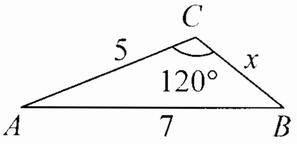
Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика
31 януари 2010 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Нека $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ е геометрична прогресия, за която $b_1 + b_2 + b_3 = 7$ и $b_2 + b_3 + b_4 = 14$. Да се намери сумата на първите шест члена на прогресията.

Решение: Нека b_1 и q са първият член и частното на прогресията. От $b_1 + b_2 + b_3 = 7$ и $b_2 + b_3 + b_4 = 14$ получаваме $b_1\left(1+q+q^2\right) = 7$ и $b_1\left(q+q^2+q^3\right) = b_1 q\left(1+q+q^2\right) = 14$. Тогава $q = 2$ и $b_1 = 1$. Оттук $S_6 = b_1\dfrac{q^6-1}{q-1} = 1.\dfrac{2^6-1}{2-1} = 63$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AC = 5$, $AB = 7$ и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$. Да се намери лицето на триъгълника.



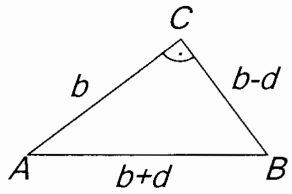
Решение: Нека $BC = x$. Тогава $7^2 = 5^2 + x^2 - 2.5.x.\cos 120^\circ$ или $x^2 + 5x - 24 = 0$. Оттук намираме $x_1 = 3, x_2 = -8$, откъдето $BC = 3$ и $S = \dfrac{1}{2}5.3.\sin 120^\circ = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Задача 3. Да се реши уравнението $x + \sqrt{x} - 2 = 0$.

Решение: Записваме уравнението във вида $\sqrt{x} = 2 - x$. Дефиниционната област е $x \ge 0$. При $x \le 2$ повдигаме на квадрат и получаваме $x = (2-x)^2$ или $x^2 - 5x + 4 = 0$. Оттук $x_1 = 1, x_2 = 4 > 2$. Следователно $x = 1$.

Задача 4. Дължините на страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия. Да се намери дължината на хипотенузата му, ако лицето на триъгълника е 24.

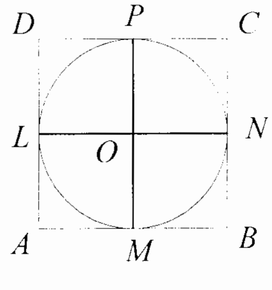
Решение: Нека $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a^2 + b^2 = c^2$, $a < b$. Тогава $a = b - d, c = b + d$, откъдето $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$, или $b^2 = 4bd$. Тогава $d = \frac{1}{4}b$, $a = \frac{3}{4}b$ и $S = \frac{1}{2}ab = \frac{3}{8}b^2 = 24$. Оттук $b = 8$, $c = b + d = \frac{5}{4}b = 10$.



Задача 5. Да се реши уравнението $\dfrac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} + \dfrac{\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} = 2$.

Решение: Множеството от допустимите стойности е $x \ne \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Уравнението е еквивалентно на $\cos^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, или $\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]^2 = 0$, т.е. $2\sin x.\sin\frac{\pi}{3} = 0$, откъдето $x = m\pi$, $(m \in \mathbb{Z})$.

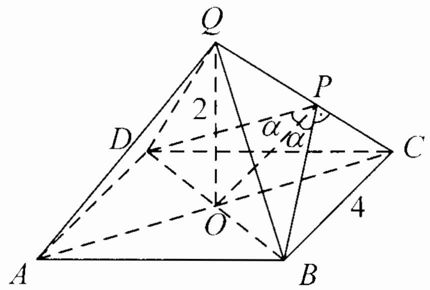
Задача 6. В четириъгълника $ABCD$ е вписана окръжност k с радиус 2, която се допира до AD, AB и BC съответно в точки L, M и N. Да се намери лицето на $ABCD$, ако е известно, че L, M и N са средите на AD, AB и BC.



Решение: Нека O е центърът на k и k се допира до DC в точка P. Тъй като $AL = AM$, $DL = DP$, $AL = LD$ и $AM = MB$, то $DP = AM = MB$ и $AB = AD$. Аналогично $AB = BC$, $MB = CP$, откъдето $AB = BC = CD = DA$, т.е. $ABCD$ е ромб. Тъй като OL, OM, ON и OP са симетрали на страните, то $ABCD$ е вписан в окръжност и следователно $ABCD$ е квадрат със страна 4 и лицето му е 16.

Задача 7. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 4 и височина 2. Да се намери мярката на ъгъла между две съседни околни стени.

Решение: Нека $BP \perp CQ$. Понеже $\triangle BCQ \cong \triangle DCQ$, то $DP \perp CQ$, откъдето $(DBP) \perp CQ$. Следователно $\sphericalangle\left[(BCQ),(DCQ)\right] = \sphericalangle BPD = 2\alpha$. Но $BP = DP$ и $BO = OD$, така че $\sphericalangle BPO = \alpha$. От правоъгълния $\triangle COQ$ имаме $CQ^2 = OC^2 + OQ^2 = 8 + 4 = 12$, т.е. $CQ = 2\sqrt{3}$. Тъй като $OP \perp CQ$, то $OP.CQ = OQ.OC$, откъдето $OP = \dfrac{OC.OQ}{CQ} = \dfrac{4}{\sqrt{6}}$. От правоъгълния $\triangle OPB$ намираме $tg\alpha = \dfrac{OB}{OP} = \sqrt{3}$, откъдето $\alpha = 60^\circ$ и $\sphericalangle[(BCQ),(DCQ)] = 120^\circ$.

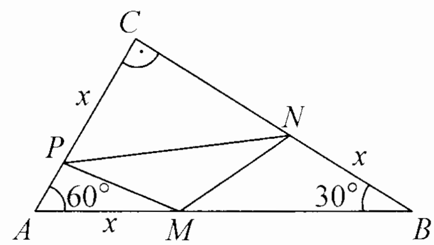


Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 + ax - \log_2\left(3.2^{a^2} - 2\right) = 0$ има реални корени x_1 и x_2, такива че $x_1 < a < x_2$.

Решение: Тъй като $3.2^{a^2} - 2 \geq 1$, то $\log_2\left(3.2^{a^2} - 2\right)$ е определен. Ако $f(x) = x^2 + ax - \log_2\left(3.2^{a^2} - 2\right)$, то $x_1 < a < x_2$, точно когато $f(a) = 2a^2 - \log_2\left(3.2^{a^2} - 2\right) < 0$. Оттук имаме $2a^2 < \log_2\left(3.2^{a^2} - 2\right)$ или $2^{2a^2} < 3.2^{a^2} - 2$. Полагаме $y = 2^{a^2}$ и получаваме неравенството $y^2 - 3y + 2 < 0$, откъдето $y \in (1;2)$, т.е. $1 < 2^{a^2} < 2$ или $0 < a^2 < 1$. Оттук $a \in (-1;0) \cup (0;1)$.

Задача 9. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$ и $CA = \sqrt{3}$. Върху страните AB, BC и CA са взети съответно точките M, N и P, така че $AM = BN = CP = x$. Да се намери стойността на x, при която лицето на триъгълника MNP е най-малко.

Решение: Тъй като $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то ABC е правоъгълен триъгълник с $\sphericalangle CAB = 60^\circ$ и $\sphericalangle CBA = 30^\circ$. Нека $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{AMP}$, $S_2 = S_{BMN}$, $S_3 = S_{NCP}$ и $S^* = S_{MNP}$. Тогава $S^* = S - (S_1 + S_2 + S_3)$. Следователно S^* ще бъде най-малко, когато $S' = S_1 + S_2 + S_3$ е най-голямо. Имаме: $S_1 = \frac{1}{2} AM.AP.\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} x\left(\sqrt{3} - x\right)$,



$S_2 = \frac{1}{2} BN.BM.\sin 30^\circ = \frac{1}{4} x(2\sqrt{3} - x)$ и $S_3 = \frac{1}{2} CP.CN.\sin 90^\circ = \frac{1}{2} x(3 - x)$. Оттук $S' = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[-\left(1+\sqrt{3}\right)x^2 + \left(2 + 3\sqrt{3}\right)x\right]$. Квадратната функция $f(x) = -\left(1+\sqrt{3}\right)x^2 + \left(2+3\sqrt{3}\right)x$, дефинирана в $\left(0, \sqrt{3}\right)$ има най-голяма стойност за $x_0 = \dfrac{2 + 3\sqrt{3}}{2\left(1+\sqrt{3}\right)}$. Тъй като $x_0 \in \left(0; \sqrt{3}\right)$, то лицето на триъгълника MNP е най-малко при $x = x_0$.

Задача 10. Дадена е функцията $f(x) = x^2 + ax + b$, където a и b са реални числа. Да се намери най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) \geq ax^2 + bx + 1 \geq bx^2 + x + a$ за всяко реално число x.

Решение: От условието получаваме неравенствата $(1-a)x^2 + (a-b)x - (1-b) \geq 0$, $(a-b)x^2 - (1-b)x + 1 - a \geq 0$ и $(1-b)x^2 - (1-a)x - (a-b) \geq 0$. Ако някой от коефициентите пред x^2 е отрицателен, неравенствата няма да са изпълнени за всяко x. Следователно $1 - a \geq 0$, $a - b \geq 0$ и $1 - b \geq 0$. Ако $1 - a > 0$, трябва $D_1 = (a-b)^2 + 4(1-a)(1-b) \leq 0$, което е изпълнено, когато $1 - b \leq 0$. Но $1 - b \geq 0$, откъдето $b = 1$. Като заместим $b = 1$ в D_1 получаваме $(a-1)^2 \leq 0$, което противоречи на $1 - a > 0$. Следователно $a = 1$. Като заместим $a = 1$ в $(a-b)x^2 - (1-b)x + 1 - a \geq 0$, получаваме $(1-b)x^2 - (1-b)x = (1-b)x(x-1) \geq 0$. Последното неравенство е изпълнено за всяко x, само когато $b = 1$. Следователно $a = b = 1$.

При $a = b = 1$ неравенствата от условието са изпълнени, т.е. $f(x) = x^2 + x + 1$. Тогава най-малката стойност на $f(x)$ е $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.