CAB$. Правоъгълните триъгълници AHM и AHC са еднакви, откъдето следва, че $AC = AM$, т.е. $c = 2b$.



От свойството на ъглополовящата имаме $BL = \frac{2}{3}a$, $CL = \frac{1}{3}a$. От формулите за медианата CM и ъглополовящата AL получаваме

$$CM^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2) = \frac{a^2-b^2}{2} = 20,\ AL^2 = b.c-BL.CL = \frac{2}{9}(9b^2-a^2) = \frac{64}{9}.$$

От системата уравнения $a^2 - b^2 = 40$ и $9b^2 - a^2 = 32$ намираме $b = 3$, $a = 7$, и тогава $c = 2b = 6$.

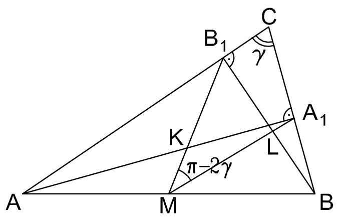
Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, $a \geq 0$, за които най-малката стойност на функцията $f(x) = |x^2 - 3x + 2| + (a+1)x$ е равна на 1.

Решение. При $x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ имаме $f(x) = x^2 + (a-2)x + 2$. Тази квадратна функция приема най-малка стойност при $x = x_0 := \frac{2-a}{2}$. Понеже $x_0 \leq 1$, най-малката стойност на f в $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$ е $f(x_0) = 2 - \frac{(2-a)^2}{4}$.

При $x \in [1, 2]$ имаме $f(x) = -x^2 + (a+4)x - 2$. Тази квадратна функция расте в $(-\infty, \frac{a+4}{2})$, и намалява в $(\frac{a+4}{2}, \infty)$. Понеже $\frac{a+4}{2} \geq 2$, $f(x)$ расте в интервала $[1, 2]$, следователно най-малката ѝ стойност в този интервал е $f(1) = a + 1$. Следователно най-малката стойност на $f(x)$ в $(-\infty, \infty)$ е $M = \min\{2 - \frac{(2-a)^2}{4}, a + 1\}$. Понеже $2 - \frac{(2-a)^2}{4} = a + 1 - a^2/4 \leq a + 1$, имаме $M = 2 - \frac{(2-a)^2}{4}$, и $M = 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{(2-a)^2}{4} = 1$, т.е. $(2-a)^2 = 4$. От тук търсените стойности на a са $a = 0$ и $a = 4$.

Задача 9. Нека AA_1 ($A_1 \in BC$) и BB_1 ($B_1 \in AC$) са височини в остроъгълния триъгълник ABC, точката M е среда на AB, и $AB = 12$. Нека K е пресечната точка на AA_1 и MB_1, а L е пресечната точка на BB_1 и MA_1. Да се намери намери лицето на триъгълника KLM, ако $MK : KB_1 = 1 : 2$ и $ML : LA_1 = 5 : 1$.

Решение. Имаме $MA_1 = MB_1 = AB/2 = 6$, и $MK = \frac{1}{3}MB_1 = 2$, $ML = \frac{5}{6}MA_1 = 5$. От равнобедрените ΔAMB_1 и ΔBMA_1 изразяваме $\sphericalangle AMB_1 = \pi - 2\alpha$, $\sphericalangle BMA_1 = \pi - 2\beta$, откъдето $\sphericalangle KML = \pi - 2\gamma$. Тогава $S_{KLM} = \frac{1}{2}MK.ML\sin 2\gamma = 5\sin 2\gamma$. От отношенията $S_{AKB_1} : S_{AMK} = KB_1 : MK = 2 : 1$ и равенствата $S_{AKB_1} = \frac{1}{2}AB_1.AK.\sin(\pi/2 - \gamma)$, $S_{AMK} = \frac{1}{2}AM.AK.\sin(\pi/2 - \beta)$ получаваме



$$2 = \frac{S_{AKB_1}}{S_{AMK}} = \frac{AB_1.AK.\cos\gamma}{AM.AK.\cos\beta} = \frac{c.\cos\alpha.\cos\gamma}{\frac{c}{2}.\cos\beta} = \frac{2\cos\alpha.\cos\gamma}{\cos\beta}.$$

Аналогично получаваме

$$\frac{1}{5} = \frac{S_{BA_1L}}{S_{BML}} = \frac{BA_1.BL.\cos\gamma}{BM.BL.\cos\alpha} = \frac{c.\cos\beta.\cos\gamma}{\frac{c}{2}.\cos\alpha} = \frac{2\cos\beta.\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

От тук намираме $\cos^2\gamma = \frac{1}{10}$, а от там $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{10}}$ (триъгълникът ABC е остроъгълен), $\sin\gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin 2\gamma = \frac{3}{5}$. Следователно, $S_{KLM} = 5\sin 2\gamma = 3$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^2 + bx + c$, и уравнението $f(x) = 0$ има два различни реални корена. Да се докаже, че множеството от решенията на неравенството

$$\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$$

е обединение на два непресичащи се интервала, и да се намери сумата на дължините им.

Решение. Нека $x_1 < x_2$ са корените на $f(x) = 0$. Неравенството $\frac{f'(x)}{f(x)} > 1$ има смисъл при $x \neq x_1, x_2$, и е равносилно на $f(x)(f(x) - f'(x)) < 0$. Имаме $f'(x) = 2x + b$, и $-b = x_1 + x_2$. Нека $g(x) = f(x) - f'(x) = x^2 + (b-2)x + c - b$. От $g(x_2) = -f'(x_2) = -2x_2 - b = -2x_2 + x_1 + x_2 = x_1 - x_2 < 0$ и $g(x_1) = -f'(x_1) = -2x_1 - b = x_2 - x_1 > 0$ заключаваме, че квадратният тричлен $g(x)$ има два различни реални корена $y_1 < y_2$, и $x_1 < y_1 < x_2 < y_2$. Така получаваме, че неравенството е равносилно на $(x - x_1)(x - y_1)(x - x_2)(x - y_2) < 0$, и то е изпълнено точно когато x принадлежи на обединението на двата непресичащи се интервала (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Сумата ℓ от дължините им е $\ell = y_1 - x_1 + y_2 - x_2 = y_1 + y_2 - (x_1 + x_2)$. От формулите на Виет $y_1 + y_2 = 2 - b$ и $x_1 + x_2 = -b$ намираме $\ell = 2$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.