СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ПИСМЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
ВТОРО РАВНИЩЕ
22 ЮНИ 2014 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

1. Да се намери най-голямото цяло число, което е решение на неравенството
$\frac{8x+5}{4}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{3-2x}{3}\right)\geq 2x+\frac{5}{6}.$

Решение. След преобразуване, даденото неравенство е еквивалентно на $4x\leq -1$, т.е. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. Следователно най-голямото цяло число, което е решение на неравенството е -1.

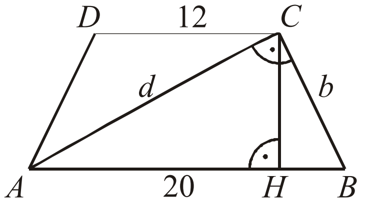
2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с прав ъгъл при върха C, радиус на описаната окръжност $R=6,5$ и радиус на вписаната окръжност $r=2.$ Да се намери лицето на триъгълника.

Решение. За хипотенузата c веднага получаваме $c=13.$ Ако катети са a и $b,$ от питагоровата теорема и формулата за радиуса на вписаната окръжност получаваме системата $\left|\begin{array}{l} a^2+b^2=169 \\ a+b=17 \end{array}\right.$. Така за катетите получаваме 5 и 12 и за лицето на триъгълника 30.

3. Да се реши уравнението $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=4.$

Решение. Двата радикала са дефинирани при $x\geq\frac{2}{3}$. Последователно получаваме:
$\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}=4\Rightarrow\sqrt{3x-2}=4-\sqrt{x+2}\Rightarrow x-10=-4\sqrt{x+2}\Rightarrow x^2-36x+68=0.$
Последното уравнение е еквивалентно на даденото при $x\in\left[\frac{2}{3};10\right]$ Корените на квадратното уравнение са $x_1=2$ и $x_2=34.$ Тъй като $34\notin\left[\frac{2}{3};10\right]$, то 34 не е корен на ирационалното уравнение. Понеже $2\in\left[\frac{2}{3};10\right]$, то коренът на ирационалното уравнение е 2.
Забележка. Решението може да се направи и без да се изследва еквивалентността, а се извърши проверка на решенията.

4. Даден е трапец, вписан в окръжност, с основи с дължини 12 и 20. Да се намери дължината на бедрото, ако центърът на описаната окръжност лежи на голямата основа на трапеца.

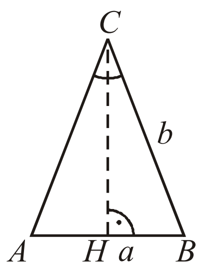


Решение. Понеже трапецът $ABCD$ е вписан, то той е равнобедрен. Тъй като AB е диаметър, то $\measuredangle ACB=90°$. Нека $AD=BC=b$ и $AC=BD=d.$ Ако CH е височината на трапеца, $AH=16$ и $BH=4.$ От $\triangle ACB$ получаваме $b^2+d^2=400$, а от двата триъгълника $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$ намираме $d^2-b^2=240.$ Като извадим двете уравнения получаваме $b=4\sqrt{5}.$

5. Дадено е уравнението $x^2-2(a+1)x+a^2-4=0$, където a е реален параметър. Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението, да се намери най-малката стойност на сбора $S=x_1^3+x_2^3$.

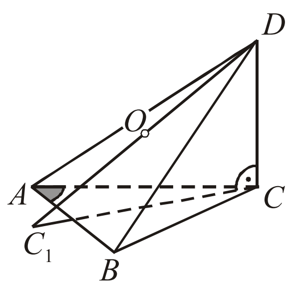
Решение. Корените x_1 и x_2 са реални, когато дискриминантата $D\ge 0$. От $\frac{1}{4}D=\left(a+1\right)^2-\left(a^2-4\right)=2a+5\ge 0$ намираме $a\in\left[-2,5;+\infty\right]$. От формулите на Виет имаме $x_1+x_2=2(a+1)$ и $x_1x_2=a^2-4$. Така за сбора $S\left(a\right)$ от кубовете на корените намираме $S\left(a\right)=x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=8\left(a+1\right)^3-6\left(a+1\right)(a^2-4)$. За производната получаваме $S'\left(a\right)=24\left(a+1\right)^2-6\left(a^2-4\right)-12a\left(a+1\right)=6a^2+36a+48$. Корените на уравнението $S'\left(a\right)=0$ са $a_1=-4$ и $a_2=-2$. При $a=-4$ уравнението няма реални корени. При $a=-2$ функцията $S\left(a\right)$ има минимум понеже $S'\left(a\right)<0$, когато $a\in\left(-4;-2\right)$ и $S'\left(a\right)>0$, когато $a\in\left(-2;+\infty\right)$. Следователно когато $a\in\left[-2,5;+\infty\right]$, $S_{\min}=S\left(-2\right)=-8$.

6. Даден е равнобедрен триъгълник с лице 9 и страна с дължина 6. Да се намери периметърът на триъгълника.



Решение. Нека в $\triangle ABC$ $AB=a$, $AC=BC=b$ и $\sphericalangle ACB=\gamma$. Възможни са два случая за страните $a=6$ или $b=6$. Ако $a=6$, от $9=S=\frac{1}{2}.6.CH$ намираме $CH=3$ и от питагоровата теорема получаваме $b=3\sqrt{2}$. Тогава периметърът на $\triangle ABC$ е $6\left(\sqrt{2}+1\right)$. Ако $b=6$ имаме $a^2=2b^2-2b^2\cos\gamma$. От $9=S=\frac{1}{2}.36\sin\gamma$ намираме $\sin\gamma=\frac{1}{2}$, откъдето $\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следователно $a^2=2b^2\pm 2b^2\frac{\sqrt{3}}{2}=b^2\left(2\pm\sqrt{3}\right)$, откъдето $a=6\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$. Следователно в този случай имаме два равнобедрени триъгълника с периметри $6\sqrt{2\pm\sqrt{3}}+12$.

7. Основата на триъгълна пирамида $ABCD$ е равнобедрен триъгълник ABC, за който $AB=8$ и $AC=BC=4\sqrt{5}$. Околният ръб CD е перпендикулярен на равнината на основата и $CD=6$. Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.



Решение. Нека C_1 е пресечната точка на височината към основата на $\triangle ABC$ с описаната около триъгълника окръжност. Тогава равнината $\left(CC_1D\right)$ е симетрална за отсечката AB, $\triangle C_1CD$ е вписан в голяма окръжност на описаната сфера и центърът O на сферата е център на описаната окръжност около $\triangle C_1CD$. Тъй като $CD\perp\left(ABC\right)$, то $CD\perp CC_1$. Следователно точката O е средата на хипотенузата C_1D на правоъгълния триъгълник CC_1D и $C_1D^2=CC_1^2+CD^2$. Понеже $\triangle ABC$ е равнобедрен, CC_1 е диаметър на описаната около него окръжност. Ако $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{AB}{2AC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, откъдето $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $CC_1=10$. Следователно $C_1D^2=136$ и радиусът на описаната сфера е $\sqrt{34}$.

8. Дадена е функцията $f(u)=2^u.\log_3(u+2)$. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-a|\right)$ има точно три различни реални решения.

Решение. Тъй като за $u\geq 0$ функциите 2^u и $\log_3(u+2)$ са строго монотонно растящи и положителни, функцията $f(u)=2^u.\log_3(u+2)$ е строго монотонно растяща за $u\geq 0$. Тогава уравнението $f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-a|\right)$ е еквивалентно на $(x-1)^2=2|x-a|$. За да има уравнението $f\left((x-1)^2\right)=f\left(2|x-a|\right)$ три различни реални решения, то уравнението $(x-1)^2=2|x-a|$ трябва да има три различни реални решения. Последното уравнение е еквивалентно на уравнението $\left(x^2-4x+2a+1\right)\left(x^2-(2a-1)\right)=0.$

Разглеждаме следните три случая:

Първи случай. Уравнението $x^2-(2a-1)=0$ има двоен корен. Тогава $a=\frac{1}{2}$ и даденото уравнение има решения $x_1=0$ и $x_{2,3}=2\pm\sqrt{2}.$

Втори случай. Уравнението $x^2-4x+2a+1=0$ има двоен корен. Тогава $a=\frac{3}{2}$ и даденото уравнение има решения $x_1=2$ и $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}.$

Трети случай. Уравненията $x^2-(2a-1)=0$ и $x^2-4x+2a+1=0$ имат общ корен. Тогава $a=1$ и даденото уравнение има решения $x_1=3$ и $x_{2,3}=\pm 1.$ Следователно, търсените стойности за параметъра a са $\frac{1}{2}, 1$ и $\frac{3}{2}$.